國立高雄大學統計學研究所

碩士論文

Select optimal risk factors for the arbitrage pricing theory

套利定價理論中之最適風險因子選取問題

研究生：李岱霙 撰

指導教授：俞淑惠 博士

中華民國九十九年一月

致謝辭

在此論文完成之際，心中有著無限的感激。首先，我最要感謝的是我的指導教授—俞淑惠博士，在碩士班的求學過程中，教導我如何獨立思考並解決問題，且在研究方向及觀念上細心與耐心的給予導正及指引，並且適時協助支持與鼓勵。最重要的是，老師一直不斷地協助我找尋未來的方向以及教導我正確的做事態度。十分感謝俞老師對我付出的時間和心力！其次，感謝銀慶剛老師和蔡明憲老師惠允擔任論文口試委員，兩位老師詳細且精闢的論點，使本研究獲益良多且更為嚴謹。

感謝統計學研究所的大家長—黃文璋老師，謝謝黃老師適時的安慰並鼓勵我，建立我的信心，非常感謝黃老師對我的關心和照顧，您的一句話總是讓我溫暖許久。因緣際會下，很榮幸可以在黃老師的帶領中學習如何排版語言，從中讓我見識到作任何事情該有的嚴謹態度。感謝統計學研究所所長—陳瑞彬老師，提供我許多自身的經驗，教導我與人相處之道。感謝黃錦輝老師，謝謝您願意用不同的角度去看待和解釋事情，您替我的行為找的理由，是我聽過最感動的！感謝陳俞成老師，即便是多麼簡單的題目，您總是有邏輯地詳細解釋，只是希望我能夠懂，謝謝您的耐心。感謝林士貴老師在書報討論時，給我很大的勇氣。感謝所辦秘書—蘭屏姐，謝謝您協助我處理生活上的一切事情，提醒我該留意的部分。

感謝所有研究所的同學，因為有你們的陪伴，我的研究所生活才能夠多采多姿。感謝怜竹與我分享所有生活上的瑣事，也一直都很用心的幫助我，貼心幫我打鑰匙、專程去捷運站接我、在我需要幫忙時二話不說的幫忙等等，最重要的是有順序性的引導我敞開心胸。感謝立琳設身處地替我抹去所有不開心的情緒，因為有你，我不覺得孤單。感謝婷婷陪伴我、聆聽我的心聲，謝謝妳讓我好窩心。感謝怡如追來停車場，因為有你，我變得更勇敢。感謝于琇在開學那天主動來找我吃飯。感謝暉展在我課業需要幫忙時，總是熱心地協助我。感謝聲杰總是開玩笑的說我是最閃亮的一顆星。感謝耀升一路以來的扶持，也謝謝你總是不吝嗇的分享你所擁有的資源。感謝恩豪的熱心助人。感謝信堡在學習過程中提供的協助。

感謝研究所的學長姊和學弟妹。感謝虹儒學姊總是很親切地對待我，且很熱心地協助我解決程式相關問題。感謝廣杰學長提供我不同的思考方向。感謝基祥學長在論文排版上的協助，並適時地幫助我解決問題。感謝學弟妹的陪伴，可以認識你們是一件很幸福的事情。

感謝我最要好的知己—又親，不計一切的幫助我，包容我的一切。不管相距有多遠，我都感受到最真摯的友誼！最後，感謝爺爺奶奶和父母的養育之恩與致力栽培我求學。感謝妹妹濟亘全力支持我、相信我、陪伴我創造許多美好的回憶。感謝弟弟宗修，讓我的生活充滿樂趣，講笑話逗我開心、寫紙條關心我等等。

感謝我遇到的一切人事物！讓我可以有學習、有成長的機會。

李岱霙 謹上

中華民國 九十九年一月

Select optimal risk factors for the arbitrage pricing theory

by

Dai-Ying Li

Advisor

Shu-Hui Yu

Institute of Statistics,

National University of Kaohsiung

Kaohsiung, Taiwan 811 R.O.C.

January 2010

目　　錄

中文摘要 iv

英文摘要 v

第一章　簡介 1

第二章　文獻回顧 3

第一節　定價理論回顧 3
第二節　套利定價理論因子實證研究 8
第三節　套利定價理論模型估計方法 14
第四節　最佳動態規劃模型 20

第三章　模型介紹 24

第一節　風險因子衡量方式 24
第二節　贏家規則(The play-the-winner)模型 29
第三節　多選項吃角子老虎機器(The multi-armed bandit)模型 33

第四章　實證研究和討論 37

第一節　資料來源與變數定義 37
第二節　敘述統計分析 41
第三節　相關係數分析 41
第四節　The play-the-winner實證結果 43

第五章　結論 63

第六章　參考文獻 64

附　　表

表格 1 列出模擬三種準則在兩種不同先驗分配時所得到的模擬報酬結果 22
表格 2 逐漸放寬風險因子個數的五個模型 32
表格 3 五個總體經濟變數之資料來源 38
表格 4 五個總體經濟變數之計算方式 38
表格 5 五個總體經濟變數報酬之敘述統計數值 41
表格 6 五個總體經濟變數之相關係數分析表 41
表格 7 八個模型隨著風險個數放寬遞減的公司家數 46
表格 8 第 7 間公司在模型PLAY4 和模型PLAY5 下的比較 47
表格 9 第 489 間公司在模型CPLAYW和CAPLAYW的殘差平方和比較表 47
表格 10 模型PLAY和模型PLAYW隨著風險個數放寬遞減的公司家數 48
表格 11 模型CPLAY和模型CPLAYW隨著風險個數放寬遞減的公司家數 51
表格 12 第 500 家公司在兩種不同模型(CPLAY、CPLAYW)下的殘差平方和.....51
表格 13 模型CAPLAY和模型CAPLAYW隨著風險個數放寬遞減的公司家數.....53
表格 14 第 500 家公司在兩種不同模型(CAPLAY、CAPLAYW)下的殘差平方和....53
表格 15 模型PLAYPCA和模型PLAYPCAW隨著風險個數放寬遞減的公司家數 55
表格 16 第 500 家公司在兩種不同模型(PLAYPCA、PLAYPCAW)下的殘差平方和.55
表格 17 所有公司在不同方法中兩種模型的每一期的平均殘差平方和 57
表格 18 不同方法間的平均殘差平方和 58
表格 19 第一間公司離散化個數不同之比較 59
表格 20 不同模型最後 10 期所得到的殘差和 60

附　　圖

圖表 1 BINOMIAL PROCESS關聯圖 35
圖表 2 五個總體經濟變數的時間序列趨勢圖 42
圖表 3 不同模型下之整體比較圖形 46
圖表 4 贏家規則和乘勝追擊規則殘差平方和的比較(總體經濟變數).....49
圖表 5 贏家規則和乘勝追擊規則殘差平方和的比較(CAPM中之β) 50
圖表 6 贏家規則和乘勝追擊規則殘差平方和的比較(CAPM中之α、β) 52
圖表 7 贏家規則和乘勝追擊規則殘差平方和的比較(主成份分析).....54
圖表 8 刪除 1%和 5%的公司家數後兩種模型的比較.....56
圖表 9 離散化個數為 10 的結果 61
圖表 10 離散化個數為 20 的結果 62
圖表 11 離散化個數為 40 的結果 62

國立高雄大學 National University of Kaohsiung

套利定價理論中之最適風險因子選取問題

指導教授：俞淑惠博士
國立高雄大學統計學研究所

學生：李岱霙
國立高雄大學統計學研究所

摘要

套利定價理論中，最重要的精神是建立報酬和風險之間的關係，以進行資產定價。而研究資產定價最主要的問題為，影響報酬率的因子是無法觀測得知。在過去文獻中有很多估計風險因子的方法，例如半自我迴歸法、漸進主成分分析等等。在本研究中，我們嘗試將總體經濟變數量化為影響報酬之風險因子。許多學者運用不同的模型，企圖將風險和報酬之間關係描述的更適切，並更能反映市場中交互作用的機制。我們提出一個結合動態規劃模型和套利定價理論之模型，冀望可爲不同的投資期間作出下一步最佳的投資決策。本文發現 multi-armed bandit 模型優於其他傳統的方法。

關鍵字：動態規劃模型、套利定價理論、play-the-winner、two-armed bandits

Select optimal risk factors for the arbitrage pricing theory

Advisor: Dr. Shu-Hui Yu
Institute of Statistics
National University of Kaohsiung

Student: Dai-Ying Li
Institute of Statistics
National University of Kaohsiung

ABSTRACT

In the arbitrage pricing theory, the most important spirit is to establish the relationship between return and risk in order to asset pricing. A major problem in studying asset pricing is that common factors affecting asset returns are unobservable. In relevant literatures, there were many methods to estimate risk factors, such as semiautoregression approach, asymptotic principle component analysis, and so on. In this article, we try to use the macroeconomic factors transformation methods to quantify risk factors.

In order to describe the relationship between risk and return more appropriate, many scholars use different models to reflect the interaction mechanism in market. We propose a model to combine a dynamic programming model and arbitrage pricing theory .We expected it can make optimal decisions in the next step on different investment period. We find that multi-armed bandit model is better than other traditional methods.

Keywords: Dynamic programming model, Arbitrage pricing theory, play-the-winner, Two-armed bandits, Multi-armed bandits

第一章 簡介

在科技發達的今日，隨著金融自由化與全球化，整個金融體系蓬勃發展，市場上的投資工具不勝枚舉，如何做好投資理財規劃已成為公司及個人最重要的課題之一。投資者會進行投資行為是希望透過投資行為獲取報酬，但是任何投資均含有某種程度的不確定性，在多數的情況下，不確定性有相當影響力並形成各類投資風險，因此風險是投資決策所面對的另一個問題。不同的投資決策牽涉到風險和預期報酬之間的取捨問題，正確面對風險應有的態度是要隨著不同的考量，調整投資決策以達到可承擔風險的程度，因此投資者須密切地注意所承擔的風險，以及明白對其投資決策有何影響，進一步為預期的結果做準備。簡而言之，考量承擔的風險是否值得是重要的，如果承擔很高的風險，但卻沒有提高對應的報酬，預期可見投資人會調整其投資組合。

在欲探討風險和報酬關聯的前提下，如何衡量風險是一項重要的課題，計量模型的建構者不斷地尋求方法去建構合適的模型以反應真實的經濟現象，並冀望在實證達到有效的預測能力。資本定價理論是評估風險報酬之關係為主軸的理論模型，其中學術界和實務界長期以來考量期望報酬和風險的主要方法和依據，資本資產定價模型(Capital Asset Pricing Model, CAPM)和套利定價理論(Arbitrage Pricing Theory, APT)。

本研究希望以套利定價理論為基礎，結合 Jones (1974)提出合理的最佳動態規劃模型中的 The Play-the-winner 和 The two-armed bandit 模型，試圖將過去資料建立良好的配適，找出個別資產在不同期間所承擔的風險因子，進而用來決定如何作出下一步最好的選擇，使得期望報酬最大化。本文主要的研究內容重點依序如下，首先是探討有關於套利定價模型理論的演進及分析有關套利定價理論的因子，進而透過最佳動態規劃模型，並建立套利定價理論中風險和報酬之間的關係。最後，透過分析不同模型之間對於套利定價理論的影響，並進行實證結果的比較和分析。

論文主要架構敘述如下，第一章為簡介研究的背景和闡述研究的流程；第二章為文獻探討-主要在討論套利定價理論架構，並參考相關文獻中對套利定價理論因子的討論，再對其他套利定價理論相關估計方法作描述；而第三章是模型介紹-介紹主要採用的模型架構；接著第四章是實證研究-說明資料來源及將資料帶入模型的過程，並分析探討各個模型下結果的比較，並將實證結果總整理表示；第五章為結論和建議，依實證分析結果，得到本研究之結論，提供適當之建議予後續相關研究者與投資決策者參考；第六章為主要的參考文獻。

國立高雄大學 National University of Kaohsiung

第二章 文獻回顧

第一節 定價理論回顧

(一) 資本資產定價理論(Capital Asset Pricing Model)

資產的預期報酬率是投資人期望在未來某段時間能夠自某項資產賺取的估計報酬，因為是估計報酬，故受限於實現報酬機率之隨機性，因此導致真實實現的報酬不穩定。因為未來是不可預測的，使得投資具有風險，但投資人可利用投資組合降低風險，投資組合的風險大小和組合中的資產個數，以及資產彼此之間的相關性有關，當投資人確實做到分散投資在資產相關係數越小的資產時，便可降低投資的風險，但無法完全消除風險。在整個投資市場中，風險主要可分成系統風險與非系統風險，其中可以隨著資產項目增加而減少甚至消除的風險稱為可分散風險或非系統風險。系統風險是指整個市場、整個系統或整個投資組合都會遭遇到且無從規避的風險，因此又可稱為市場風險。市場風險對市場投資組合造成影響時，組合內每種個別資產因其本身的獨特性質，所受市場因素變化的影響也會有所不同，當個別資產的報酬與市場報酬愈息息相關時，表示該資產無法分散的系統風險愈高。

資本資產定價模型是由 Sharp (1964)、Lintner (1965)和 Mossin (1966)所發展出來，儘管隨後提出許多相關的延伸模型，但現代財務經濟學家仍然以原始的資本資產定價模型為主要的定價原則。此理論是建構在 Markowitz (1952)的投資組合理論之上，每位投資人均被假設為根據 Markowitz 投資組合模型來分散其投資組合。基本假設如下：投資者為厭惡風險者(Risk-averter)，希望期望報酬率的效用達到最大。所有投資者都會投資於 Markowitz 投資組合模型內的效率投資組合，且每位投資者所持有的效率投資組合視其風險厭惡程度而定。

(1) 資本市場存在無風險利率(Riskless-rate)，投資人可以此利率無限制的借貸投資金額。

(2) 投資者對投資報酬率的期望一致(Homogeneous Expectation)，換句話說，所有

投資者對每一種證券的預期報酬率、變異數及兩證券的共變異數，都持一致性看法，亦即每位投資者所估計的投資組合效率前緣是相同的。

(3) 資本市場為完美市場(Perfect Market)，投資者不需要花費交易成本及繳稅，而且資產可作無限地分割成細小的買賣單位。

(4) 所有投資者的投資期間為一期，且期間相同。

(5) 資本變動市場屬於完全競爭市場，每位投資者都是價格接受者，沒有投資者可以影響價格的[1]。

顯然地，這些假設忽略了現實狀況的複雜性，然而其對證券市場均衡的本質提供有利的見解。若上述假設皆成立的情況下，資本市場便處於一個不再能提供套利交易誘因的均衡市場。在市場均衡的情況下，資本資產定價理論提供報酬與風險間之抵換關係的衡量依據。此理論指出，在完美市場假設下，當市場處於效率且均衡時，個別資產預期報酬率與市場系統風險存在線性關係，且因可藉由多角化的投資方式，將非系統風險消除，對理性又從事多角化投資的投資人而言，只有系統風險是進行投資組合決策時，所要考慮的唯一風險。

關係式如下所示：

$$E(R_i) = R_f + \beta_i \cdot (E(R_m) - R_f)，\qquad (2\text{-}1.1)$$

其中 $E(R_i)$ 為該市場中證卷 i 的期望報酬率，R_f 為無風險利率，而 $E(R_m)$ 為市場投資組合的期望報酬率(Market Rate of Returns)，實務上以大盤股價指數報酬率取代之，β_i 為資產 i 的風險測量指標，又稱為貝它係數，β 愈高表示系統性風險愈高[2]。

[1]資本資產定價理論的假設或許與實際情況並不相符，但由於現實經濟環境的複雜性，各種因素糾結在一起，故作此假設是為了簡化市場條件，以便導出市場的行為。

[2]在評估投資活動的系統風險時，常用「β 係數」來衡量個別資產受系統風險影響的程度，即當市場報酬率變動時，個別資產之預期報酬率同時發生變動的程度。β 採用共變異數觀察法來量測，當個別資產報酬率與市場報酬率關聯性愈強時，二者間的共變異數或相關係數便愈高，此一特質對系統風險的衡量提供了很好的工具。

此關係式是對任一證券或投資組合預期報酬和風險的一種簡單但明確的描述。它將投資的基礎予以公式化，亦即當承擔的風險愈大時，預期報酬應該愈大。這項關係說明投資人對風險性資產所預期的報酬，等於無風險利率(無風險資產報酬)加上風險溢酬；而所承擔的風險愈大，風險溢酬愈大。風險溢酬即(2-1.1)式中 $\beta_i \cdot (R_m - R_f)$，其表示該證券相當於 β_i 程度的系統風險下，應提供較市場平均溢酬水準 $R_m - R_f$ 較高或較低的額外報酬，其中市場投資組合預期報酬高於無風險的部分($R_m - R_f$)，稱為市場風險溢酬(market risk premium)，它代表投資人承擔市場風險的補償。

在資本資產定價模型的架構裡，資產的價值是根據其如何與市場投資組合的互動而定，或者更具體地說，是根據其風險如何與市場風險相關聯而定。在得知資產報酬之間相關性顯著的影響，我們必須衡量其互動程度，將其納入投資組合風險的衡量中，因此互動性會影響投資組合的風險。共變異數是兩資產報酬間的相關程度之衡量標準，其定義為兩個隨機變數隨著時間共同變動的程度。假設 R_i 與 R_j 表示第 i 個和第 j 個資產報酬率，則兩個資產共變異數算式：

$$Cov(R_i, R_j) = E\Big[\big[R_i - E(R_i)\big]\big[R_j - E(R_j)\big]\Big] = \frac{1}{N}\sum\Big[\big[R_i - E(R_i)\big]\big[R_j - E(R_j)\big]\Big] ,$$

相關係數 ρ 則等於共變異數除以兩個資產的標準差 σ 的乘積：

$$\rho_{i,j} = \frac{Cov(R_i, R_j)}{\sigma_i \sigma_j} ,$$

經由這兩個數值的求算，根據迴歸分析統計方法，可經由(2-1.1)式計算求得投資該資產所需承擔的系統風險大小貝他(β)值[3]。

$$\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_m)}{Var(R_m)} = \frac{\sigma_{i,m}}{\sigma_m^2} = \rho_{i,m}\frac{\sigma_i}{\sigma_m} \quad , \qquad (2\text{-}1.2)$$

[3]就數理的層面來說，β 其實是經由線性迴歸模式(Linear Regression Model)推導所得到的迴歸係數，表示單一資產報酬與市場報酬間的依存程度大小。

(2-1.2)式中 $Cov(R_i, R_m)$ (或 $\sigma_{i,m}$)表示個別資產與市場在報酬上的共變異數；而 $Var(R_m)$ 為市場資產報酬的變異數；$\rho_{i,m}$ 為其個別資產報酬和市場報酬的相關係數。

貝它係數以簡單的方式比較市場波動和資產波動之大小，結合統計和財務上的意義，可視為衡量市場組合報酬變動一單位時，個別資產預期報酬的變化幅度，幅度愈大代表個別資產對市場投資組報酬率 R_m 變化的敏感度愈大，也表示系統風險越大。

(二) 套利定價理論(Arbitrage Pricing Theory)

以往資本資產定價模型一直是學術界和實務界評估預期報酬的主要方法，而資本資產定價模型在市場投資組合為平均變異數效率的情況下，系統風險是唯一能解釋各投資組合預期報酬的變數，且作為風險調整報酬的基礎，不論是在理論或是實務上都扮演重要的角色。在資本資產定價模式提出後，許多學者利用實際資料去驗證資本資產定價模型是否成立，結果發現，市場報酬不是解釋個別資產價格變動的唯一因素，許多實證研究中發現系統風險無法單獨解釋資產報酬，Meyers (1973)提出至少超過一個市場因子影響著報酬率的證據。Fama and French (1992)實證研究顯示 β 值對未來報酬無法作準確預測，並指出市場資本、本益比、財務槓桿同樣扮演不錯的預測角色，並指出若能掌握公司的某些重要特徵，例如公司規模和市場價值對市值比率對期望報酬才具有顯著的解釋能力，而會造成此異常現象可能的原因包括資本資產定價模型的定式錯誤(即遺漏某些風險因子)、市場不具效率性、或兩者兼具。

當過去發展的模型無法闡述現有資料時，學者致力於在適切反應真實情況下去改善資本資產定價模型中只用單一因子解釋現實狀況的缺點，在考量模型是否具備完善的情況下企圖找出更適切的評價模型，隨著技術的進步，Ross (1976)提出一個合理且又能補強資本資產定價模型中系統風險所無法解釋的部分所發

展之模型，亦即著名的套利定價理論(Arbitrage Pricing Theory, APT)。

與資本資產定價模型理論相似的是，套利定價理論也相同認為資產的期望報酬是風險因素的線性函數，但兩者差異在於資本資產定價理論基礎下市場投資組合風險是唯一的風險因素，但是在套利定價理論模型認為除了系統風險對預期報酬產生影響外，應廣泛納入其他能夠解釋資產報酬中系統風險所無法解釋的因子。套利定價理論的優點是限制性的假設較少，且比資本資產定價模型更為一般化。其基本假設如下：

(1) 資本市場為完全市場，無資訊成本。

(2) 投資人皆認為證券的報酬率與許多不同因素呈現線性關係，且對報酬率有同質預期。

(3) 誤差項與解釋資產報酬率的各項因素間互為獨立。

(4) 無套利投資組合存在。

亦即在此假設下個別資產報酬率的基本形式如下：

$$E(R_i) = r_f + \beta_{i,1}(E(r_{F_1} - r_f)) + ... + \beta_{i,k}(E(r_{F_k} - r_f)) + \varepsilon_i \text{，}$$

其中 $E(R_i)$ 為第 i 個資產的期望報酬率，即實際值減去預期值的差額，$\beta_{i,k}$ 為第 i 個資產對第 k 個風險因素的敏感係數，ε_i 為第 i 個資產的特有報酬率(誤差項)，亦即非系統部份的報酬。

第二節 套利定價理論因子實證研究

套利定價理論認為報酬是由多種風險因素共同決定的，但並無說明共同風險因素的數目，因此套利定價理論在實務應用上和驗證模型上，必須先辨識出共同影響報酬的風險因子。應用套利定價理論最重要的問題是無法明確界定風險因子，因此許多研究人員嘗試找出套利定價理論中影響報酬的共同風險因子，並以實證研究檢定，該因子是否顯著。Berry, Burmeister and Mcelroy (1988)考量套利定價理論中作為影響報酬的風險因子，必須要具備的三個重要的特性：

(1)合理風險因子必須在每一期初，因子無法完全被市場所預測。

(2)每個因子都要對股票報酬有全面性的影響。

(3)相關的風險因子必須影響期望報酬。

事實上，影響的風險因素可能有無限多個，實證研究結果認為眾多的資訊可歸納成五個或甚至更少的因素。在套利定價理論實證研究中，共同影響報酬的風險因子的篩選主要考量總體經濟活動對證券價格變動有潛在重要影響者。近來國內外於此影響研究著墨甚多，其中以 Chen, Roll and Ross (1986)所提出的解釋因子廣為後繼研究討論。該文獻指出，根據股價理論，股價是一個恰當的變數，可以用來反應當市場面對某些因素影響時所產生的變化。在計算股票估計價值所用的傳統方法中，股票價值可運用將其未來現金流量折現的計算過程來評估；也就是說，股票的內涵價值(intrinsic value)或估計價值，會等於投資人預期從資產收到的未來現金流量的折現值。因為在正常的情況下，投資人唯一可從公司直接收到的是股利現金流量，故使用現金流量折現技巧下，用股利作為評估模型的基礎是適切的。理論股價是未來所有預期股利以折現的方式計算而得。

$$p^* = E\{\sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+h)^t}\}$$

其中 p^* 代表股票理論價格，h 為折現率，D 為預期未來每期能收到的股利。

上式可解釋為：若公司為永續經營，投資人永遠持有股票，則持有該股票的

未來收入，即為公司所發放的股利，因此將股利折現，便得到股票的真實價值。在上式中，股利可視為現金流量，而現金流量主要是看企業經常性的營業活動所產生的現金流入，是否足以償還流動負債，因此可知預期現金流量和折現率的對股價的影響甚大，於是 Chen et al.(1986)選用影響預期現金流量和折現率的相關因子作為解釋影響資產報酬的風險因子。在這樣的理論基礎下，歸納出下面五個可能影響預期的現金流量或是折現率的風險因子變數。

(1) 工業生產指標(Industrial production)

Geske and Roll (1983) 、 Park (1997) 、Beenstock and Chan (1988) 、Ozcam (1997) 的文獻中指出工業指數和股價指數呈現正向的關係。工業生產指數乃是以統計數字表示工業部門生產水準變動情況的經濟指標，它象徵國內產業生產概況，也是反映整體經濟週期變化的主要基準。當工業生產旺盛，表示市場需求旺盛，經濟狀況良好，公司期望報酬率也隨之增加。另一方面，廠商擴大生產可以達到規模經濟，降低成本，使利潤增加，而企業的獲利情形與股價的漲跌更是息息相關。因此，透過工業生產情形可了解產業動態，進而預測股價走勢。基於工業生產產能的變化會透過對現金流量的衝擊進而影響股票報酬的原因，是故選用工業生產指數成長率為股票報酬的解釋因子之一。Chan, Chen and Heieh(1985)、Burmeister and Wall(1986)、Altay (2003) 都將工業生產指標納入套利定價理論的風險因子中，作為可能影響報酬的因素。

(2) 通貨膨脹率

消費者物價水準為衡量整體經濟社會一般商品物價的代表性指標，其反映消費支出型態的變遷與社會大眾對於商品及勞務價格所願意購買的數量與支付能力，也隱含其與實際生產數量之間的差距。消費者物價指數變化率穩定地成長，在市場供需的調整下，可為企業創造利潤，股價容易有上漲趨勢。若消費者物價指數不斷且持續地上漲，則易造成通貨膨脹的壓力，而通貨膨脹的發生，將使得消費者的實質購買力下降，且降低消費數量，進一步影響到企業的獲利，股價可能因此而下跌。通貨膨脹反應消費者物價指數的變化，進而影響現金流量和折現

率，故考量由通貨膨脹率衍生出來的兩個變數，非預期通貨膨脹率(Unanticipated inflation)以及預期通貨膨脹變動率(the change in expected inflation)作為解釋報酬率的風險因子。在 Chan et al.(1985)、Chen et al.(1986)、Burmeister et al.(1986)、Berry et al.(1988)、 Chen and Jordan (1993)、Altay (2003)的相關研究中，均曾考慮以通貨膨脹率作為風險因子。Park(1997)發現股票報酬與通貨膨脹有關。Groenewold and Fraser(1997)利用套利定價模型探討總體經濟因素對股票報酬的影響，他們以澳洲股票市場中的上市資料為研究樣本，實證後發現通貨膨脹率成長率的對股價報酬的影響是顯著因子之一。

(3) 風險溢酬的改變(risk premium)

風險溢酬是投資人在承擔較多的風險時，會預期得到的額外報酬，它衡量承擔各種不同風險的報酬。Chen et al.(1986)定義風險溢酬的變化為不同等級債券殖利率的差，在正常情況下，等級較差的債券殖利率大於等級較佳的債券利率，當這兩種利率的差變大時，代表投資者偏好體系較佳公司所發行的債券，體系較差的公司因而需支付較高的風險溢酬，隱含市場經濟狀況不佳，對報酬率為負面影響。Chan et al.(1985)、Berry et al.(1988)、Priestley(1996)也考慮風險溢酬的變化為套利定價理論實證因子之一。

(4) 利率期限結構(the term structure)

利率期限結構是無違約風險、零息債券的利率與到期期限間的關係。換句話說，利率期限結構說明，在某一時點，相同的風險水準但到期期限不同之同種金融工具的收益率與期限之間的關係。其他條件相同下，債券到期期限越長，則存續期間越長，殖利率變動時債券價格波動也越大，利率風險越高，所以殖利率變化會導致債券價格變動。又當市場多頭時，大多數人會傾向於投資報酬率較高的股票，同時投資債券的人可能會轉向股票。反之，當市場空頭時，股票市場跌多於漲，所以大部分人會轉向債市，以避險和賺取報酬率。因此，本文認為利率期間結構也是影響股價的因素之一。

Chen et al.(1986)將股票價格表示為預期未來股利之折現值，其中評價過程中

所使用的折現因子，乃受到市場期限相同的無風險利率影響。因此，當市場利率波動時，將影響在投資之獲利水準與折現因子，進而影響股票的評價。實務上，Chen et al.(1986)將利率期限結構的變化定義成不同到期日債券利率之差。Pari and Chen(1984)、Chan et al.(1985)、Berry et al.(1988)、Ozcam (1997)、Altay (2003)亦考慮利率期間結構變化率(unanticipated term structure)作為解釋股票報酬率的因子。

(5) 股價指標(market indices)

Fama (1981)進行一項涵蓋期間長達 20 餘年的實證調查，探討股票報酬和總體經濟變數相互之間的關係，結果發現股價指數領先其他各項經濟指標。

股價指標是利用股市的部分或全部股票為樣本,比較當期與所選擇基期的股價水準，以一個簡單的數字，提供了評比的基準點，綜合表示整體股票的價格變動，作為判斷股價變動趨勢的一種準則，以反應當時市場的趨勢。除了 Chen et al.(1986)考慮股價指標為影響報酬的因子外，Pari et al.(1984)、Priestley(1996)亦加入股價指標做為衡量報酬變化的因子。

除了上述這些總體經濟變數可視為影響報酬的風險因子外,較常被其他學者研究影響股價報酬的總體經濟變數，尚有以下重要的總體經濟變數。

(1)貨幣供給額

Rozeff (1974)指出當期貨幣供給確實會使當期的股票報酬提高。另外，Schwert(1989)研究股價報酬率與總體經濟變動之間的關聯性，實證美1857-1987的股價月資料發現，貨幣供給額成長率的波動性和股價報酬波動性呈現正相關。Pearce and Roley (1985)研究總體經濟變數對S&P500股價指數的影響， 結果發現貨幣供給額與股票報酬具有正相關。Rogalski and Vinso(1997)、Geske and Roll(1983)、Kaul(1987)的實證研究結果,均支持貨幣供給額與股價有關聯的論點。

在證券市場中，貨幣供給額是影響股價指數變化的重要因素，即為資金方面的考量，資金的充沛與否與股市榮枯有著密不可分的關係，這是因為股價指數上升，必須要有足夠的動能，而這個動能的來源就是靠資金。套利定價理論在文獻

上有利用貨幣供給額作為風險因子的研究，如Groenewold et al.(1997)實證發現貨幣供給額成長率的對報酬的影響甚為顯著。Clare and Thomas (1994)和Priestley(1996)亦認為貨幣供給是影響報酬的顯著因素。

(2)匯率

匯率是兩國之間貨幣兌換的比率，兩國間的均衡匯率是由外匯市場供需所決定的。Jorion (1990)指出一國匯率波動程度是利率的四倍，更是通貨膨脹的十倍，因此在研究股價報酬變動時，匯率的變動往往也是一個舉足輕重的影響因素。匯率變動主要是透過貨幣供給額以及進出口貿易兩種力量來影響股價。政府對匯率的干預程度會影響該國的貨幣供給，使股價報酬產生變動。匯率變動會改變國內外相對的物價水準，進而影響對外貿易的競爭力及各產業的獲利能力，因而影響股價。文獻上 Priestley(1996)經實證研究發現，匯率是解釋套利定價模型的良好風險因子。

(3)石油價格(oil price)

石油是人類的重要資源，其與人民生活息息相關，油料的供應及油價的高低深切地影響到各行各業及各公司的產銷狀況及獲利能力。基本上，油價下跌有益經濟的穩定，它可使利率降低，促使國內物價穩定。所以，石油價格上漲，則大多數產業的生產成本提高，利潤因而減少，股價必然下跌；反之，油價下跌時，股價則上漲。Chan et al.(1985)、 Chen and Jordan (1993)、Clare and Thomas (1994)在研究中亦採用石油價格為影響報酬的因子。

(4) 景氣循環

景氣循環是衡量經濟活動興衰的指標，在景氣衰退或是蕭條期，公司的營運隨之走下坡，一般公司會減少投資，導致盈餘降低，因此，對股價水準有負面的影響；一般而言，股價水準通常會領先經濟景氣，也就是說，如果股市的表現良好，下一期的經濟狀況也會不錯。Chan et al.(1985)相信在經濟環境的變動會反映在股票報酬上，考量 Chen, Roll and Ross(1983)的實證研究中所採用的總體經濟變數來探討風險和報酬之間的關係，Chan et al.(1985)也將景氣循環領先指標納入

風險因子的選項之中。

綜合上述討論，本文將在文獻上套利定價理論在實證研究上所使用的變數，整理歸納在附錄。另外，除了考慮變數意義、以及彼此之間的相關性，加上某些資料取得不易，因此本研究採取五個影響報酬的風險因子分別為工業生產指標、通貨膨脹率、風險溢酬的變化、利率期限結構和史坦普股價指標。

國立高雄大學 National University of Kaohsiung

第三節 套利定價理論模型估計方法

研究資產定價時常須面對的問題是影響報酬率的風險因子無法觀測得知。因此雖然套利定價理論已發展多年，對於估計風險因子的方法，仍然為大家關心的焦點。

(一) 半自迴歸估計法 (Semiautoregression, SAR)

如前所述，現今研究套利定價理論的最大的問題就是普遍影響資本報酬的風險因子是不可觀察到的，Mei(1993)提出 SAR 估計方法來估計套利定價理論中的因子。在套利定價理論中資產報酬率和共同因素之間是線性關係，若只考慮 k 個影響資產報酬的因子時，APT 可描述如下：

$$R_{it} = E_t(R_{it}) + f_{1t}\beta_{i1} + \ldots + f_{kt}\beta_{ik} + \varepsilon_{it} \quad , \quad i = 1,\ldots,N \quad ; \quad t = 1,\ldots,T \quad 。$$

(2-3.1)

其中 R_{it} 代表資產 i 在 t 期間的實際報酬率，而 $E_t(R_{it})$ 是以市場模型估計 R_{it} 的預期報酬率，$f_t^{'} = (f_{1i},\ldots,f_{kt})$ 為一 k 維向量，代表普遍存在影響所有資產報酬的共同風險因子，一般來說是無法觀察到的值，$\beta_t^{'} = (\beta_{1i},\ldots,\beta_{kt})$ 稱為因素負荷量(Factor loading)，為對應 $f_t^{'}$ 的係數，β_{ik} 為資產 i 在第 k 個因素的因素負荷量，也就是對第 k 個因素變動的敏感度，$\varepsilon_t^{'} = (\varepsilon_{1i},\ldots,\varepsilon_{kt})$ 是影響資產的特定風險(idiosyncratic risk)。

在 Connor and Korajczyk (1988)所提出的套利定價理論均衡模型，在(2-3.1)式中假設滿足下列條件：

(1)影響資產的報酬因子之預期期望值為 0 ($E(f_t) = 0$)，

(2)影響資產報酬因子的特定風險之預期期望值為 0($E(\varepsilon_t \mid f_t) = 0$)，

(3) $D_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t}^{'} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \varepsilon_{Nt}^{'} \end{bmatrix}$ 即對角線為相同資產的特定風險之共變異數，其值不為 0，

而非對角線的組成元素為不同資產的特定風險，其彼此之間不相關，所以共變異數均為 0，又把 D_t 稱作對角區塊(Block Diagonal)。

Connor and Korajczyk (1988)所提出的套利定價模型表示如下：

$$E_t(R_{it}) = \lambda_{0t} + \lambda_{1t}\beta_{i1} + ... + \lambda_{kt}\beta_{ik}\text{，} \tag{2-3.2}$$

其中 $\lambda_t^{'} = (\lambda_{1i},...,\lambda_{kt})$ 表示無法觀察到的風險因子對應的風險溢酬，而 λ_{0t} 在資本市場達到無套利時，可解釋成無風險資產。

將(2-3.2)式代入(2-3.1)式，得到下列式子：

$$\begin{aligned} R_{it} &= E_t(R_{it}) + f_{1t}\beta_{i1} + ... + f_{kt}\beta_{ik} + \varepsilon_{it} \\ &= \lambda_{0t} + (f_{1t} + \lambda_{1t})\beta_{i1} + ... + (f_{kt} + \lambda_{kt})\beta_{ik} + \varepsilon_{it} \\ &= \lambda_{0t} + s_{1t}\beta_{i1} + ... + s_{kt}\beta_{ik} + \varepsilon_{it} \quad \text{，} \quad i = 1,...,N;\ t = 1,..,T \end{aligned} \tag{2-3.3}$$

其中定義 $s_t^{'} = (s_{1i},...,s_{kt}) = (f_{1i},...,f_{kt}) + (\lambda_{1i},...,\lambda_{kt})$ 稱 $s_t^{'}$ 為影響資產報酬的共同因素。得到相對 f_t 的因素負荷量 β_t 的過程中，若 β_t 是可以觀察到的，則可以藉由估計(2-3.3)式的因素負荷量和報酬作迴歸，以解釋報酬的橫斷面變異，但因為 β_t 是無法觀察到的敏感性因子，所以必須建立因素負荷量的替代項(proxy)。雖然有其他特別的方法可以建立因素負荷量的替代項，但是 SAR 估計方法的優點是可以直接從(2-3.3)式報酬產生過程中推導出因素負荷量的代替項，其最大的好處是可以直接從資產的報酬率中得到，且可以檢定資產定價理論中的某些限制。

為了推導不能觀察得到的 β_{ik} ，故作一簡單的代數轉換，透過方程式移項和堆疊的技巧，以矩陣的方式呈現如下：

$$\psi = \begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{k1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1k} & \cdots & s_{kk} \end{bmatrix}, \beta_i = \begin{bmatrix} \beta_{i1} \\ \vdots \\ \beta_{ik} \end{bmatrix}, \gamma_i = \begin{bmatrix} R_{i1} - \lambda_{01} - \varepsilon_{i1} \\ \vdots \\ R_{ik} - \lambda_{0k} - \varepsilon_{ik} \end{bmatrix}, \tag{2-3.4}$$

根據(2-3.4)式可以得到

$$\Psi = \beta_i\gamma_i\text{，} \tag{2-3.5}$$

其中 Ψ 為非奇異矩陣(nonsingular)。將因素及因素負荷量標準化之後，得到

$$\tilde{s}_t = (\tilde{s}_{1t},...,\tilde{s}_{kt})' = (\Psi^{-1})' s_t \text{ ，}$$

$$\tilde{\beta}_i = (\tilde{\beta}_{i1},...,\tilde{\beta}_{ik})' = \Psi\beta_i \text{ ，}$$

其中 s_t 是最初的因素向量。因此可以將(2-3.3)式寫成：

$$R_{it} = \lambda_{0t} + \tilde{s}_{1t}\tilde{\beta}_{i1} + ... + \tilde{s}_{kt}\tilde{\beta}_{ik} + \varepsilon_{it} \text{ ，} \quad i = 1,...,N \text{ ；} \quad t = k+1,..,,T \text{ 。} \tag{2-3.6}$$

由(2-3.6)式中，可得：

$$\tilde{\beta}_i = \Psi\beta_i = \gamma_i = \begin{bmatrix} R_{i1} - \lambda_{01} - \varepsilon_{i1} \\ \vdots \\ R_{ik} - \lambda_{0k} - \varepsilon_{ik} \end{bmatrix} \text{ ，} \tag{2-3.7}$$

直覺解釋(2-3.7)式，因為特有風險是隨機噪音(random noise)，所以用過去期間的超額報酬能夠近似因素負荷量。在將(2-3.7)式代入(2-3.6)式中，可得：

$$R_{it} = \tilde{s}_{0t} + \tilde{s}_{1t}R_{i1} + ... + \tilde{s}_{kt}R_{ik} + \eta_{it} \text{ ，} \quad i = 1,...,N;\ t = k+1,..,T \tag{2-3.8}$$

其中 $\tilde{s}_{0t} = \lambda_{0t} - \sum_{v=1}^{k}\tilde{s}_{vt}\lambda_{0v}$ ， $\eta_{it} = \varepsilon_{it} - \sum_{v=1}^{k}\tilde{s}_{vt}\varepsilon_{0v}$ ， $t = k+1,..,T$ (2-3.9)

因此，上述的推導已將 k 因素模型轉換為(2-3.8)式的 $k-lag$ 半自迴歸模型(SAR)，所以在 k 期後的任何期間 $(k+1 \le t \le T)$ ，可以在固定報酬率集合 $(1, R_{i1},..., R_{ik})$ 作簡單迴歸分析，以獲得標準的因素估計值 s_t 。

為了在實證上能容易估計(2-3.8)式，所以把重新將(2-3.8)式寫成：

$$\begin{bmatrix} R_{1t} \\ \vdots \\ R_{Nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R_{11} & \cdots & R_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & R_{N1} & \cdots & R_{Nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{s}_{0t} \\ \tilde{s}_{1t} \\ \vdots \\ \tilde{s}_{kt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_{1t} \\ \vdots \\ \eta_{Nt} \end{bmatrix} \text{，} t = K+1,...,\text{T，} \tag{2-3.10}$$

由於資產報酬有相同的因素負荷量可以當作系統風險的替代項，所以過去的超額報酬可以用來解釋目前資產報酬的變異。類似這種以過去的資料來代替不能

觀察到的因素負荷量之技巧，稱為半自迴歸模型。

半自迴歸模型的詳細估計過程見附錄，從估計過程中得知半自迴歸模型估計法有二個特點：其一是不同於動差法或是最大概似估計法，需要對資產報酬作分配假設，且三階段最小平方法不需要估計一個非線性函數的最大值；另一點是，此估計方法提供一個變異數-共變異數矩陣來調整誤差。

半自迴歸模型以迴歸分析為基本架構，並以代數的轉換建立一個因子估計的替代式，除了使得計算過程相對簡單，在符合直覺的合理性之下，將過去的報酬視作資產定價之中無法觀察到的變數，但唯一美中不足的就是對長期的預測能力較差。

(二) 漸近主成份分析法(Asymptotic Principle Component Analysis)

Connor and Korajczyk (1986)利用 Chamberlain and Rothschild(1983)研究中所提出的資料的變異數矩陣中特徵值所對應的特徵向量可以表示因素負荷的基礎下，發展「漸進主成份分析」方法來建立風險因子的替代項，並檢驗因子影響報酬的顯著性。

假設資產報酬服從因素模型(Factor model)

$$\tilde{r}_t = E(\tilde{r}_t) + B\tilde{f}_t + \tilde{\varepsilon}_t \text{，} \tag{2-3.11}$$

其中 $\tilde{f}_t$ 為影響資產的經濟因素的 k 維向量，B 為資產對因素的敏感度，$\tilde{\varepsilon}_t$ 為個別資產報酬。且假定 $E(\tilde{\varepsilon}_t \mid \tilde{f}_t) = 0$ ，$E(\tilde{f}_t) = 0$ ，$E(\tilde{\varepsilon}_t \tilde{\varepsilon}_t^{'}) = V$ 。

套利定價理論在均衡的假設下，可以表達成：

$$E(\tilde{r}_t) = r_{Ft} e + B_{(n\times k)} \gamma_{t(k\times 1)} \text{，} \tag{2-3.12}$$

其中 r_{Ft} 為無風險報酬，而 γ_t 為風險溢酬，e 為元素都為 1 的向量。結合(2-3.11)式和(2-3.12)可以得到

$$\tilde{r}_t - r_{Ft}e = B_{(n\times k)}(\gamma_{t(k\times 1)} + \tilde{f}_{t(k\times 1)}) + \tilde{\varepsilon}_t \qquad (2\text{-}3.13)$$

在時間區間T將可以觀察到報酬資料的n個資產定為r^n，r_F是一個 T 向量，包含可觀察到的無風險性資產報酬，將資產實際報酬減去無風險資產利率定義成$R^n = r^n{}_{(n\times T)} - e^n{}_{(n\times 1)} r^{'}_{F(1\times T)}$。因此(2-3.13)式可以寫成：

$$R^n = B^n F + \varepsilon^n \quad , \qquad (2\text{-}3.14)$$

其中B^n是B的前n列。

定義Ω^n為超額報酬的交互乘積矩陣，$\Omega^n = \frac{1}{n} R^{n'} R^n$，$G^n$為$\Omega^n$的前$k$個正交化特徵向量，為一$k\times T$矩陣。

根據 Chamberlain and Rothschild (1983)的定理結果如下：

$G^n = L^n F + \phi^n$其中L^n是對所有的資產n是一個非奇異矩陣，且$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \phi^n = 0$。因此可以得知$G^n$是一個合適的替代$F$的矩陣。

在 Connor and Korajczyk (1986)中主成份分析的程序如下：

(1)藉由計算Ω^n的特徵向量G^n來估計因子

(2)進行R^n和G^n的迴歸分析，得到殘差變異數來估計V^n的對角線元素

Connor and Korajczyk (1988)也將此方法作一延伸，說明如下：

根據(2-3.14)式$R^n = B^n F + \varepsilon^n$

假設Σ是實際報酬的共變異數矩陣，得到

$$\Sigma = BB^{'} + V \qquad (2\text{-}3.15)$$

預設V為一對角矩陣

在(2-3.15)式中同乘$V^{-\frac{1}{2}}$得到

$$\Sigma^* = B^* B^{*'} + I \quad ,$$

其中 $B^* = V^{-\frac{1}{2}}B$ 。

把原始的報酬率作一轉換成 $r^* = V^{-\frac{1}{2}}r$ ，而其共變異數矩陣為 $\Sigma^* = V^{-\frac{1}{2}}\Sigma V^{-\frac{1}{2}}$ 。

令 $DIAG(V)$ 為一對角矩陣，其對角線元素為個別資產報酬的共變異數矩陣中的對角線元素，將超額報酬轉換為 $R^* = DIAG(V)^{-1/2}R$ ，並重複原始的步驟，計算 $\Omega^{n^*} = (1/n)R^{n^{*\prime}}R^{n^*}$ 的特徵向量 G^{n^*} 。計算兩種不同的特徵向量所得到的主成份後，發現當樣本資料小時，模型有作轉換的特徵向量會比原始模型的特徵向量使得因子變異能更快速收斂。

國立高雄大學 National University of Kaohsiung

第四節 最佳動態規劃模型

Jones (1974)提出三個合理的動態模型，分別是 The two-armed bandit、The play-the-winner 和 The one-step-ahead，可視為最佳規劃求解的方法，以用來解釋如何作出下一步最好的選擇，使得期望報酬最大化。

Robson (2001) 提供了一個大山雀在不知道成功機率下的柏努力分配選擇的實驗，經由觀察山雀的行為，發現牠會從能否得到食物的過程中，去調整下一次覓食的地點，最後指出山雀有學習的行為，簡單來說，長期而言牠會追求最有利的方式去覓食。在投資市場的角度下，投資人也會透過已有的經驗，在自己能夠承擔的風險之下，學習如何做最自己最有利的決策。

下面說明三種不同的準則之計算方式，模擬三種準則在兩種不同先驗分配時所得到的模擬報酬結果。

(一) The two-armed bandit

Two-armed bandit 為一個選擇的機制，雷同擁有兩個把手的吃角子老虎機器，每一次得到的報酬都是不確定性的，設 X 代表每一次試驗有沒有成功的結果，服從柏努力分配。每一次試驗成功的機率為 p，其中兩個把手獲得一單位報酬的機率分別是 p_1 和 p_2，對應沒有得到任何報酬的機率為 $1-p_1$ 以及 $1-p_2$，服從貝它分配。

$$f(x \mid p) \sim Binomial(1, p)\text{，}\ p_i \sim beta(r_i^{'}, n_i^{'})\text{，}$$

其機率密度函數 $f(p_i) \propto p_i^{r_i^{'}-1}(1-p_i)^{n_i^{'}-r_i^{'}-1}\quad (i=1,2)$，預設總實驗次數 N 次(即拉 N 次把手)，觀察兩個把手分別實驗 n_1 和 n_2 次，並且得到 r_1 和 r_2 個報酬的情況下，事後分配是隨著之前的結果不同而有所變動，改變為

$$p_i \sim beta(r_i^{''} = r_i^{'} + r_i, n_i^{''} = n_i^{'} + n_i)\text{，}$$

(r_1, n_1, r_2, n_2) 是一個四個整數的維度空間，希望歸納出一個選擇的機制使得剩

下可能的實驗中可以得到最大的期望報酬，剩餘實驗次數$(N-n_1-n_2)$時的最大期望報酬用$S(r_1,n_1,r_2,n_2)$來表示，而$S_i(r_1,n_1,r_2,n_2)$代表已經決定下一次試驗要拉哪一個把手時，使得剩餘實驗次數$(N-n_1-n_2)$的期望報酬最大。

直覺上合理的解釋，在設定下一步拉第一個把手時只有兩種可能的情況，分別是成功結果(得到一單位的報酬)和失敗結果(沒有獲得任何報酬)，故在預設下一步選擇第一個把手時剩餘實驗次數中所獲得期望報酬為兩種可能結果乘以對應的機率和。故得到

$$S_1(r_1,n_1,r_2,n_2)=(\frac{r_1''}{n_1''})\{1+S(r_1+1,n_1+1,r_2,n_2)\}+(1-\frac{r_1''}{n_1''})S(r_1,n_1+1,r_2,n_2)\text{，}$$

$$S_2(r_1,n_1,r_2,n_2)=(\frac{r_2''}{n_2''})\{1+S(r_1,n_1,r_2+1,n_2+1)\}+(1-\frac{r_2''}{n_2''})S(r_1,n_1,r_2,n_2+1)\text{。}$$

倘若了解各種可能情況下在剩餘實驗次數中的最大可能報酬，則若無預設下一步要作何種選擇下，可以合理解釋最大的可能報酬發生於預設各種可能情況下的期望報酬，即$S(r_1,n_1,r_2,n_2)=\max_i\{S_i(r_1,n_1,r_2,n_2)\}$。

採用後退(backward)的運算方法，如果$n_1+n_2=N$，表示已經把起先預設的實驗次數完成，故沒有剩餘的期望報酬可言，亦即$S(r_1,n_1,r_2,n_2)=0$。用這樣的計算方式，可以考慮到所有可能的選擇路徑，因此認為它是一個可以用來規劃出最大可能報酬的恰當規則。為了方便了解此機制的運作，用一個簡單的例子來加以說明，詳見附錄。

(二) The play-the-winner

下一次試驗的選擇是根據到目前為止最近一次試驗結果而決定的。簡單來說，如果拉這一個把手失敗了，亦即沒有得到報酬，下一步就換拉另外一個把手。

(三) The one-step-ahead

one-step-ahead 規則在 two-armed bandit 的基本假設下，唯選擇判斷的機制不同。主要根據下一次試驗兩個把手不同的期望報酬來決定要拉哪一個把手。和

two-armed bandit 不同的是，two-armed bandit 考慮的是剩餘的實驗次數中，使其最大期望報酬的選擇，而 one-step-ahead 則只考慮預先一步的期望報酬，即下一步那一個把手的報酬較大就選擇哪一個把手。在這樣的選擇下，因為沒有考慮所有剩下選擇的可能報酬，所以無法保證在實驗結束之後可以得到最大的報酬。

	(1，2) versus (1，2)			(1，2) versus (1，3)		
N	D.P	O.S.A%	P.W%	D.P	O.S.A%	P.W%
2	1.0833	100	100	1	100	100
3	1.6667	100	100	1.5278	100	98.18
4	2.2778	99.97	99.02	2.0556	100	97.30
5	2.8889	99.71	98.46	2.5917	100	96.46
6	3.5083	99.63	97.90	3.1333	99.93	95.75
7	4.1319	99.59	97.40	3.6783	99.92	95.15
8	4.7595	99.55	96.97	4.2233	99.91	94.71
9	5.3879	99.52	96.62	4.7746	99.86	94.27
10	6.0218	99.48	96.25	5.3261	99.84	93.88
11	6.6562	99.45	95.95	5.8788	99.82	93.56
12	7.2924	99.42	95.68	6.4341	99.78	93.25
13	7.9309	99.38	95.43	6.9908	99.76	92.98
14	8.5709	99.35	95.20	7.5481	99.74	92.74
15	9.2115	99.32	94.99	8.1069	99.71	92.51

表格 1 列出模擬三種準則在兩種不同先驗分配時所得到的模擬報酬結果

直覺上可輕易的了解，由於 two-armed bandit 判斷準則考慮了所有選擇組合的可能性，所以預期 two-armed bandit 可以得到最大期望報酬。由表中，可以明確的用模擬數值得知與預期相符合，並發現在同樣的實驗次數下，隨著先驗分配的差距變大，play-the-winner 的解釋百分比遞減，而 one-step-ahead 的解釋百分

比遞增。

國立高雄大學 National University of Kaohsiung

第三章 模型介紹

金融市場在經濟體系中具有舉足輕重的作用。金融體系並非靜止的，而是隨著公眾需求的變化、新技術的發展以及法律與法規的變化而不斷地變化。一直以來金融市場體系進行金融交易的方式從簡單發展到更為複雜。所有投資人必須處理的第一項也是最重要的一項因素變是不確定性，為此財務經濟學家希望建立精密的數量模型來處理不確定性，期望藉由最合適的模型求出完善地報酬和風險的估計值，並根據此估計值進行投資決策。在此目標下，如何描述並衡量風險是首要的課題，本章第一節介紹不同的衡量風險因子的方式。

本研究期望找出一個能反映金融市場中各種因素交互作用的複雜性的模型，但金融體系中交易運作的機制並非可輕易了解，投資人在不同的情況下會有不同的投資決策，第二節介紹不同的模型，期望透過實證分析，期望找出最符合真實情況的運作方式。

第一節 風險因子衡量方式

套利定價理論主要描述報酬和風險之間的關係，報酬大小可由實際數值觀察得知，但風險卻難以用一致的衡量方式獲得。討論投資風險必須從不確定程度大小的風險概念來考慮。在不確定情況下，風險狀況是無法完全預測出來，於是就未來可能發生的損失等預想不到的機會當作是風險的概念，無法很客觀地依靠所期待的數量尺度來表示，因此即使利用計量經濟分析或財務分析等技術，也無法充分發揮其應有功能。實務上，利用統計學上方法把風險程度與以量化，最主要方法是對投資報酬予以風險測度，故許多經濟學家認為風險便是報酬率的離散程度。根據 Keynes (1937)認為投資者若投資於離散程度較大的投資案，因負擔過大的風險成本，所以必須獲得更高的風險溢酬來補償。另一名經濟學家 Marshall (1938)提出報酬的變異係數是表現風險的程度。但也有經濟學家對風險的概念持有不同的看法，Domar and Musgrave (1944)則認為報酬的離散程度不能完全正確地表示風險的大小，其特別注重的是報酬率為負的機率分配情形。

由以上討論，學者們對於風險的概念是眾說紛紜的，即使報酬率機率分配的訊息完整，但在衡量上由於過於計算繁瑣較難理解，因此面對風險無法具體且一致的衡量下，考慮適當的風險衡量方式是重要的。以下討論四種不同的風險衡量方式。

一、直接利用可蒐集的總體經濟變數作為風險因子

美國的資本市場一般公認是一個高度有效率與資訊透明度高的市場，資本市場參與者除了國內之投資參與者外，還有世界不計其數各國家與機構，內部與外部嚴謹的監理制度使得其本國經濟之表現廣泛的影響投資人的投資行為，進而影響其資本市場之表現。在套利定價理論因子模型中要求風險因子必須對股票報酬有廣泛的影響力，特有因子不屬於套利定價理論之風險因子。

總體經濟指標是整體資本市場變化的基本標竿，當投資人預期總體經濟變數將產生變化時，或者實際與預期的經濟狀況具有差異時，資產價格立即受影響，進而影響報酬率的變化。由於總體經濟狀況影響企業獲利情況與股票價格，故認為總體經濟變數的變動可以合理的解釋風險因子的變動，因此用總體經濟變數來做為反映獲得報酬中所承擔的風險因子。

二、利用總體經濟變數並透過資本資產定價理論β的轉換作為風險因子

從資本資產定價理論中說明的是經過需求和供給的動態調整後，當證券市場達成均衡時，在一個已經有效多角化並達成投資效率的投資組合中，個別資本資產的預期報酬率與所承擔的風險之間的關係。簡言之，資本資產定價模型是另一種「風險—報酬」關係的表現。其中β係數是衡量當市場資組合報酬率變化１％ 時，個別資產預期報酬率的變化幅度，幅度愈大代表個別資產對市場投資組報酬率R_m變化的敏感度愈大。在β係數是系統風險衡量指標的基礎下，考慮把觀察到的總體經濟

變數資料乘以對應的β係數，這代表把總體經濟變數視為報酬資料，把當期在市場上觀察到的報酬率透過資本資產定價理論中β係數的換算當作當期市場反映的風險，也意味著期望從市場上的承擔的風險。

三、透過資本資產定價理論α和β的轉換作為風險因子

回顧資本資產定價理論的發展主要可分為兩個大方向。其一是以資本市場理論均衡為理論發展主軸，輔以合理化的市場假設，推導延伸模型，以 Merton(1973)、Breeden(1979)為主要代表；另一派則是透過真實市場的實證研究，找出影響資產報酬的重要因子，隨著此類研究日益增多，出現一些資本資產定價理論無法解釋的現象，例如特殊的投資組合下，讓資本資產定價理論迴歸式中的截距項顯著異於零，Banz(1981)以 1926 年到 1975 年的紐約證券交易所股票實證研究中發現小公司比大公司的年平均報酬高出 19.8%，因此認為較小股本的公司會得到顯著的異常報酬，亦即公司規模(size)對橫斷面股票報酬有顯著的解釋能力，因此我們了解到影響報酬的解釋變數不只有β係數。

基本上投資股票的總風險可分成系統風險和非系統風險。系統風險主要來自大環境的變動，因此考慮不同風險衡量方式中有提出以資本資產定價理論的β做為風險的衡量指標，由於實證研究中出現除了β以外仍有顯著影響報酬的解釋變數，其中α係數與股票市場整體方向無關，代表意義為在任何市場環境中都能獲得的報酬，因此可視為無風險利率，若無風險利率顯著影響證券報酬，可將其視為超額報酬。但在財務領域中，財務學家無法為資本資產定價理論中風險的衡量是否考慮α係數下定論。基本上，主要衡量α係數是否對評估風險具有顯著性，須視總體經濟的政治和國際事件之分析，這是因為股票市場價格的波動，除了受經濟、技術、社會心理的因素影響外，還會受到政治因素的影響。所謂政治因素，指國內外的政治情勢和活動、國家的軍事行為、國家政治經濟政策和法律的公佈或改變等等。這將會影響公司的外部經濟環

境、經營方向、經營成本等方面，從而直接影響股市價格。因此在應用資本資產定價理論輔以選擇套利定價理論的風險因子時，為考慮模型的完整性，本文衡量除了利用β做為衡量風險的方式之外，又考慮加入資本資產定價理論迴歸式中的截距項(α)視為影響報酬的非風險系統部份，期望在實證研究中予以比較並得到更精確的推測。

四、使用過去的資產報酬作為風險因子

在時間序列資料中每一個時點的觀察值都與該時點之前後的觀察值有密切的關係，因此所謂的長期趨勢、季節循環、短期波動即為跨時相關性的表徵。無論是單純統計上的預測或是具有經濟意義的計量模型，自我迴歸模型(Autoregressive Models)是定態時間序列模型中最常使用的一種模型。簡單的說，自我迴歸模型是將時間序列中過去的歷史資料當作解釋變數。

在計量經濟的模型中，自我迴歸模型是一個具有代表性的模型，並且在時間軸上，若假定未來是過去的延伸，則可合理解釋本期報酬和歷史報酬是受到近似同樣的風險環境下，基於這兩個原因，因此用歷史報酬可以合理的視為影響本期風險因素的替代項。

五、透過主成份分析將總體經濟指標線性組合成新的風險因子

假設獲得一組來自同一母體的多變量資料，若當資料中的各個變數之間，存在著錯綜複雜的關係結構，因而無法就表象確切的掌握與解釋確切意義。早年經由 Pearson (1901)提出，而由 Hotelling(1933)加以改良發展出來的主成份分析，除了可以用來概略解釋變數之間的關係，也可以用來降低變數的維度，其基本理念是希望可以找到或證實存在有局部的相對重要變量，透過這些少數變量的性質與自身的變化作為主要的代表，便足以分析並用以解釋整個多變量結果的意義。

針對觀測母群體 p 個多變量的樣本結果：

$$X_{n\times p}=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}$$，其中 $E(\mathrm{X})=\overline{\mathrm{X}}_{1\times \mathrm{P}}$ ，$V(X)=S_{p\times p}$

設法找尋一種線性轉換的方式 k ，使得：

$$y_{n\times 1}=X_{n\times p}k_{p\times 1}$$，其中 $k=\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_p \end{bmatrix}$，

因此 $E(y)=\bar{X}_{1\times p}k_{p\times 1}$ ，$V(y)=k'_{1\times p}S_{p\times p}k_{p\times 1}$ ，

希望能將 X 的變異數 S 或是相關係數 R 充分表達出來，也就是說：$Max_k\lambda=k'S\,k$ 使得 $k'k=1$ 或 $Max_k\lambda=k'R\,k$ 使得 $k'k=1$ 。

主成份分析最大的目標是找到某些重要的關鍵變量的線性組合，可以代表整個多個變量所包含的資訊，倘若變數之間有共線性也可透過主成份分析使得新變數之間互相獨立。本研究利用套利定價理論實證研究中顯著的總體經濟變數作為變數，透過主成份分析的因素負荷量作一線性組合成新的變數，以新變數作為風險因子的衡量方式。

第二節 贏家規則(The play-the-winner)模型

一、 基本模型(贏家規則)

在 Jones(1974)中所提到的贏家規則(The play-the-winner)，假設只有兩個選擇，且每次只會出現二分化的結果，得到一單位報酬或沒有得到一單位報酬。在預設的實驗次數下，第一次選擇承擔可能會得到較大報酬的選項，其後每一次的抉擇取決於上一步的結果。若上一步的結果為成功(得到一單位的報酬)，則繼續選與上一步相同的選項；反之，若失敗，則選取另外一個選項。

運用山雀覓食途徑的概念，將 Jones (1974)的兩個選擇視為不同的風險因素，並探討再不同的時間點下該如何作出使報酬率最大化的策略。本文將 Jones (1974)提出的贏家規則 play-the-winner 選擇機制視為投資策略的準則，應用至金融市場中報酬與風險的關係，並與套利定價模型的實證作一連結，冀望可以更準確的預測未來可能的風險和報酬。

利用蒐集到公司報酬率和透過不同風險衡量方式得到的風險因子，採用統計方法探討解釋變數與反應變數的迴歸分析，其中所得到的參數估計(α、β)在套利定價理論中所代表的財務意義分別是無風險利率和承擔一單位的風險因子會反映報酬上的變化程度。

$$Rc_{it} = Rf_{it} + \beta_{it}^{k} Ri_{t}^{k} + \varepsilon_{it} \text{ ， } k = 1, \ldots, 5 \text{ ，}$$

其中 Rc_{it} 為第 i 資產第 t 時間的資產報酬率，Rf_{it} 為第 i 資產第 t 時間的無風險利率，β_{it}^{k} 代表第 i 資產第 t 時間對應的第 k 個風險因子之風險溢酬，Ri_{t}^{k} 為第 t 時間第 k 個風險因子觀察值，ε_{it} 為第 i 資產第 t 時間的誤差項。

贏家規則的基本理念就是在贏的狀況下就維持相同的選擇，若輸就換選擇的想法。因在贏家規則相關的研究中，並無明確訂定贏的定義，但為應用贏家規則至套利定價理論，定義『贏』是一個首要的事情。在本文中，定義若當期的實質報酬率大於估計報酬率即為贏的定義。

現實情況中，公司報酬率應該同時受到多種經濟因素或其他影響報酬因素的影響，但在這複雜的報酬和風險的關係中，可以合理的簡化為每一個時期受到其中一個風險因子的影響是最大的，因此首先假設每一期間只有一個風險因子影響報酬率。

透過贏家規則，若實際報酬率大於估計報酬率，本期的風險因子選項則與上一期的風險因子相同，但在輸的情況下，則必須選擇除了上一期因子以外的風險因子。由於本文假設市場上只有五個風險因子，且每一期只會有一個風險因子影響報酬率，不同於 Jones(1974)文獻中只有兩個選擇，故須在四個風險因子中作選擇，此處選擇四個風險因子中擬合值與實際報酬率差距平方最小的風險因子。

在實際社會中，報酬和風險的關係是錯綜複雜的，應用贏家規則上有許多與現實社會脫節的假設，每一期間只有一個風險因子影響資產報酬的假設是為理論的便利性所提出的簡化假設，本研究採取逐漸放寬假設的方式，盡可能與現實社會的模式越接近。因此，把每期間可允許選擇的風險個數限制依序放寬為至多可接受兩個到五個風險因子，並調整若同時承擔兩個風險以上，還需要考慮任兩個風險因子彼此之間交互作用的對報酬率的影響。在此定義任兩個風險的交互作用為把風險因子報酬相乘得到的結果。舉同時至多允許兩個風險因子為例，除了需要考慮五個個別風險因子對報酬率的影響，還須考量同時有兩個風險因子影響報酬率的可能，且在迴歸模型中還加入兩個風險因子相乘為交互作用的考慮項。用一般式來表達模型為

$$Rc_{it} = Rf_{it} + \beta_{it}^{m} Ri_{t}^{m} + \beta_{it}^{n} Ri_{t}^{n} + \beta_{it}^{mn} Ri_{t}^{m} Ri_{t}^{n} + \varepsilon_{it} \quad ， m, n \in \{1,...,5\}, m \neq n \ ，$$

其中 Rc_{it} 是第 i 資產第 t 時間的資產報酬率，Rf_{it} 為第 i 資產第 t 時間的無風險利率，而 $\beta_{it}^{m}, \beta_{it}^{n}$ 是第 i 資產第 t 時間對應的影響報酬的兩個風險因子的風險溢酬，ε_{it} 是第 i 資產第 t 時間的誤差項。

二、 延伸模型(乘勝追擊規則)

一般來說，投資人是不喜歡風險的，但若要更精確一點，我們應該說投資人是趨避風險的。風險趨避投資者(risk-averse investor)不會主動樂意去承擔風險，除非預期承擔風險後會有相當的補償，否則不願意承受任何程度的風險。所以須釐清的是並非承擔風險就是不理性的行為；即使是很大的風險，只要預期能夠收到相當的補償，投資人便會接受。

根據上述投資人可能的投資直覺，本研究將贏家規則的概念作些微的調整。想法起源於當實質報酬率比用過去經驗所得到的期望報酬率大時，代表投資這一項風險因子得到的回饋比預期還大，投資人的心態考量是否可能承擔另外的風險因子可以使得估計的期望報酬率增加並和實質報酬更為接近。因此，調整判斷準則為若贏(實質報酬率大於期望報酬率)，則考慮所有可能選項中使得期望報酬率大於前一期的風險選項的期望估計值，再從選擇中找出與實質報酬率差距平方最小的為當期風險因子的選擇。

在基本贏家規則模型中定義實際報酬率比根據過去經驗選取的本期風險因子所估計期望報酬率大，即採用與上一步相同的風險因子選項。在這樣的定義下，實證結果中產生某些期間的並不是選擇到最接近真實風險因子的選項，也代表用過去經驗所得到的參數估計值對當期的預測能力並不妥當，因此本文考慮調整『贏』的定義，期望能藉由不同的定義下，找出不同時間下使得最接近真實報酬率的風險因子選擇路徑。

1	$Rc_{it} = Rf_{it} + \beta_{it}^{k} Ri_{t}^{k} + \varepsilon_{it}$	$k = 1,\ldots,5$
2	$Rc_{it} = Rf_{it} + \beta_{it}^{m} Ri_{t}^{m} + \beta_{it}^{n} Ri_{t}^{n}$ $+\beta_{it}^{mn} x_{t}^{m} x_{t}^{n}$ $+\varepsilon_{it}$	$m,n \in \{1,\ldots,5\}$ $m \neq n$
3	$Rc_{it} = Rf_{it}$ $+\beta_{it}^{p} Ri_{t}^{p} + \beta_{it}^{q} Ri_{t}^{q} + \beta_{it}^{r} Ri_{t}^{r}$ $+\beta_{it}^{pq} Ri_{t}^{p} Ri_{t}^{q} + \beta_{it}^{qr} Ri_{t}^{q} Ri_{t}^{r} + \beta_{it}^{pr} Ri_{t}^{p} Ri_{t}^{r}$ $+\varepsilon_{it}$	$p,q,r = \{1,\ldots,5\}$ $p \neq q \neq r$
4	$Rc_{it} = Rf_{it}$ $+\beta_{it}^{s} Ri_{t}^{s} + \beta_{it}^{u} Ri_{t}^{u} + \beta_{it}^{v} Ri_{t}^{v} + \beta_{it}^{w} Ri_{t}^{w}$ $+\beta_{it}^{su} Ri_{t}^{s} Ri_{t}^{u} + \beta_{it}^{sv} Ri_{t}^{s} Ri_{t}^{v} + \beta_{it}^{sw} Ri_{t}^{s} Ri_{t}^{w} + \beta_{it}^{uv} Ri_{t}^{u} Ri_{t}^{v} + \beta_{it}^{uw} Ri_{t}^{u} Ri_{t}^{w} + \beta_{it}^{vw} Ri_{t}^{v} Ri_{t}^{w}$ $+\varepsilon_{it}$	$s,u,v,w = \{1,\ldots,5\}$ $s \neq u \neq v \neq w$
5	$Rc_{it} = Rf_{it}$ $+\beta_{it}^{c} Ri_{t}^{c} + \beta_{it}^{d} Ri_{t}^{d} + \beta_{it}^{e} Ri_{t}^{e} + \beta_{it}^{f} Ri_{t}^{f} + \beta_{it}^{g} Ri_{t}^{g}$ $+\beta_{it}^{cd} Ri_{t}^{c} Ri_{t}^{d} + \beta_{it}^{ce} Ri_{t}^{c} Ri_{t}^{e} + \beta_{it}^{cf} Ri_{t}^{c} Ri_{t}^{f} + \beta_{it}^{cg} Ri_{t}^{c} Ri_{t}^{g} + \beta_{it}^{de} Ri_{t}^{d} Ri_{t}^{e} + \beta_{it}^{df} Ri_{t}^{d} Ri_{t}^{f} + \beta_{it}^{dg} Ri_{t}^{d} Ri_{t}^{g} + \beta_{it}^{ef} Ri_{t}^{e} Ri_{t}^{f} + \beta_{it}^{eg} Ri_{t}^{e} Ri_{t}^{g} + \beta_{it}^{fg} Ri_{t}^{f} Ri_{t}^{g}$ $+\varepsilon_{it}$	$c,d,e,f,g = \{1,\ldots,5\}$ $c \neq d \neq e \neq f \neq g$

表格 2 逐漸放寬風險因子個數的五個模型

第三節 多選項吃角子老虎機器(The multi-armed bandit)模型

The two-armed bandit 是由 Jones (1974)所提出，這是一個最簡化的投資環境中之最佳決策模型，可以提供投資人在不同時期，面對不同獲得報酬的結果，決策如何做最佳投資。

由於投資人可在種類繁多的證券中作選擇，以達到讓自己的預期報酬達到最大的目標，為求較一般化的結果，本研究將模型放寬為 The multi-armed bandit，考慮五個可承擔的選項，應用 The two-armed bandit 的做法，試著找出與真實情況最接近的可能承擔之結果。下面說明如何運用 The multi-armed bandit。

首先，在 The two-armed bandit 中，報酬產生的過程是離散化的，延伸 The two-armed bandit 至 The multi-armed bandit，最重要的第一件事情是要將觀察到的報酬資料離散化。在本研究中，考慮將報酬離散化成二項分配的報酬產生過程(binomial process)。二項過程是一個具有 n 次獨立實驗的隨機計數系統，每一次成功的機率為 p，s 為在 n 次實驗中成功的次數。亦即，

$$s \sim Bin(n, p)\text{，}$$

離散化的目的在於，能更容易將 The multi-armed bandit 方法運用連結到實際的市場資料。由於本文考慮的是動態模型，亦即隨著時間不同，每一期間產生報酬的分配也不同，因此運用以下數理統計的理論，可以求得：

(1) 已知 n 次實驗中成功 s 次，估計成功機率 p。

雖然在傳統的數理理論中，有提供不少的方法來進行估計，但因 The two-armed bandit 是依據貝氏理論的架構，因此考慮以貝氏理論的估計方法以估計成功機率 p。簡單描述如下：假設成功機率的先驗分配為貝它分配，參數為 a 和 b。

$$p \sim beta(a,b)\text{，}$$

在尚未有任何資料之前，即對參數沒有任何資訊下，因為基於對參數沒

有任何預設資訊的公平原則下，可以合理假設成功機率 p 服從均勻分配 $U(0,1)$。在若我們觀察到 n 次實驗中成功 s 次，貝氏理論提供一個簡潔的結果。亦即成功機率的後驗分配為服從 beta 分配，其參數為 $s+a$ 和 $n-s+b$。

$$p \sim beta(s+a, n-s+b)\text{，}$$

一個適當的先驗分配是重要的，我們希望能透過不斷的疊代的估計過程，能將每一期產生報酬的分配描述得更為適切。因為本研究是採取動態模型，若將時間是為不連續的資料，我們可以合理的將前期所得到成功機率 p 的後驗分配，視為本期成功機率 p 的先驗分配。我們希望藉由這樣的疊代過程，能漸進的將每一期的參數估計得更符合現實產生報酬的成功機率之分配。

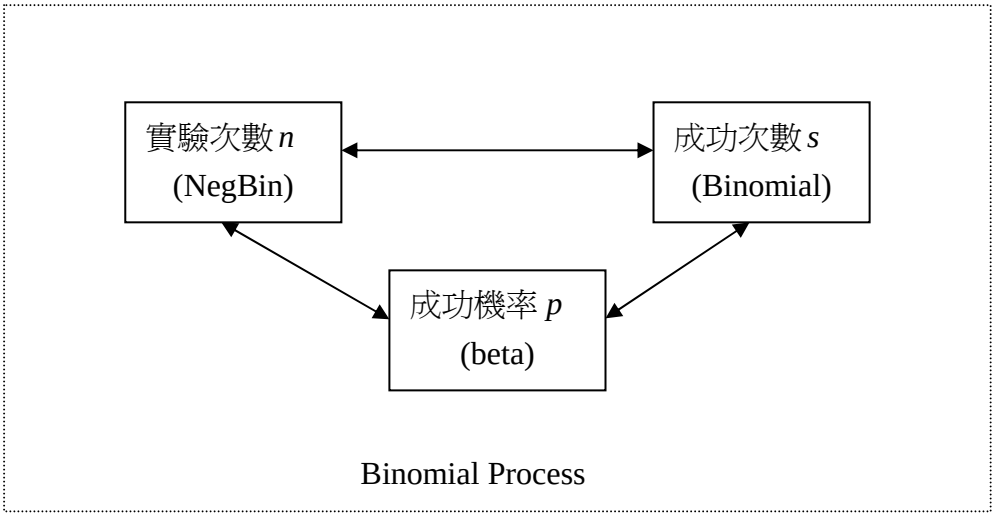
(2) 已觀察到成功次數為 s，且已知成功機率 p，估計總實驗次數。

在觀察到 s 次成功後，我們對於總實驗次數的估計有興趣，亦即，在成功機率為 p 時，實驗多少次才能夠觀察到 s 次成功。因此我們需要一個分配可以用來描述不確定的實驗次數。在理論上，提供了一個良好的估計值，若在不確定最後一次是否成功的情況下，總實驗次數可以用負二項分配(negative binomial distribution)來描述。負二項分配的意義再求取觀察到 s 次成功的情況下，所需要的失敗次數。經由理論推導後，在確定最後一次試行是成功的情況下，我們得知總實驗次數的分配服從負二項分配，表達成 $n \sim NegBin(s, p)+s$。若不確定第 s 次試行是否成功，則總實驗次數的分配可以表達成 $n \sim NegBin(s+1, p)+s$。

在實證研究中，由於將報酬資料離散化成得到幾個報酬，而非得到或不得到報酬，因此很難定義第 s 次成功是成功或是失敗，故在離散化的疊代過程中，採取總實驗次數的分配為 $NegBin(s+1, p)+s$。

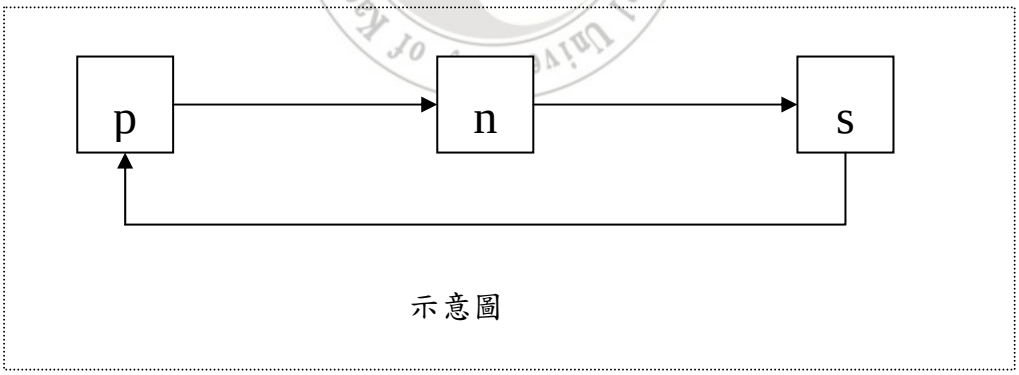
圖 3-1 為 Binomial Process 的關聯圖，我們可以輕易的從圖形中知

道，Binomial Process 具有三個參數(n、p 和 s)，在貝氏理論的基礎下，得知任兩個參數，即可求得第三個參數。



圖表 1 Binomial Process 關聯圖

利用當期所有公司的中間 95%報酬資料，預設第一期的成功機率為均勻分配 $U(0,1)$，依序逐期將每一期間的報酬分配求出，而在這過程中，公司報酬資料和市場總體經濟變數的資料也得到離散化的數值。以一簡單圖示如下：



在實證中，由於估計出來的每一期實驗次數逐漸增大，這將會增加後續 The two-armed bandit 的後退(backward)計算方式的複雜度。因此本研究又考慮，先考慮固定總實驗次數為 2，依序逐漸增加實驗次數，以漸進逼近的方式找出最合適的總實驗次數。

在得到離散化之後，運用 The two-armed bandit 並延伸為 The multi-armed bandit，並進行 backward 的演算方式，以下用遞迴的關聯式(recurrence relations)

求得每一期的估計報酬。

設 $D(r_1,n_1,r_2,n_2,r_3,n_3,r_4,n_4,r_5,n_5)$ 是最接近當期真實報酬的報酬結果，而 $D_i(r_1,n_1,r_2,n_2,r_3,n_3,r_4,n_4,r_5,n_5), i=1,\ldots 5$ 代表如果下一步拉第 i 個選項的期望報酬，因此可以得知

$$D(r_1,n_1,r_2,n_2,r_3,n_3,r_4,n_4,r_5,n_5)=\min\left[\left|D_1-R,D_2-R,D_3-R,D_4-R,D_5-R\right|\right],$$

其中

$$\begin{aligned}D_1(r_1,n_1,r_2,n_2,r_3,n_3,r_4,n_4,r_5,n_5)&=\hat{p}_1\left[1+D(r_1+1,n_1+1,r_2,n_2,r_3,n_3,r_4,n_4,r_5,n_5)\right]\\&\quad+(1-\hat{p}_1)\left[D(r_1,n_1+1,r_2,n_2,r_3,n_3,r_4,n_4,r_5,n_5)\right],\end{aligned}$$

而 R 表示當期的真實報酬值。

國立高雄大學 National University of Kaohsiung

第四章 實證研究和討論

本實證的主要目的在探討在 The multi-armed bandit 和 The play-the-winner 模型概念下，結合套利定價理論進行實證研究，決定美國製造業證券每期的風險因子，形成一個路徑，藉此路徑作樣本外資料的預測參考。

第一節　資料來源與變數定義

一、 研究期間

樣本研究期間為西元 1987 年 7 月到西元 2007 年 6 月為止的時間序列資料，資料頻率使用月資料，全期間資料長度共兩百四十期的樣本數，在樣本內配適並建立模型後，以西元 2007 年 7 月至 2008 年 10 月作為樣本外預測區間。

二、 研究對象

以全球企業與金融證券資料庫 Mergent Online，選取 S&P 500 中製造業的證券(北美洲產業分類系統為 NAICS 代碼為 31 到 33)為樣本，共有 616 間公司。過去探討股市的相關資料中，發現證券價格與總體經濟變數皆為非穩定型的數列，且有高度相關的性質，若直接分析，會產生高度相關的假象，此結果並不合理。因此大部分探討股市的研究，皆以股價變動率(報酬率)來作相關分析。綜合上述，在變數的處理上，本研究將採用變數的統計資料作自然對數轉換，然後再做一階差分，即以資料庫 Mergent Online 所提供的股價收盤資料轉換成變動率(報酬率)資料的方式進行變數分析、研究。

定義報酬率計算方式：$\mathrm{R}_t = \log_e \left[P_t / P_{t-1} \right]$

三、 變數來源

參考第二章文獻回顧中的所提及的影響報酬的風險因子，考量不同的經濟意義下，避免選取彼此之間相關性過高的總體經濟變數，在面對變數資料收集不易的情況下，我們選取五個總體經濟變數分別為工業生產指數、原油價格指標、利率期限結構變化、風險溢酬變化和史坦普股價指數。表格 3 將資料來源和資料性質以表格方式列出。

符號	變數	資料來源	資料性質
IP	工業生產指數	美國聯邦準備銀行 (Federal Reserve Board)	月資料
PPI	生產者物價指數	美國勞工局統計處 (Bureau of Labor Statistics)	月資料
LGB	長期政府公債 (10 年)	美國聯邦準備銀行 (Federal Reserve Board)	月資料
TB	短期政府公債 (3 月)	美國聯邦準備銀行 (Federal Reserve Board)	月資料
Baa	Moody 評比為 Baa 企業債	美國聯邦準備銀行 (Federal Reserve Board)	月資料
S&P500	史坦普股價指數	奇摩雅虎-財經	月資料

表格 3 五個總體經濟變數之資料來源

將收集到的原始變數資料，作一簡易的代數轉換，作為影響資產報酬的風險因子。表格 4 為有關變數的處理過程，以表格表示如下：

符號	變數	計算方式
MP	工業生產指數成長率	$\log_e\left[IP(t)/IP(t-1)\right]$
OI	原油價格指標	$\log_e[PPI(t)/PPI(t-1)]$
UTS	利率期限結構變化	LGB(t)-TB(t-1)
UPR	風險溢酬變化	Baa(t)-LGB(t)
S&P500	史坦普股價指數	$\log_e\left[S\&P500(t)/S\&P500(t-1)\right]$

表格 4 五個總體經濟變數之計算方式

本文主要以套利定價理論為研究主軸，希望歸納統整出報酬和風險之間的關係，故期望選取的總體經濟變數可以對應到金融市場中的某一特定風險種類。以下分別對五個總體經濟變數作個別解釋。

(一) 工業生產指數成長率→產業風險

所謂產業風險是指企業由於受到某些產業共同因素的影響，致其投資報酬的變動所產生的風險。由於本文的研究對象為製造業的證券，而工業生產指數象徵一國的產業生產概況，故將工業生產指數視為製造業證券在市場中所受到的產業風險。

(二) 原油價格指標→購買力風險

每當油價有所變動，股市總會受到影響，可見得油價變動問題對於股價影響的重要性，本文中藉由生產者物價指數的變化率作為原油價格的指標，油價上漲可視為原料的價格上漲，將造成供給面的成本推動，進而產生通貨膨脹，消費者會因實質所得降低而減少消費。而所謂購買力風險是由於通貨膨脹的因素，使得保有財貨或投資財富所產生購買力減少的機會，購買力風險儘管是普遍存在的，但大多數研究者很少納入報酬率的結構中，這是因為投資者關心報酬率的確定性與安全性遠較購買力為強，本文為考慮廣泛性的影響報酬風險因子，故納入這變數。

(三) 利率期限結構變化→利率風險

利率風險乃指市場利率水準發生波動，導致報酬的不確定變動，所產生的風險。大致上，當利率上升，證券的投資價值都將受影響，唯所受影響的程度，依證券性質的不同有異。利率期限結構變化是衡量不同證券到期日的變數，到期日長短與債券價值有關，證券的到期日越長，利率變化所引起的價格變化也越大，因此利率風險越大。

(四) 風險溢酬變化→違約風險

債券無法依據債務契約書所規定來償還本金和利息的可能性，稱之違約風險。慕迪(Moody’s)有針對個別債券發行的違約風險作投資等級的評等。證券品級主要決定於財務風險，財務風險越小者品級越高，但品級越高的證券所受到的利率風險反而較大。本文中風險溢酬變化是利用不同證券的品級的差距作為衡量標準，也透過風險溢酬的變化作為衡量違約風

險的指標。

(五) 史坦普股價指數→市場風險

市場風險是起因於整體市場(即整個股票市場)的價格波動所導致的報酬變動或遭受到損失的機會。雖然它主要影響普通股，但所有的證券都暴露在市場風險之下，可想而知，市場風險的影響層面是廣泛性的，而史坦普股價指數能反映整體選樣股票價格的走勢和移動程度，故用史坦普股價指數作為市場風險的代表。

雖本文將各個總體經濟變數分別用不同的風險類別加以區分，但事實上，各風險因素間的作用是交互的、整體的，因此當分析風險時應通盤加以了解。

國立高雄大學 National University of Kaohsiung

第二節　敘述統計分析

表格 5 為五個總體經濟變數的敘述統計，從表 5 可知，最大值和最小值都發生在史坦普股價指數中。

	MP	OI	UTS	UPR	S&P500
觀察個數	240	240	240	240	240
全距	0.03824	0.016956	0.0506	0.025	0.35122
最小值	-0.017454	-0.007257	-0.0112	0.0129	-0.24543
最大值	0.020786	0.009698	0.0394	0.0379	0.10579
平均數	0.002256	-0.000245	0.015725	0.020295	0.00666
標準差	0.005243	0.002007	0.012415	0.005029	0.04285
變異數	0.0000275	0.00000403	0.000154	0.0000253	0.00184
偏態	-0.112	0.284	0.026	1.116	-1.294
峰態	0.845	3.578	-1.205	0.802	5.172

表格 5 五個總體經濟變數報酬之敘述統計數值

第三節　相關係數分析

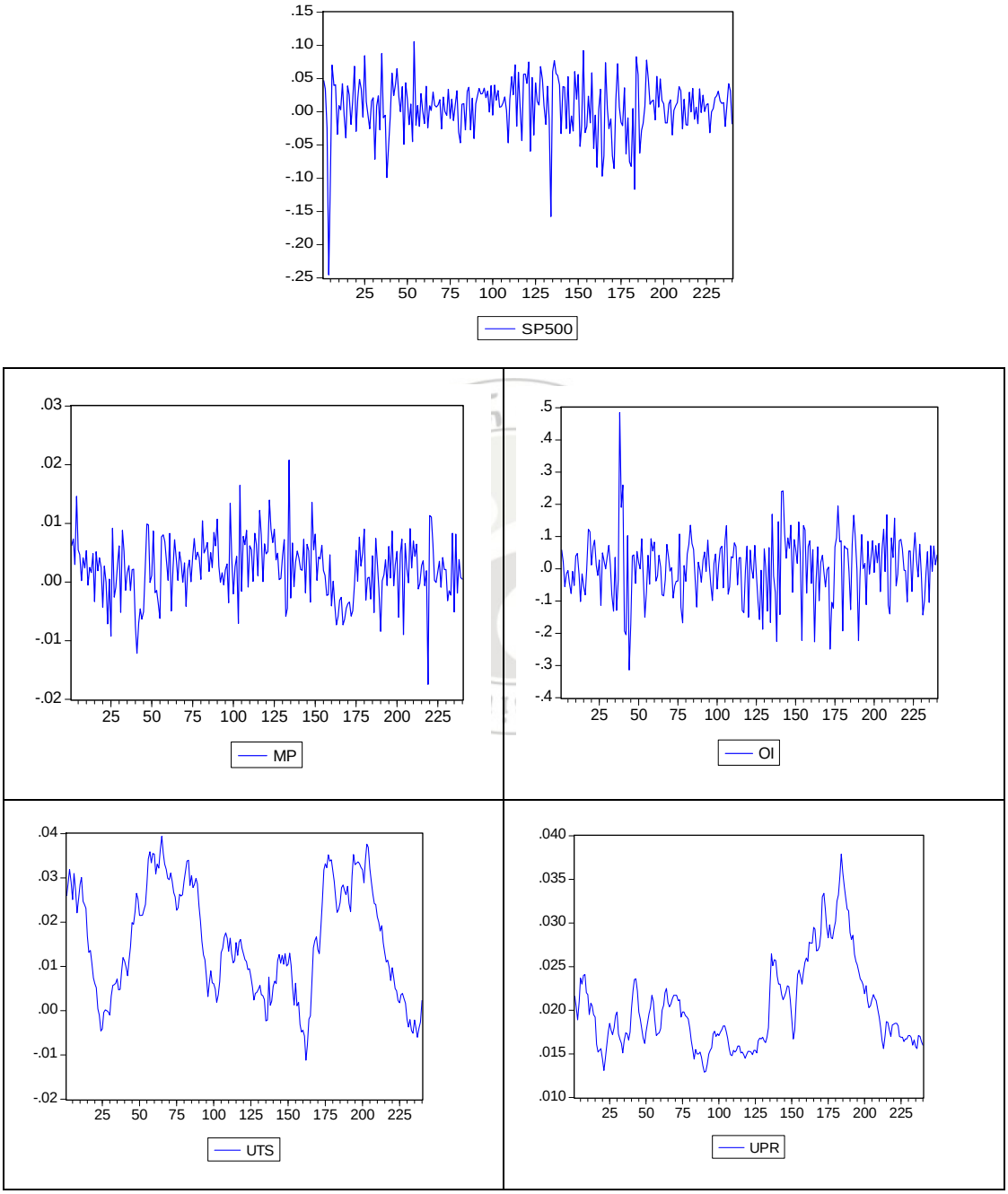
利用 Pearson 相關係數公式，對 1987 年~2007 年的實證研究期間月資料，求出工業生產指數成長率、非預期通貨膨脹率、利率期限結構變化、風險溢酬變化、史坦普股價指數之間的相關係數。

	MP	OI	UTS	UPR	S&P500
	1987~7 至 2007~6				
MP	1	-0.091	0.161	-0.246	-0.155
OI	-0.091	1	-0.053	-0.108	-0.119
UTS	0.161*	-0.053	1	0.237	-0.086
UPR	-0.246**	-0.108	0.237	1	-0.106
S&P500	-0.155*	-0.119	-0.086	-0.106	1

表格 6 五個總體經濟變數之相關係數分析表

從表格 6 可得知，史坦普股價指數和其餘四個變數皆呈負相關，非預期通貨膨脹也和其餘四個變數皆呈現負相關。五個變數之間的彼此相關係數並不大，整體來看應無共線性的現象。

圖表 2 為本研究所使用資料之時間序列圖，其圖形如下



圖表 2 五個總體經濟變數的時間序列趨勢圖

(1987 年 7 月~2007 年 6 月)

第四節 The play-the-winner 實證結果

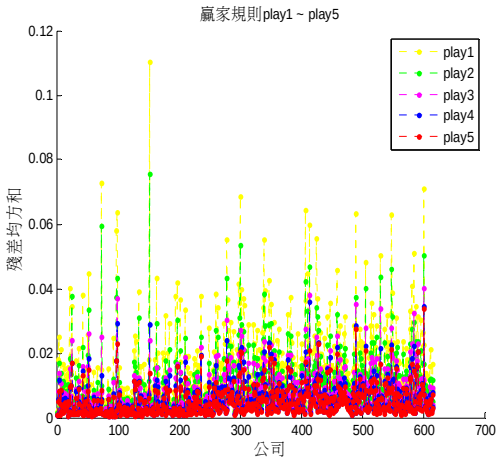
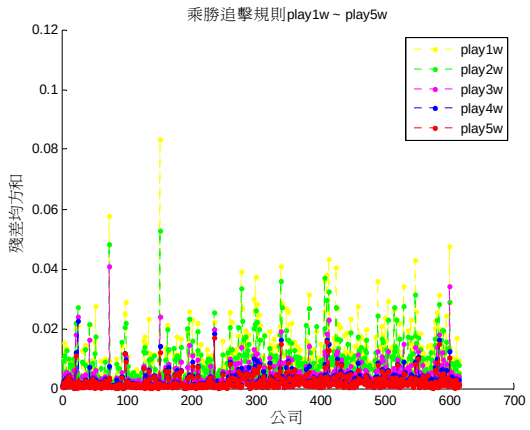
藉由選取 S&P 500 中製造業的證券，採用不同風險衡量標準下，計算求得的五個風險因子，冀望可將每一個證券在不同時期中，所承擔的風險因子用路徑表現來呈現，並計算在不同方法中不同時期的殘差值。

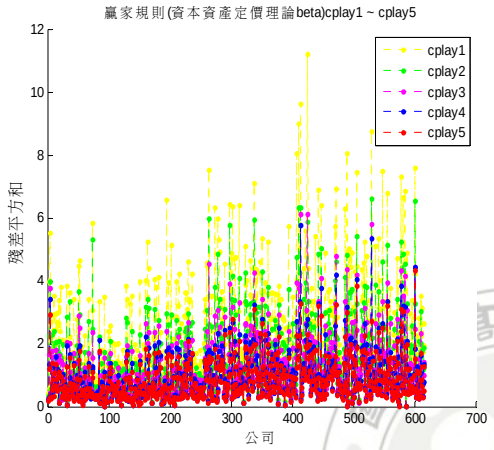
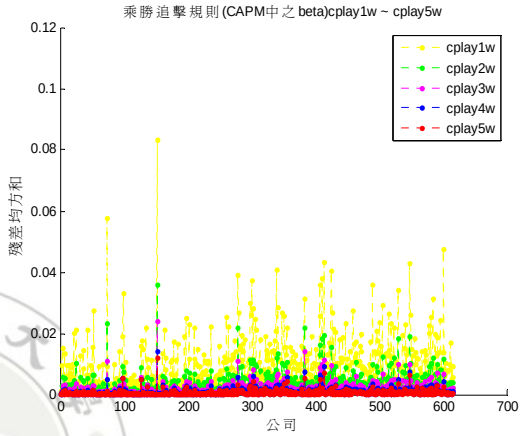
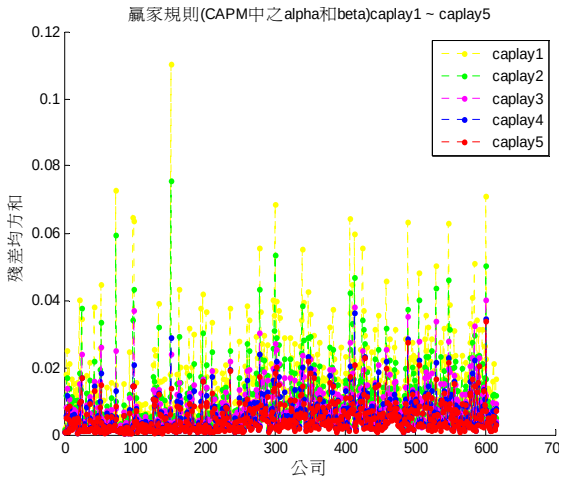
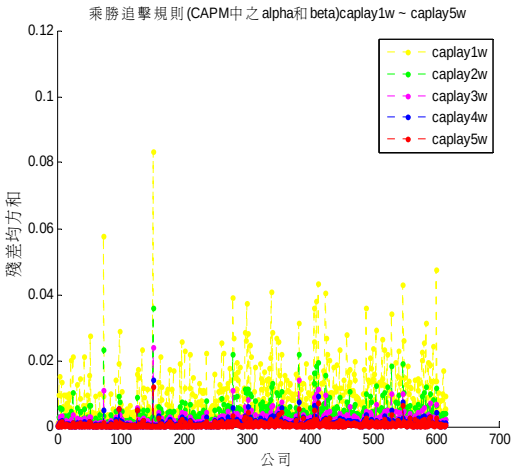
本研究採取動態的模型配適方法，亦即並非將所有期間資料視為同一筆資料，而是考慮以每 20 期作為一個區間用，以建立每一段區間下一步的模型，期望將模型配適的更貼切。描述作法如下：

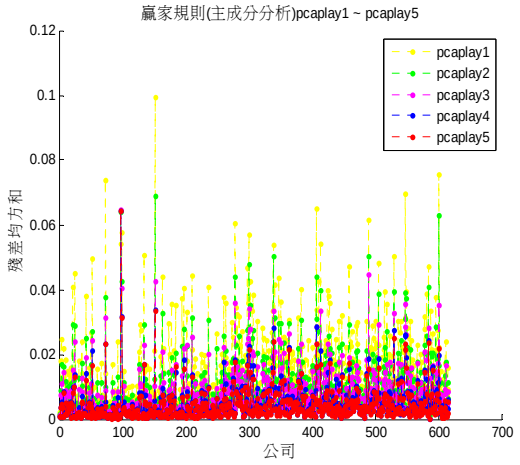
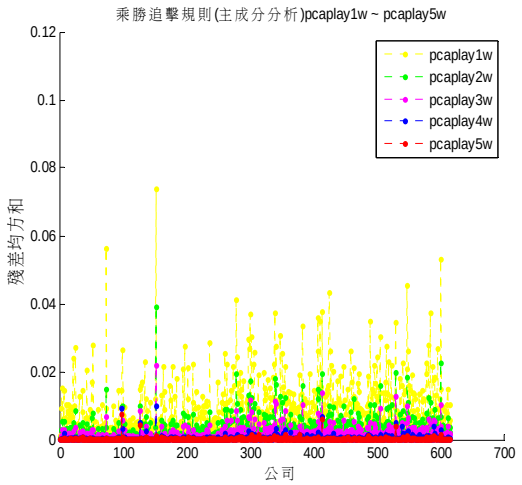
在 The play-the-winner 概念下，首先本文利用每個資產有完整報酬資料的前 20 期，和風險報酬因子作一迴歸分析，得到的參數α、β，其中β的意義為承擔一單位的風險反應在資產報酬上的變化。在決定第一步的路徑時，利用β係數，考慮所有本期的風險因子在過去的經驗中所反映出來的報酬值，以求得此值和本期的真實資產報酬的差距之平方，而所有這些差距平方的最小可能發生的風險因子即為此期路徑的選擇。而在第一期路徑之後的第t期路徑選擇，則依據下列準則，若第t期的真實資產報酬比第t期風險報酬因子代入前一期($t-1$期)的路徑選擇的參數得到的擬合值 (fitted value)，此擬合值意義代表第t期風險報酬因子在過去經驗中可能會得到的報酬，若真實資產報酬大於或等於此擬合值，表示真實的報酬比過去經驗預期的報酬來的高，這時第t期的路徑依舊選擇和第$t-1$期一樣的風險因子。反之，若預期報酬大於真實資產報酬，則在所有可能中排除上一步的選擇，在剩下的可能風險報酬選擇中選擇與資產真實報酬差距平方最小的風險因子作為路徑的選擇。

由於在複雜的市場環境中，每一個時期不一定只有承擔一個風險，因此在上述的準則下，分成五種不同的模型來作不同資產不同時期路徑的決定，分別是每個期間至多允許承擔一個、二個、三個、四個、五個風險。在本文中，利用贏家規則延伸出另外一個新模型-乘勝追擊模型。在此一節，我們主要想要探討蒐集到之製造業企業，在兩個模型下，利用不同的風險因子衡量方式，比較其差異性。在附錄有以一簡單符號代表各個不同的模型。

圖表 3.1 至圖表 3.8 中，X 軸表示的是每一家公司，Y 軸表示每間公司每一期的殘差平方和。圖形中，顏色皆以黃、綠、粉紅、藍、紅依序表示逐漸放寬的可同時承擔的風險個數為一個至五個，將蒐集到的總體經濟變數藉由不同風險衡量方式的轉換，有直接將蒐集到的總體因子視作風險變數、利用資本資產定價理論的 β 係數作為報酬轉換風險的衡量、或考慮結合資本資產定價理論中 α 和 β 係數作為報酬轉換風險的依據、或者透過主成份分析得到個別的因素負荷量，並以線性組合的方式代換成新的變數，在兩種模型贏家規則和乘勝追擊模型下，計算每家公司每一期間的殘差平方和。在迴歸分析中，隨著解釋變數的增多，理論上殘差平方和會減小，本文和迴歸分析最大的不同在於傳統迴歸分析是靜態的模型，而 play-the-winner 是動態的模型，但因為我們在執行 play-the-winner 實證研究過程中是採用選取與真實報酬率最接近的風險選項，因此依然預期每間公司的殘差平方和會隨著風險變數的逐漸放寬增多而減小。經過實證研究後，可以從圖中明顯得知，隨著逐漸放寬可同時承擔的風險個數，使得每一家公司的殘差平方和都有逐漸減小的趨勢，與我們的預期相符合。

圖表 3.1 贏家規則 play1~play5 風險：總體經濟變數	圖表 3.2 乘勝追擊規則 play1w~play5w 風險：總體經濟變數
	

圖表 3.3 贏家規則 cplay1~cplay5 風險：透過 CAPM 中 beta 的轉換	圖表 3.4 乘勝追擊規則 cplay1w~cplay5w 風險：透過 CAPM 中 beta 的轉換
	
圖表 3.5 贏家規則 caplay1~caplay5 風險：透過 CAPM 中 alpha,beta 的轉換	圖表 3.6 乘勝追擊規則 caplay1w~caplay5w 風險：透過 CAPM 中 alpha,beta 的轉換
	

圖表 3.7 贏家規則 playpca1~playpca5 風險：透過主成份分析的轉換	圖表 3.8 乘勝追擊規則 playpca1w~playpca5w 風險：透過主成份分析的轉換
	

圖表 3 不同模型下之整體比較圖形

我們對於這八個模型中是否每一間公司隨著風險個數的逐漸放寬，殘差平方和確實遞減的效果感興趣。

616 間	play	playw	cplay	cplayw	caplay	caplayw	playpca	playpcaw
遞減	572	516	522	615	573	615	534	603

表格 7 八個模型隨著風險個數放寬遞減的公司家數

表格 7 是 616 間公司在八個模型中，隨著風險變數逐漸放寬，有確實遞減的公司家數，就贏家規則模型下，直接利用總體經濟變數作為風險因子的模型(符號：play)來看，616 間公司中有 572(93%)間公司有隨著風險個數的放寬，有遞減的效果。試探討為何沒有全部的公司皆具有遞減的效果，表格 8 舉沒有遞減效果的第 7 間公司(AK Steel Holding Corp.)為例，列出第 116 期至第 120 的殘差和對應選到的風險因子選項，我們發現在第 120 期，模型 play4 的殘差比模型 play5 來得小，探究其原因為在贏家規則的每一步決策下，只要贏就維持與前一期相同的風險選項，又因為本研究 The play-the-winner 採取的是動態的模型，若持續多

期的選擇相同的選項，由於報酬率逐漸些微的變動，並不能保證在逐漸放寬風險因素的情況下，每一期都會使得殘差變小。

Company7	**Play4 residual (path)**	**Play5 residual (path)**
116	0.0288	0.0288
117	-0.0282 (1234)	-0.0179 (12345)
118	0.0658 (1234)	0.0552 (12345)
119	0.0543 (1234)	0.0234 (12345)
120	0.0234 (1234)	0.0317 (12345)

表格 8 第 7 間公司在模型 play4 和模型 play5 下的比較

探討其他模型沒有逐漸遞減的原因，理由同模型 play(直接利用總體經濟變數作為風險因子)，皆由於在動態的模型下，隨著真實報酬率的不斷小幅度的變動，在持續維持同樣的風險選項的情況下，會出現某幾期有異常的現象，但因為模型設計中，當真實報酬小於估計報酬，則在排除前一期風險選項中去選擇與真實報酬最接近的風險選項，亦即，隨後不論是贏家規則或是乘勝追擊皆會有機會選到與真實報酬最接近的選項。

另外，模型 cplayw 和模型 caplayw 中，唯一沒有完全遞減的是第 489 家公司(Neenah Paper Inc)，根據表格 9，我們可以得知，贏家規則和乘勝追擊模型的殘差平方和的差距為 0.0001，差距並不大，以整體而言，我們可以說在乘勝追擊模型下，透過資本資產定價模型的 β 係數或者是加上 α 係數作報酬轉換風險的衡量時，在允許風險個數逐漸放寬的情況下，可以保證殘差平方和會確實的遞減。

模型	**Cplay4w**	**Cplay5w**
Company489	0.0075478	0.00765149
模型	**Caplay4w**	**Caplay5w**
Company489	0.0075358	0.00763549

表格 9 第 489 間公司在模型 cplayw 和 caplayw 的殘差平方和比較表

後續，本文對於在不同的風險衡量下，利用乘勝追擊規則相較於贏家規則的殘差平方和是否有顯著的減小。先探討直接利用總體經濟變數風險衡量下，允許同時承擔不同的風險個數下，乘勝追擊和贏家規則的殘差平方和。圖表 4 中，X

軸是公司，而Y軸是殘差平方和，其中圖表 4.1 至 4.5 表示逐漸允許放寬的風險個數。圖表 4 的五的圖形中，皆以綠色和紅色分別表示贏家規則和乘勝追擊模型下各間公司的殘差平方和。我們預期在五個不同允許風險個數的模型下，乘勝追擊的殘差平方和會小於利用贏家規則模型所得到的殘差平方和。會有這樣的預期，起源於我們想找到比贏家規則所承擔的風險更為貼近反應實際狀況的風險選項，評估投資人的心態是否考量可能承擔另外的風險因子可以使得估計的期望報酬率增加並和實質報酬更為接近。因此，調整判斷準則為若贏(實質報酬率大於期望報酬率)，則考慮修定選擇為使得超過前一期的估計報酬的風險選項中最接近真實報酬的選項。在這樣的考量下，合理預期殘差平方和會減小。根據圖表 4，可以明顯的得知，在五個不同允許風險個數的模型中，乘勝追擊的殘差平方和都明顯的比贏家規則來得小。

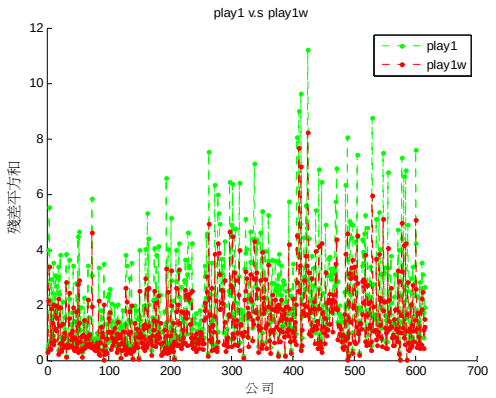
模型	整體	1	2	3	4	5
遞減家數	551	615	570	607	600	602

表格 10 模型 play 和模型 playw 隨著風險個數放寬遞減的公司家數

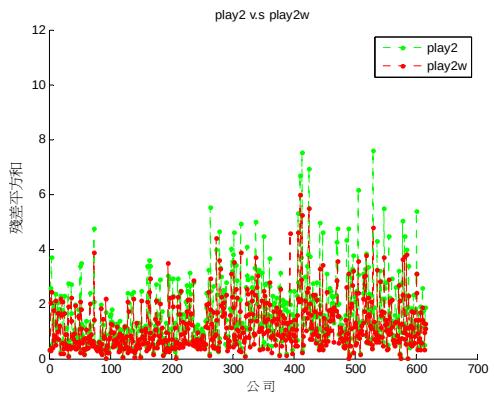
表格 10 為贏家規則和乘勝追擊模型中，隨著風險個數放寬遞減的公司家數，根據表格 10 顯示，整體來說有 89%的公司家數，五個模型同時具有遞減的效果，而就個別模型來看，雖然允許風險個數為 2 個的模型只有 570 間公司是遞減的效果，但整體而言也達到近 92.5%的公司具有遞減的效果。

在討論完贏家規則和乘勝追擊，以蒐集到的總體經濟變數直接視為風險的模型中，隨著風險個數的放寬兩個模型的比較後，我們對於以資本資產定價理論中的β係數和加入α係數作為風險的衡量指標，在贏家規則和乘勝追擊兩種不同的模型下，是否具備上述一樣的效果。

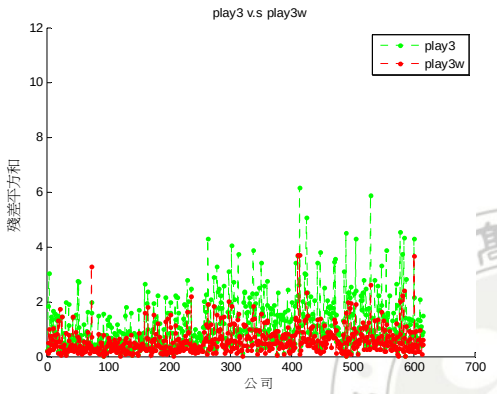
圖表 4.1



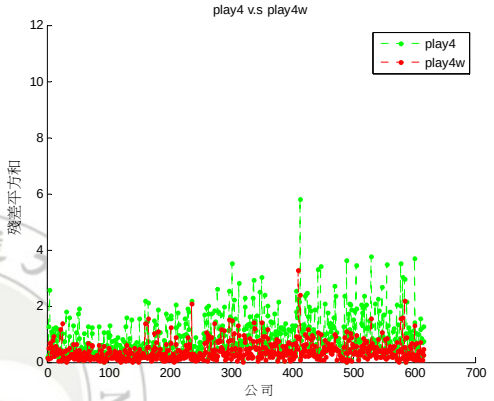
圖表 4.2



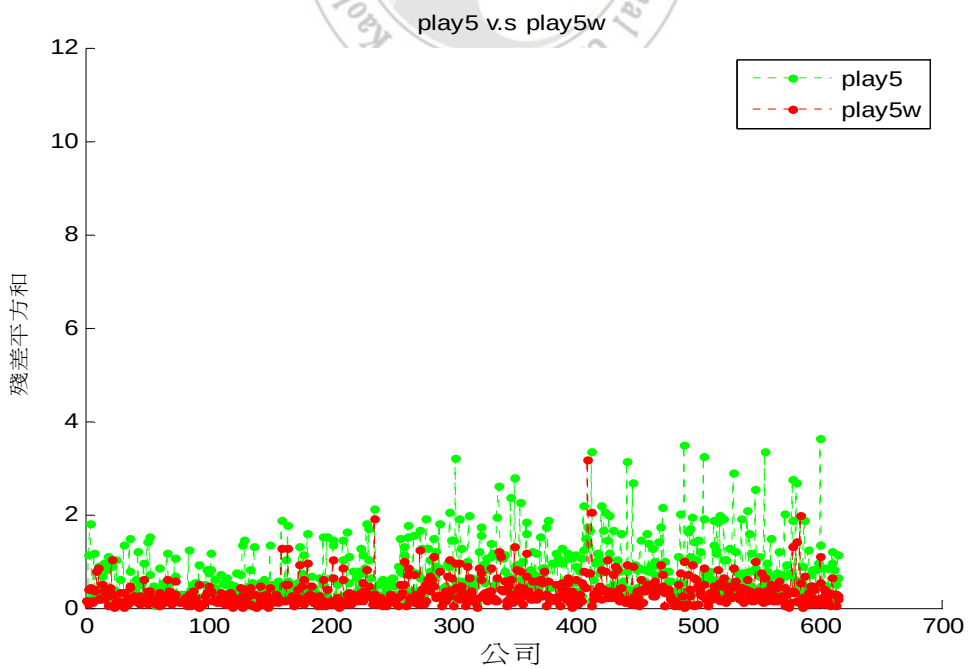
圖表 4.3



圖表 4.4



圖表 4.5



圖表 4 贏家規則和乘勝追擊規則殘差平方和的比較(總體經濟變數)

圖 4-4.1

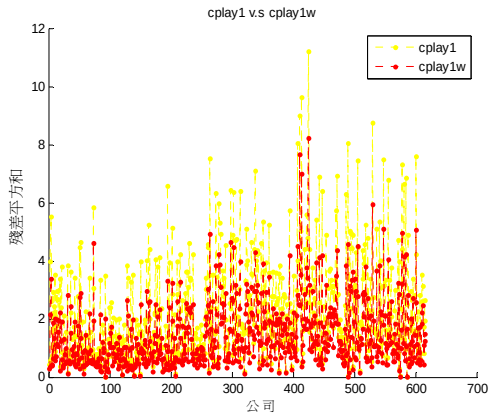


圖 4-4.2

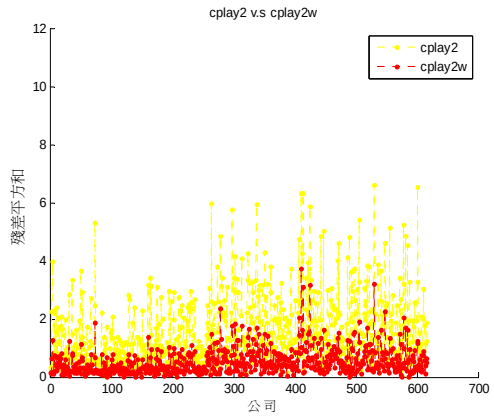


圖 4-4.3

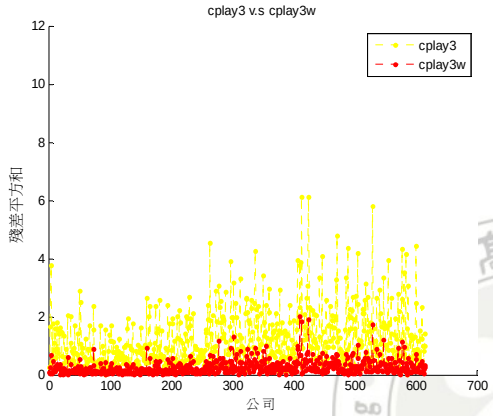


圖 4-4.4

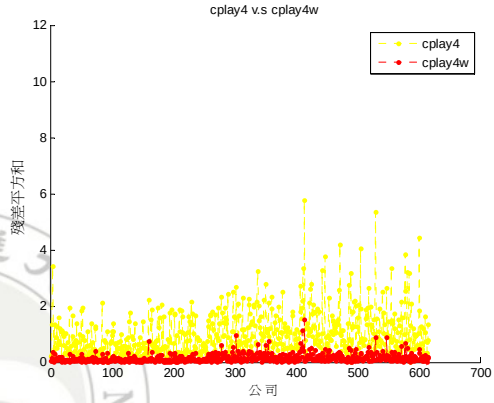
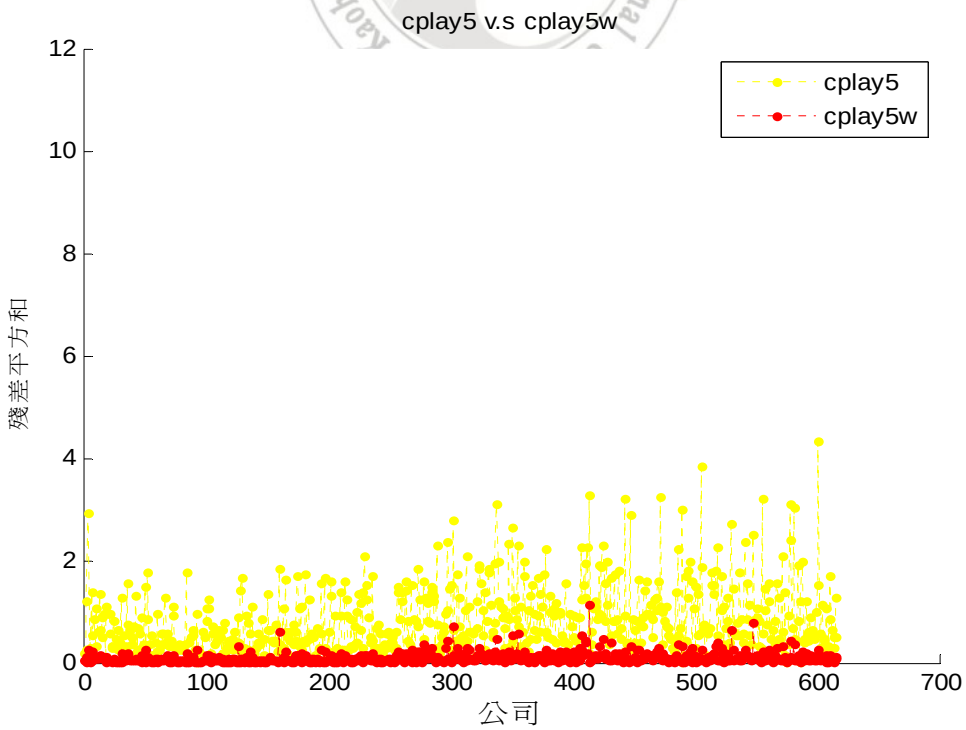


圖 4-4.5



圖表 5 贏家規則和乘勝追擊規則殘差平方和的比較(CAPM 中之 β)

圖表 5 中，利用資本資產定價理論的β係數作為風險的轉換依據，在兩種不同的模型下，同時可允許承擔的風險個數的不同之比較圖形。由圖表 5 的 5 個圖，可以輕易看出，在與本文的預期結果相符下，結果仍是每間公司利用乘勝追擊模型所求得的殘差平方和有比贏家規則所得到的殘差平方和小的趨勢。

模型	整體	1	2	3	4	5
遞減家數	615	615	616	616	616	616

表格 11 模型 cplay 和模型 cplayw 隨著風險個數放寬遞減的公司家數

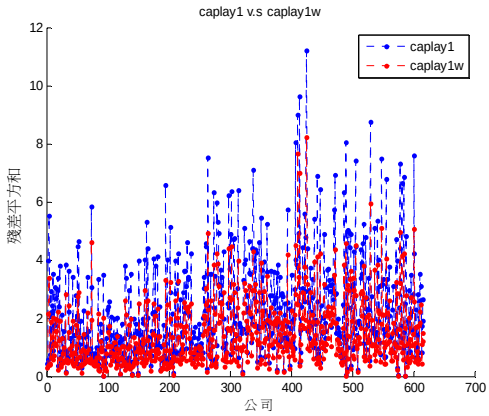
從表格 11 可得知，透過資本資產定價理論中的β係數作為報酬轉換風險的方式，在允許同時承擔不同的風險個數下，利用乘勝追擊模型可以得到比贏家規則模型較小的公司殘差平方和。為一例外的情況是允許承擔一個風險的情況，第 500 家公司(OM Group, Inc.)是唯一例外的公司，可能導致的原因為在允許承擔一個風險的情況下，因無考慮有無其他影響第 500 間公司的報酬的風險因素，因此出現如同以蒐集到總體經濟變數作為風險因子時，贏家規則有時會出現比乘勝追擊的殘差還要小的情況。表格 12 為第 500 家公司在兩種不同模型下的殘差平方和。

N.500　OM Group, Inc	cplay	cplayw
殘差平方和	3.1831	3.402

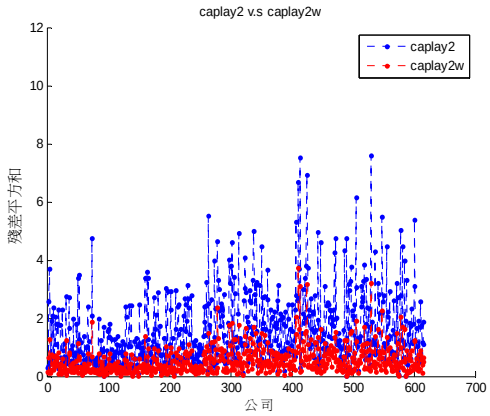
表格 12 第 500 家公司在兩種不同模型(cplay、cplayw)下的殘差平方和

按照模型的演進，接續我們想要探討的是透過資本資產定價理論中的α和β係數作為風險轉換依據時，兩種模型在不同可允許的風險個數下，是否有和前兩種風險轉換方式所得到的結果相同。

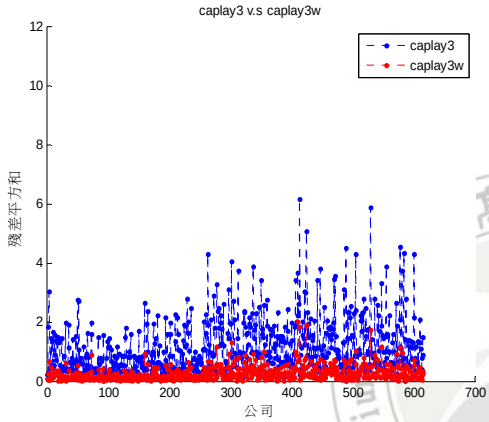
圖表 6.1



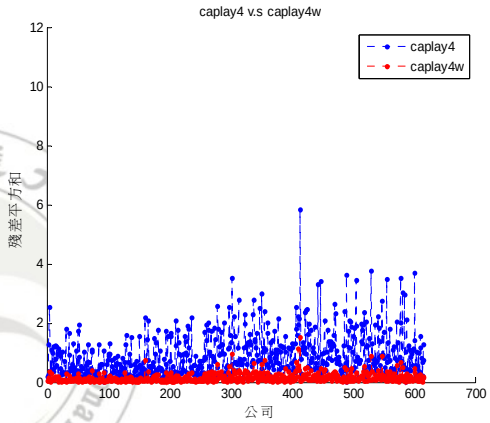
圖表 6.2



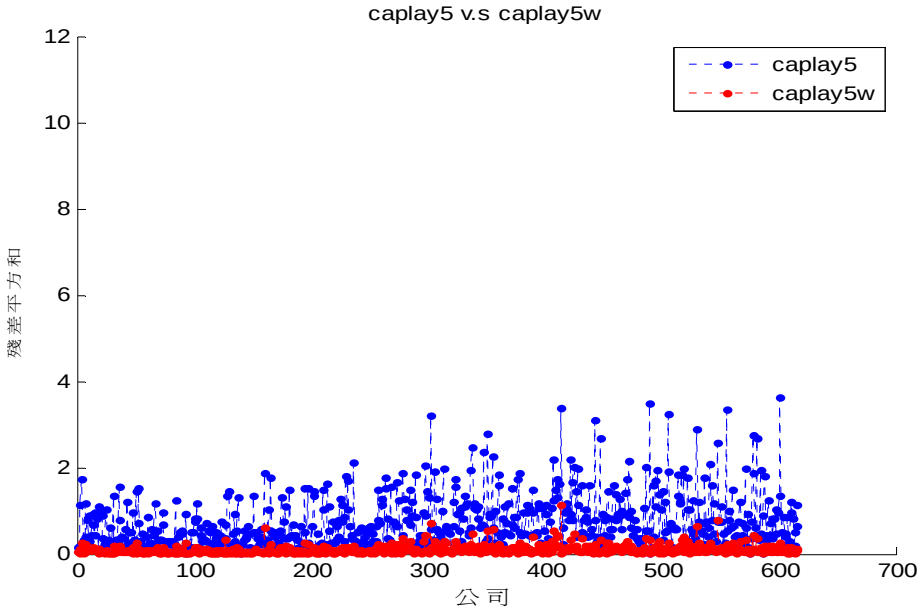
圖表 6.3



圖表 6.4



圖表 6.5



圖表 6 贏家規則和乘勝追擊規則殘差平方和的比較(CAPM 中之α、β)

在圖表 6 中，X 軸為公司，而Y軸為殘差平方和，圖表 6.1 至圖表 6.5 分別為同時允許 1 至 5 個風險個數，比較藉由資本資產定價理論中的α和β係數，在贏家規則和乘勝追擊模型下每一間公司的殘差平方和。圖形中，以藍色表示在贏家規則下所求得的殘差平方和，而紅色則表示在乘勝追擊下所求得的殘差平方和。

可由圖表 6.1 至圖表 6.5 發現，隨著同時允許風險個數的逐漸放寬，殘差平方和有逐漸減小的趨勢。透過表格 13 可得知，幾乎高達 99.99%的公司都有隨著風險個數的放寬使得殘差平方和變小。

模型	整體	1	2	3	4	5
遞減家數	615	615	616	616	616	616

表格 13 模型 caplay 和模型 caplayw 隨著風險個數放寬遞減的公司家數

透過實際研究資料內部結構，發現唯一與沒有符合逐漸變小趨勢是第 500 家公司(OM Group, Inc)，列出相關數據於表格 14，原因同前述。

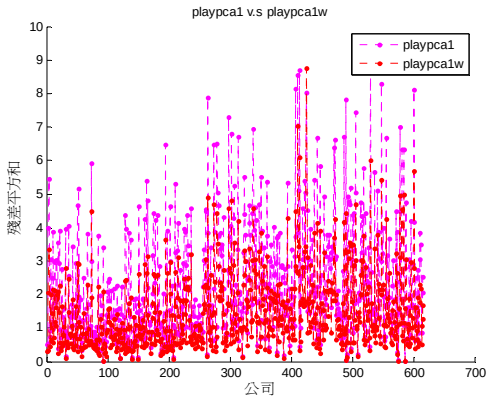
N.500 OM Group, Inc	caplay	caplayw
殘差平方和	3.18	3.4004

表格 14 第 500 家公司在兩種不同模型(caplay、caplayw)下的殘差平方和

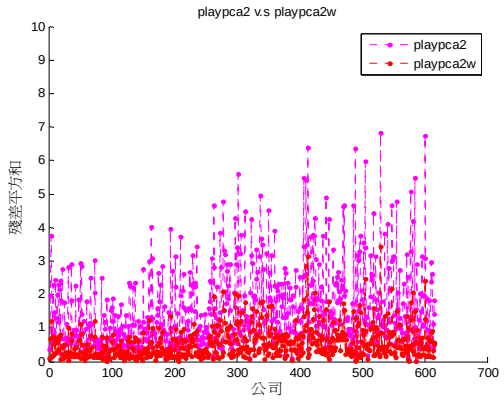
另外，在考慮使用 CAPM 中β係數，作為風險的轉換基礎下，比較加入α係數與否，是否有顯著地使殘差變小，從這兩種模型中的每一期的平均殘差平方和來看，並沒有太大的差距，從圖形來比較，也有一樣的結果。因此，我們可以說蒐集到的資料在資料期間內，在經濟市場中無法控制的外在因素並沒有顯著的影響本研究模型的實證結果。

最後考慮透過主成份分析的方式將總體經濟變數作一線性組合，可以從圖表 7 作一圖形上的比較。

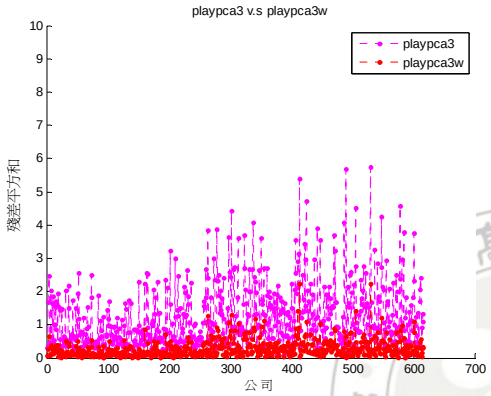
圖表 7.1



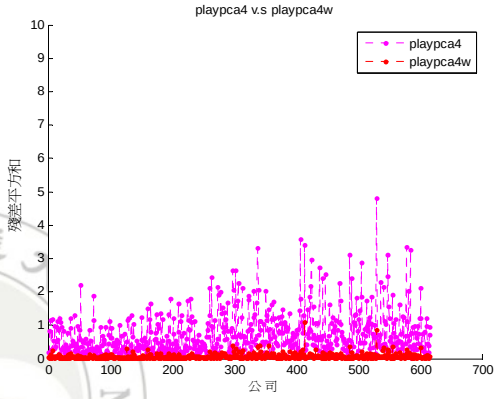
圖表 7.2



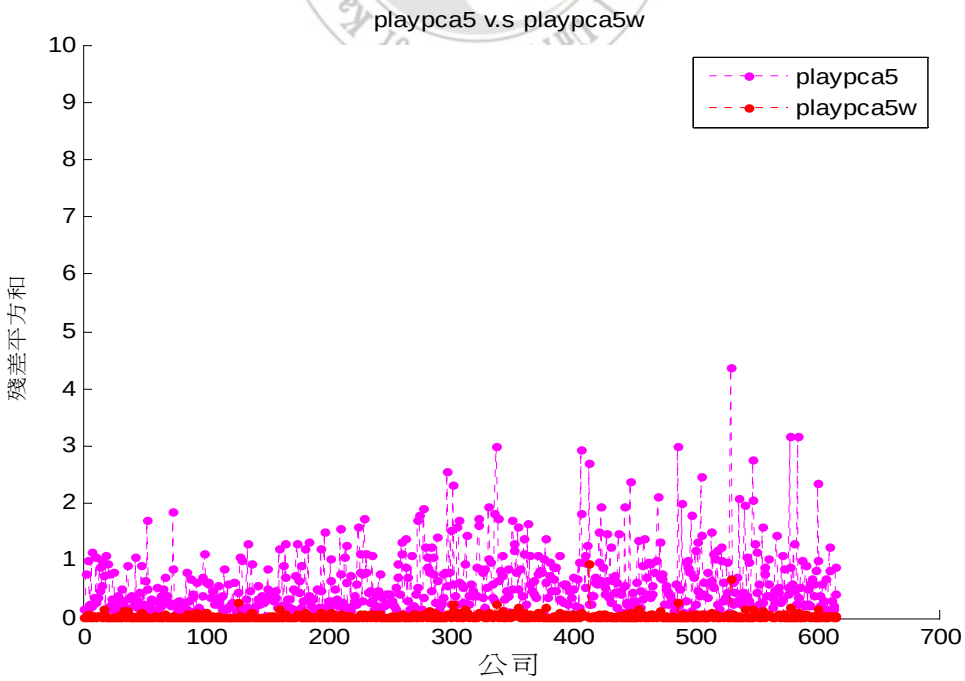
圖表 7.3



圖表 7.4



圖表 7.5



圖表 7 贏家規則和乘勝追擊規則殘差平方和的比較(主成份分析)

模型	整體	1	2	3	4	5
遞減家數	615	616	616	616	616	615

表格 15 模型 playpca 和模型 playpcaw 隨著風險個數放寬遞減的公司家數

透過實際研究資料內部結構，發現唯一與沒有符合逐漸變小趨勢是第 314 家公司(Cabot Microelectronics Corp)，列出相關數據於表格 16，原因同前述。

N.500 OM Group, Inc	playpca	playpcaw
殘差平方和	0.0904	0.1017

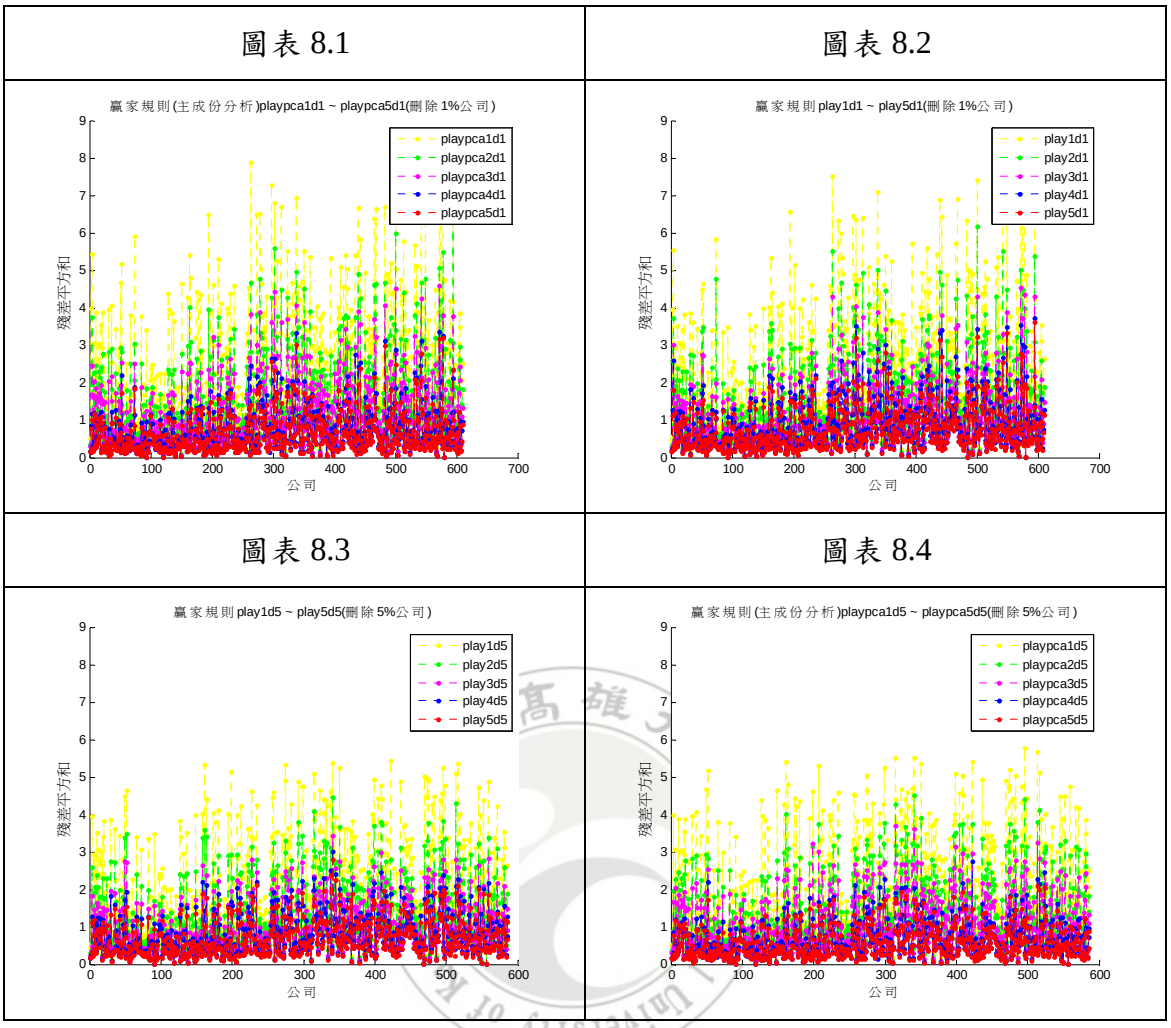
表格 16 第 500 家公司在兩種不同模型(playpca、playpcaw)下的殘差平方和

在得知透過主成份分析作風險的轉換方式可以有效的減少每一間公司的殘差平方和，進而我們探討在不考慮具有極端殘差平方和的公司，考慮刪除 616 間公司中最極端的 1%和 5%。在贏家規則和乘勝追擊規則下，做兩種不同考慮風險因子的比較，分別是直接利用總體經濟變數作為風險因子和透過主成份分析作為風險因子。

在圖表 8 中，可以發現刪除 1%的公司家數(6 間)後，在直接利用總體經濟變數和主成份分析作為風險的衡量依據時，整體而言，討論所有公司在兩種衡量風險因子的方法所得到的殘差平方和，幾乎沒有太大的差別，因此本文認為，利用總體經濟變數直接視為風險因子，已經能將風險和報酬的關係建立得很好。而在刪除 5%的公司家數(30 間)後，更能藉由圖表 8.3 和圖表 8.4 發現，整體而言，兩種模型所得到的殘差平方和是幾乎沒有差別的。

證券報酬的多因子特性的研究至今仍未獲得結論，雖然在文獻中，許多學者透過不同的方式去找出影響報酬的風險因子，目前有兩種研究方法廣受歡迎，第一，研究者以統計方法分析證券的報酬，以區別出哪些因子是重要的；第二，研究者根據文獻探討，指定一些可能影響報酬的經濟因素，視為風險因子，在透過刪除掉 1%和 5%的公司家數，在直接利用總體經濟變數和藉由主成份分析作風險因子的衡量下，結果發現並無太大差異，這也間接驗證了在相關文獻的實證研

究中，許多學者直接使用總體經濟變數視為風險因子的可靠度。



圖表 8 刪除 1%和 5%的公司家數後兩種模型的比較

由於在考慮全部的公司下，並只討論每一期只承擔一個風險的情況，直接利用總體經濟變數去做風險衡量是比利用主成份分析所求得的殘差平方和為大，但透過放寬的風險個數，主成份分析所得到的殘差平方和有較直接利用總體經濟變數所求得的殘差平方和為小，因此在我們有這樣的結論下，我們希望透過主成份分析的轉換風險的方式，將得到的結果應用至資產配置的情況中，在圖表 8 中，由於並非所選取到的風險因子都是顯著的，因此在不同的允許個數下，只考慮每一期間顯著的風險因子，透過最佳化的資產配置，能夠將在風險最小的情況下，使得報酬最大。

為了比較四種不同衡量風險因子在贏家規則和乘勝追擊下的優劣，表格 17 列出所有公司在不同方法中兩種模型下，同時允許承擔一種風險因子之殘差平方和的加總。

模型	模型代號	公司每一期的殘差平方和
贏家規則(總體經濟變數)	Play5	0.005016676
乘勝追擊(總體經濟變數)	Play5w	0.002162757
贏家規則(CAPM 中 β 係數)	Cplay5	0.005452681
乘勝追擊(CAPM 中 β 係數)	Cplay5w	0.000728834
贏家規則(CAPM 中 α 和 β 係數)	Caplay5	0.004971103
乘勝追擊(CAPM 中 α 和 β 係數)	Caplay5w	0.000728534
贏家規則(主成份分析)	Playpca5	0.004287632
乘勝追擊(主成份分析)	Playpca5w	0.000247798

表格 17 所有公司在不同方法中兩種模型的每一期的平均殘差平方和

從表格 17 中，可以得知，利用主成份分析將總體經濟變數轉換成風險的衡量方式，在兩種模型(贏家規則和乘勝追擊)下，可以將所有公司的風險和報酬的關係描述得最為適切。

接著，我們對於贏家規則和乘勝追擊在不同的風險因子衡量下，和傳統的簡單迴歸作一數據比較，在這裡的傳統迴歸方法分別是不考慮動態模型，直接利用蒐集期間的資料進行複迴歸分析，另外考慮以蒐集期間(共 240 期)中的五個總體經濟變數和個別公司報酬作一簡單迴歸，用在贏家規則中為每一期間找出適當路徑的模型。將比較結果列於表格 18。

模型	模型代號	公司每一期的 殘差平方和之平均
傳統迴歸分析(複迴歸分析)	Reg5	0.116063311256
簡單迴歸分析(贏家規則)	Playreg1	0.018015791235621
半自我迴歸分析	SAR	0.2588331981
漸進主成份分析	APCA	0.3125632562
贏家規則(總體經濟變數)	Play1	0.014255427920461
乘勝追擊(總體經濟變數)	Play1w	0.009248178444778
贏家規則(CAPM 中β係數)	Cplay1	0.014274948597265
乘勝追擊(CAPM 中β係數)	Cplay1w	0.009246073993694
贏家規則(CAPM 中α和β係數)	Caplay1	0.01426779282559
乘勝追擊(CAPM 中α和β係數)	Caplay1w	0.009239279151822
贏家規則(主成份分析)	Playpca1	0.014594876217519
乘勝追擊(主成份分析)	Playpca1w	0.009330527893434
贏家規則(歷史報酬)	Playar1	0.01423782465326
乘勝追擊(歷史報酬)	Playar1w	0.01672619523650

表格 18 不同方法間的平均殘差平方和

從表格 18 可以得知，透過對不同模型下，不同衡量風險因子方式中，我們提出的贏家規則和乘勝追擊規則，能明顯地減少每間公司殘差平方和，換句話來說，就是更能夠準確的將過去的資料配適得更好。從表格 18 可發現，傳統迴歸模型因無考慮動態地移動樣本期間，而是以全部的樣本期間作計算，因此產生較大的殘差; 而半自我迴歸雖然不像最大概似估計法需要嚴格的假設分配，對於時間和橫斷面的公司特殊風險的變動只放一點點的限制，最大的優點在於可提供在調整衡量誤差時為一簡單的方法。不過最大的缺點為，只能解釋較為短期的資料這是因為它以固定前k期資料為解釋變數。

接著，我們希望分析透過 The multi-armed bandit 所配適出來的模型。由於 The multi-armed bandit 計算過於複雜，在透過離散化的過程中，隨著期數的增加，所得到的離散化報酬的個數也會隨著增加，因此在考慮龐大的計算下，我們考慮先固定離散化的報酬個數下之求得的得到一個報酬的機率，本實證研究將次數設定為 2 至 10 次，希望藉由觀察所得到的數據，分析不同的離散化報酬的個數有何不同，將結果列於表格 19，表格 19 僅列出離散化個數為 2、3、4、5、10 和 20 在回推 10 期的過程中做一簡單比較。

第一間公司	殘差平方和
離散化：2	7.06228
離散化：3	4.117236
離散化：4	4.09287
離散化：5	3.914984
離散化：10	0.917487
離散化：20	0.625410

表格 19 第一間公司離散化個數不同之比較

在表格 19 中，我們可以發現在固定回推期數下(10 期)，隨著採用不同離散化報酬，以第一間公司為例，所得到的殘差平方和，有逐漸減小的趨勢，雖此離散化報酬的個數是採用遞增的方式去逼近，在實際離散化的過程所求得的個數是 194 個，雖粗略估計的離散化過程的數據距離實際透過理論中離散的個數有差距，但我們仍能看出，隨著越來越接近實際的離散化個數，能有效使得殘差平方和減小。

為了有同樣的比較基礎，我們考慮比較回推 10 期所估計的殘差平方和，在與 The play-the-winner 中的贏家規則和乘勝追擊作一比較。以第一間公司為例，將比較數據列於表格 20。

模型	回推 10 期所得到的殘差和
Play-the-winner	0.24224
Play-the-winner(w)	0.1063
The multi-armed bandit	0.6832

表格 20 不同模型最後 10 期所得到的殘差和

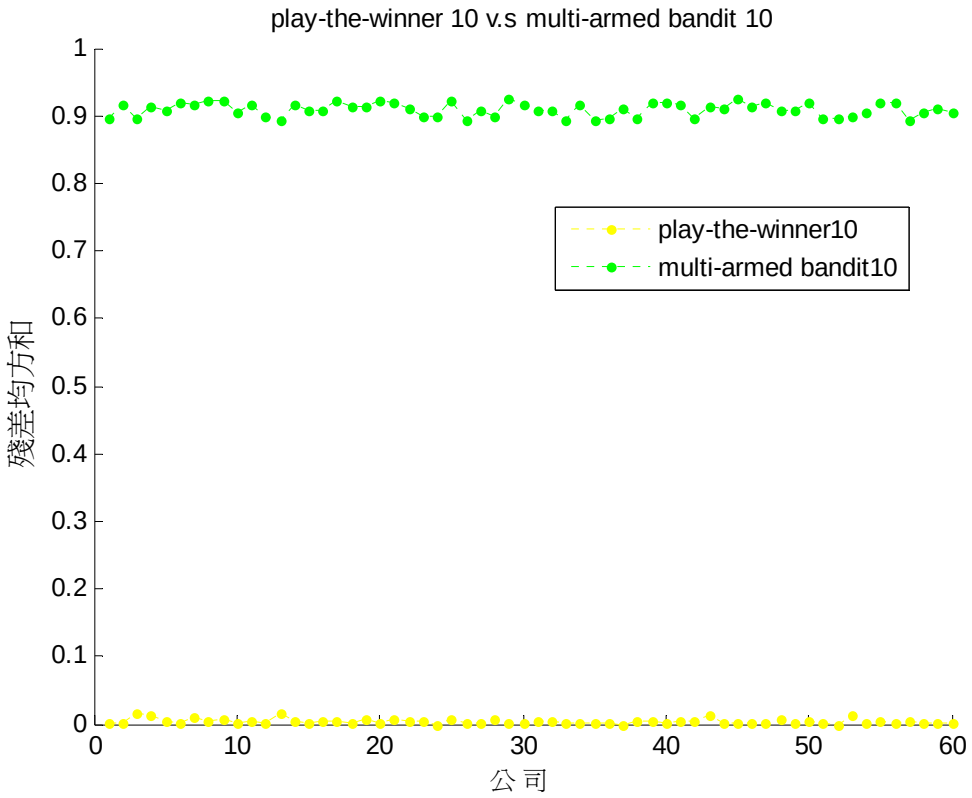
在實證研究前，透過對 Jones(1974)中所實證的結果，我們預期 The multi-armed bandit 會得到較小的殘差平方和。為考慮計算量龐大的情況下，本研究中，採用隨機抽樣的方法，將 616 家公司以抽樣的方式，抽取 60 家公司進行比較，結果發現 The multi-armed bandit 所求得的每間公司的殘差平方和都較另外兩個模型求得的殘差平方和較大。在表格 20 是以第一家公司為例，我們可以發現三種模型中，The multi-armed bandit 所得到的殘差平方和 0.6832 較其他兩個模型都大。

在理論上，透過數理統計理論的推導計算，利用第一期所假設的分配和參數，在透過第一期之後每一期所觀察到的資訊，計算求得事後分配的參數。疊代求得最後一期的理論離散化數字為 194。在實證的過程中，由於龐大的計算量，因此考慮利用逼近的方式，比較採用 Multi-armed bandit 和 play-the-winner 不同。

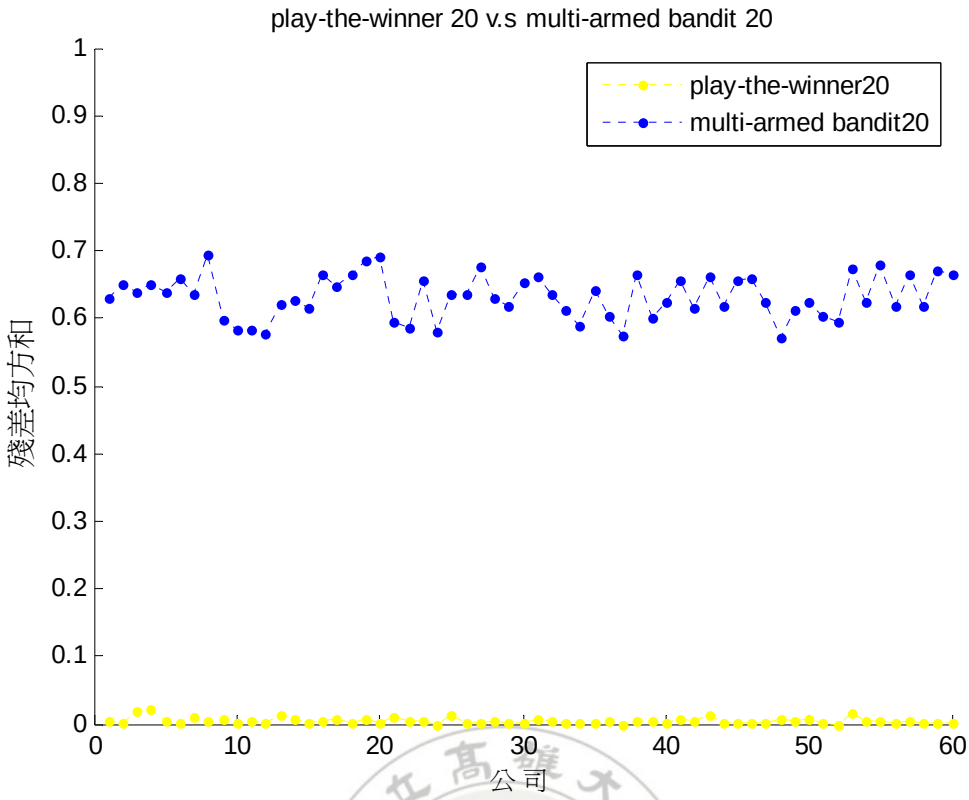
分析結果發現，實證的結果和預期有所差距的原因在於，我們並非以理論中的離散化個數下去計算 The multi-armed bandit，雖然結果不如預期，但透過表格 19，我們知道隨著離散化個數的增加，漸漸逼近至真實的離散化過程，我們希望可以藉由不斷的逼近真實的離散化個數，進而能更符合現實狀況。因此，我們將利用所抽取的 60 間公司，計算在離散化為 10、20 和 40 之 Multi-armed bandit 之結果，並將 Play-the-winner 的模式修改為對應 Multi-armed bandit 的離散化個數，作兩者之比較。

圖表 9~圖表 11 分別表示 60 間公司離散化數字為 10、20 和 40 的結果，可從圖形來看，雖然本文並非以理論值 194 作為離散化報酬的切割，但是可以明顯

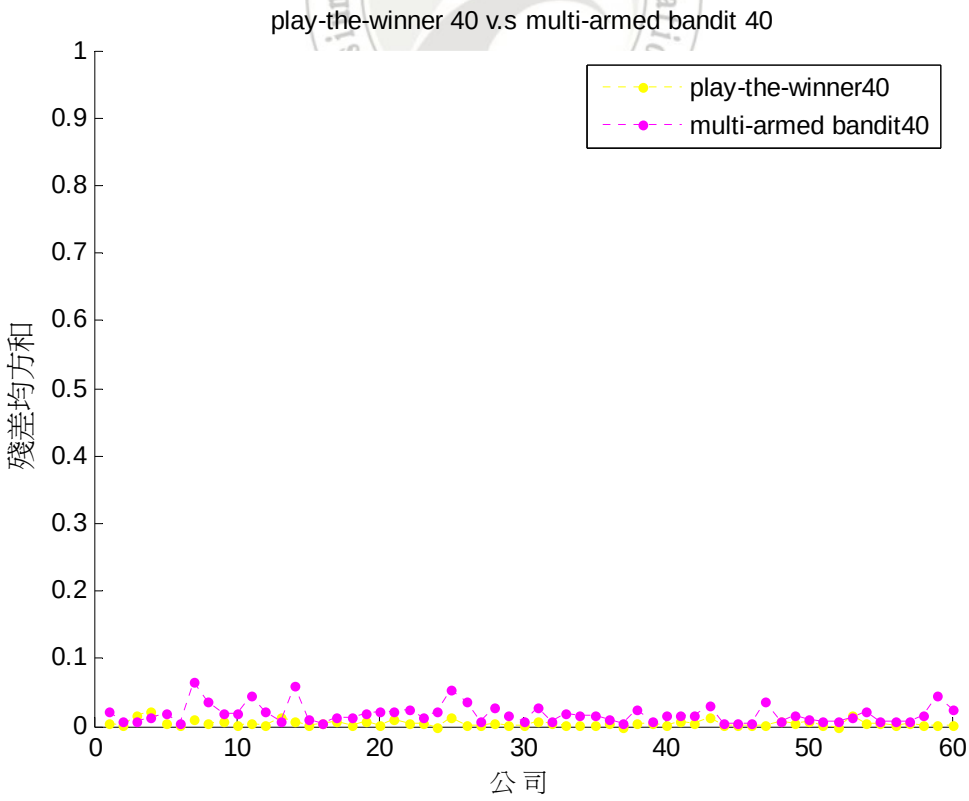
發現，隨著離散化個數的增多，Multi-armed bandit 的殘差值有逐漸比 Play-the-winner 小。在離散化個數為 40 時，Multi-armed bandit 的結果已與 Play-the-winner 不差上下，兩種模型的平均差為 0.035，因此可以預期以理論值執行模型時，Multi-armed bandit 是優於 Play-the-winner 的，這與直覺是相符合的，因為 Multi-armed bandit 考慮了所有可能的結果，而 Play-the-winner 只是根據上一步作下一步的決策。



圖表 9 離散化個數為 10 的結果



圖表 10 離散化個數為 20 的結果



圖表 11 離散化個數為 40 的結果

第五章 結論

透過實證研究中，我們可以知道儘管在財務領域中，定價問題的相關研究中，可分成支持資本資產定價模型亦或是套利定價理論模型，但經由我們的實證研究裡，我們可以發現逐漸放寬每一期間可同時允許的風險個數，能明顯減小每一資產在不同時期的殘差平方和，因此本研究支持套利定價理論，認為資產報酬率是受到多因子的影響。

在結合 The play-the-winner 和套利定價理論的實證研究中，實證結果顯示：總體經濟變數透過主成份分析方式轉換後所得到的殘差平方和是所有模型中殘差平方和最小的，這將有助於協助我們將其結果應用至投資組合中資產分配的決策問題，透過主成份分析中係數轉換成資產配置中的權重，可使得投資人在不了解風險和報酬的關係下，作一個良好的資產配置。透過 The play-the-winner 和傳統迴歸分析亦或是文獻中提出的 SAR 方法，我們可以說 The play-the-winner 模型是一個可完善建立風險和報酬之間關係的模型。

在實證結果中，直接利用總體經濟變數視為風險因子的轉換，並不是所有轉換風險因子方法中結果表現最佳的，但從平均每一期的殘差中可發現並無與其他模型有太顯著的差異，這也驗證了在過去的文獻中，許多學者直接利用合理可反映市場的總體經濟變數作為風險因子的轉換是合理的。

在支持套利定價理論的情況下，我們認為透過 The multi-armed bandit 的模型，應能將風險和報酬之間的關係配適的更為貼切，但因為 The multi-armed bandit 中後退(backward)的計算繁瑣，在實驗次數較大時會產生計算不易的問題，而本研究所採取的實驗次數較為不精準，因此無法表現出較其他模型勝出的現象，在此建議之後的研究者可以透過不同將報酬離散化的方法，期望能將市場中環境的參數描述得較為符合現況。另外，也可以考慮不同離散化的手段，希望藉由不同離散化的方法可以找到一個反應市場適切的模型。

第六章 參考文獻

[1] Altay, E. (2003) The Effect of Macroeconomic Factors on Asset Returns: A Comparative Analysis of the German and the Turkish Stock Markets in an APT Framework. *Martin-Luther-Universität Halle, Betriebswirtschaftliche Diskussionsbeiträg*e 48.

[2] Banz, R. W. (1981) The Relationship Between Return and Market Value of Common Stocks. *Journal of Financial Economics*, 9, 3-18.

[3] Beenstock, M. and Chan, K.F. (1988) Economic Forces in London Stock Market. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 50, 22-39.

[4] Berry, M.A., Burmeister, B. and McElory, M.B. (1988) Sorting Out Risks Using Known APT Factors. *Financial Analysts Journ*al, 44, 29-40.

[5] Burmeister, E. and Wall, K.D. (1986) The Arbitrage Pricing Theory and Macroeconomic Factors Measures. *The Financial Review*, 21(1), 1-20.

[6] Chamberlain, G. and Rothschild, M. (1983) Mitrage and Mean Variance Analysis on Large Asset Markets. Econometrica, 51, 1281-1304.

[7] Chan, K.C., Chen, N.F. and Hsieh, D. A. (1985) An Exploratory Investigation of the Firm Size Effect. *Journal of Financial Economics*, 14, 451-471.

[8] Chen, N., Roll, R and Ross, S. (1986) Economic Forces and the Stock Market. *Journal of Business*, 59, 383-403.

[9] Chen, N.F., Roll, R. and Ross, S. A. (1983) Economic Forces and the Stock Market. *CRSP working paper*, 119.

[10] Chen, S. J. and Jordan B. D. (1993) Some Empirical Tests of the Arbitrage Pricing Theory: Macrovariable Factors. *Journal of Banking and Finance*, 17, 65-89.

[11] Cho, D. C., Elton, E. and Gruber, M. (1984) On the Robustness of the ROLL and ROSS APT. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 19(1), 1-10.

[12] Clare, A. D. and Thomas, S. H. (1994) Macroeconomic Factors, the APT and the UK Stock Market. *Journal of Business Finance and Accounting*, 21, 309-330.

[13] Connor, G. and Korajczyk, R. (1986) Performance Measurement with the Arbitrage Pricing Theory: A New Framework for Analysis. *Journal of*

Financial Economics, 15, 373-394.

[14] Domar, E. and Musgrave, R.A. (1944) Proportional Income Taxation and Risk Taking. *Quarterly Journal of Economic*.

[15] Fama,E. F. (1981) Stock Return, Real Activity, Inflation, and Money. *American Economic Review,* 71, 545-565.

[16] Fama,E. F. (1990) Stock Return, Expected Returns and Real Activity. *The Journal of Finance*, 45, 1089-1108.

[17] Fama, E.F. and French, K.R. (1992) The Cross-Section of Expected Stock Returns. *The Journal of Finance,* 2, 427-465.

[18] Fang, H., Lai K.S., and Lai, M. (1992) Interactions Between Stock and Foreign Exchange Markets: Some U.S. Evidence, Financial Management Association.

[19] Geske, R. and Roll, R. (1983) The Fiscal and Monetary Linkage Between Stock Returns and Inflation. *Journal of Finance*, 38, 1-33.

[20] Groenewold, N. and Fraser, P. (1997) Share Prices and Macroeconomic Factors. *Journal of Business Finance and Accounting*, 1367-1383.

[21] Jones, P. W. (1974) The Two-Armed Bandit, *Miscellanea*, 523-524.

[22] Jorion, P. (1990) The Exchange-rate Exposure of US Multinationals. *Journal of Business,* 63, 331-345.

[23] Kaul, G. (1987) Stock Returns and Inflation: The Role of the Monetary Sector. *Journal of Financial Economics*, 18(2), 253-7.

[24] Keynes, J. N. (1973) The General Theory of Employment, Interest and Money. London, Macmillan.

[25] Lintner, J. (1965) The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. *Review of Economics and Statistics*, 47, 13- 37.

[26] Markowitz, H. (1952) Portfolio Selection. *Journal of Finance*, 7, 77-91.

[27] Marshall, A. (1938) Money and the Theory of Asset. *Econometric*.

[28] Mei, J. (1993) A semiautoregression Approach to the Arbitrage Pricing Theory. *Journal of Finance,* 48, 599-620.

[29] Meyers, S.L. (1973) A Re-examination of Market and Industry Factors in Stock

Price Behaviors. *Journal of Finance,* 28, 695-706.

[30] Mossin, J. (1966) Equilibrium in a Capital Asset Market. *Econometrica,* 34, 768-783.

[31] Ozcam, M. (1997) An Analysis of the Macroeconomic Factors That Determine Stock Return in Turkey. *Capital Market Board of Turkey,* 75.

[32] Pari, R. A. and Chen, S.N. (1984) An Empirical Test of the Arbitrage Pricing Theory. *Journal of Financial Reasearch,* 7.

[33] Park (1997) Rationality of Negative Stock-price Responses to Strong Economic Activity. *Financial Analysis Journal,* 53, 52-57.

[34] Pearce, D. K. and Roley, V. V. (1985) Stock Prices and Economic. *Journal of Business,* 58, 49-67.

[35] Priestley, R. (1996) The Arbitrage Pricing Theory, Macroeconomic and Financial Factors, and Expectations Generating Processes. *Journal of Banking and Finance,* 20, 869-890.

[36] Reinganum, M.R. (1983) Misspecification of Capital Asset Pricing: Empirical Anomalies Based on Earnings, Yields and Market Values. *Journal of Financial Economics*, 9, 19-46.

[37] Ross, S.A. (1976) The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing. *Journal of Economic Theory,* 13, 341-60.

[38] Rogalski, R. J. and Vinso, J. D. (1977) Stock Returns, Money Supply, and the Direction of Causality. *Journal of Finance*, 32(4), 1017-30.

[39] Rozeff, M. S. (1974) Money and Stock Prices. *Journal of Finance Economics,* 1, 245-302.

[40] Schwert (1989) Why Does Stock Market Volatility Change Over Time. *Journal of Finance*.

[41] Sharp, W.F. (1964) Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk. *Journal of Finance,* 19, 425-442.

附錄

附錄(一) 套利定價理論實證研究因子

研究文獻	研究因子
Chen、Roll and Ross(1986)	工業生產指標 通貨膨脹率 風險溢酬 利率期限結構 股價指標 每人實質消費成長率 石油價格
Chan、Chen and Hsieh(1985)	市場股價指數 經季節性調整工業生產指數成長率 非預期通貨膨脹率 預期的通貨膨脹變動率 利率期限結構變動 非預期風險溢酬的變化
Berry、Burmeister and Marjorie(1988)	非預期的違約風險溢酬 非預期的利率期限結構 非預期的通貨膨脹率 非預期的最終銷售成長率 未被上述四個因素解釋的部分
James, Koreisha, and Partch(1985)	名目利率 貨幣供給額成長率
Schwert(1989)	貨幣供給額 利率

Lee(1992)	利率 通貨膨脹
Park(1997)	現金流量 通貨膨脹
Groenewold and Fraser(1997)	短期利率 通貨膨脹率 貨幣供給額成長率 匯率
Priestley(1996)	非預期風險溢酬的變化 匯率 貨幣供給額 非預期通貨膨脹率 市場股價指數
Banz (1981) Reinganum (1983)	規模效應
Mukherji, Dhatt, and Kim (1997)	規模效應
Fama and French(1992)	帳面/市場價值比

附錄(二)實證研究影響股價的因子

資料來源:劉馨薇(1992)

作者	研究變數	研究方法	研究期間	研究結果
Fama (1981)	美國股價報酬、工業生產指數、通貨膨脹	理性預期的貨幣數量模型	1953-1977	工業生產成長率和股價報酬呈現正向關係。股價報酬與通貨膨脹為負相關。
Pearce and Roley (1985)	S&P500 股價指數、貨幣供給額、、失業率消費者物價指數、生產者物價指數、工業生產指數	迴歸模型	1977.9.29~1982.10.25 (日資料)	貨幣供給額對於股價報酬具有正向的解釋能力。通貨膨脹率與其他實質變數的關係不具顯著性。
James, Koreisha , and Partch(1985)	股票報酬、貨幣供給額	多元向量迴歸移動平均模型	1962~1981	貨幣供給額成長率與股票報酬有很搶的相關性，實質經濟活動的預期變動和貨幣供給額成長率是預期通貨膨脹變動時不可缺少的因子。
Schwert (1989)	S&P 綜合指數、道瓊綜合指數、工業生產	向量自我迴歸模型(VAR)	1857~1987	利率波動性對股價報酬率波動不具有顯著性。貨幣供給額成長率波動與股價波動呈現正向關係。

	指數、貨幣供給率、利率、債卷收益率、物價指數。			
Fama (1990)	NYSE 股價、工業成長率	理性預期的貨幣數量模型	1953~1987	工業生長成長率可解釋股價實質年報酬，兩者有顯著關係。
Fang, Lai and Lai (1992)	股價、匯率	共整合模型	19831.1~1991.12.31 (日資料)	股價和匯率間存在長期趨勢一致性，兩著關係為正，經濟意函為本國貨幣貶值，股價上升。
Abdullah and Hayworth (1993)	股價指數、工業生產指數、通貨膨脹、利率、貨幣供給額、預算赤字、貿易赤字	向量自我迴歸模型(VAR)	1980~1988	貨幣供給額成長率、長期利率、預算赤字與股價指數報酬率間存在因果關係。其中通貨旁膨脹率、貨幣供給額成長率呈現正相關。長期利率、貿易赤字和預算赤字與股價指數報酬率呈負相關。
Park (1997)	S&P500 股價報酬、工業生產指數、GDP、零售銷售額、就業成長率、私人投資	迴歸模型	1956~1995	就業成長率與實質股價報酬呈負相關，GDP 成長率與實質股價報酬成正相關。

附錄(三) 介紹 SAR 估計方法

第一階段先忽略異質性及橫斷面相關，使用簡單的工具變數以獲得(2-3.13)式的估計值。而第(2-3.13)式的基本架構是由 Holtz-Eakin, Newy, and Rosen (1988)所提出的，期大致的估計過程如下：

$$y_t = (R_{1t}, R_{2t}, ..., R_{Nt})\text{，}$$

其中 t 為 $N \times 1$ 的向量矩陣。再將第(2-3.13)式右邊的式子改寫成

$$W = (e, y_1, ..., y_k)\text{，}$$

其中 $e_{N\times 1} = [1,...,1]$，以轉換的誤差項為 $u_t = (\eta_{1t}, \eta_{2t}, ..., \eta_{Nt})$，而 $s_t = (\tilde{s}_{0t}, \tilde{s}_{1t}, ..., \tilde{s}_{kt})$，所以可以(2-3.13)式以下式來表達：

$$y_t = Ws_t + u_t \qquad (t = k+1, ..., T) \qquad \text{(a.1)}$$

堆疊(a.1)方程式中每一時間點，可以得到

$$Y = W^* B + U\text{，}$$

其中

$Y = (y'_{k+1}, ..., y'_T)'$，維度是 $((T-k)N \times 1)$；

$B = (s'_{k+1}, ..., s'_T)'$，維度是 $((k+1)(T-k) \times 1)$；

$U = (u'_{k+1}, ..., u'_T)'$，維度是 $((T-k)N \times 1)$；

$W = diag(W', ..., W')$，維度是 $((T-k)N \times (k+1)(T-k))$。

之後可將 k 期前的報酬當作工具變數，將工具變數以下式表示：

$$Z_t = (e, y_{t-1}, ..., y_{t-p})\text{，} \qquad (t-p > k)\text{，}$$

其中定義 $Z = diag(Z_{k+1}, ...Z_t)$。

第二階段和第三階段的步驟，由第一階段的迴歸使用殘差的平均移動，算出

Newey-Wes 調整矩陣。然後由 Holtz-Eakin, Newy, and Rosen (1988)所提出的 3SLS 估計法，獲得 β 的一致估計值。而 β 的估計值如下：

$$\hat{\beta} = [W^{'}Z(\hat{\Omega})^{-1}Z^{'}W]^{-1}W^{'}Z(\Omega)^{-1}Z^{'}Y \tag{a.2}$$

(a.2)式中 $\hat{\Omega}$ 是 $Z^{'}U$ 的共變異數矩陣。而 β 的共變異數矩陣為：

$$\Theta = Var(\hat{\beta}) = [W^{'}Z(\hat{\Omega})^{-1}Z^{'}W]^{-1} \text{ 。}$$

附錄(四) The two-armed bandit 演算方式

為了方便了解此機制的運作，用一個簡單的例子來加以說明。

假設總共的實驗次數為 2 次，兩個把手獲得一單位報酬的機率分別是 p_1 和 p_2，設其分配服從 $p_i \sim beta(1,2)$。計算步驟如下：

(1) 因採用倒退運算法，故先由 $n_1+n_2=2$ 開始計算，又根據上述定義，可以得知目前兩個把手的實驗次數和已達總實驗次數，因此 $S(r_1,n_1,r_2,n_2)=0$

(2) 接著，考慮 $n_1+n_2=1$，這表示此時只拉一次把手，雖然不確定是拉哪一隻把手，但明顯地只有兩種可能，非第一個把手即為第二個把手，加入可能的報酬結果予以討論發現有下列四種可能的情況：

(i) $S(1,1,0,0)$

$$S_1(1,1,0,0)=(\frac{2}{3})\{1+S(2,2,0,0)\}+(1-\frac{2}{3})S(1,2,0,0)=\frac{2}{3}\text{，}$$

$$S_2(1,1,0,0)=(\frac{1}{2})\{1+S(1,1,1,1)\}+(1-\frac{1}{2})S(1,1,0,1)=\frac{1}{2}\text{，}$$

因此 $S(1,1,0,0)=\frac{2}{3}$。

(ii) $S(0,1,0,0)$

$$S_1(0,1,0,0)=(\frac{1}{3})\{1+S(1,2,0,0)\}+(1-\frac{1}{3})S(0,2,0,0)=\frac{1}{3}\text{，}$$

$$S_2(0,1,0,0)=(\frac{1}{2})\{1+S(0,1,1,1)\}+(1-\frac{1}{2})S(0,1,0,1)=\frac{1}{2}\text{，}$$

因此 $S(0,1,0,0)=\frac{1}{2}$

(iii) $S(0,0,1,1)$

$$S_1(0,0,1,1)=(\frac{1}{2})\{1+S(1,1,1,1)\}+(1-\frac{1}{2})S(0,1,1,1)=\frac{1}{2}\text{，}$$

$$S_2(0,0,1,1)=(\frac{2}{3})\{1+S(0,0,2,2)\}+(1-\frac{2}{3})S(0,0,1,2)=\frac{2}{3}\text{，}$$

因此 $S(0,0,1,1)=\frac{2}{3}$。

(iv) $S(0,0,0,1)$

$$S_1(0,0,0,1)=(\frac{1}{2})\{1+S(1,1,0,1)\}+(1-\frac{1}{2})S(0,1,0,1)=\frac{1}{2}\text{，}$$

$$S_2(0,0,0,1)=(\frac{1}{3})\{1+S(0,0,1,2)\}+(1-\frac{1}{3})S(0,0,0,2)=\frac{1}{3}\text{，}$$

因此 $S(0,0,0,1)=\frac{1}{2}$ 。

(3) 最後 $S(0,0,0,0)$

$$S_1(0,0,0,0)=(\frac{1}{2})\{1+S(1,1,0,0)\}+(1-\frac{1}{2})S(0,1,0,0)=\frac{13}{12}\text{，}$$

$$S_2(0,0,0,0)=(\frac{1}{2})\{1+S(0,0,1,1)\}+(1-\frac{1}{2})S(0,0,0,1)=\frac{13}{12}\text{，}$$

因此 $S(0,0,0,1)=\frac{13}{12}$ 。

國立高雄大學 National University of Kaohsiung

附錄(五)　各模型符號列表

定義<贏>：本期真實報酬大於使用過去資料估計本期的期望報酬。

模型代號	風險衡量表準	輸贏的選擇	風險個數
Play1	總體經濟變數直接視為風險因子。	贏：維持與前期相同的選擇。 輸：考慮排除本期選項的所有的選擇下更換不同的選擇 。	1
Play2			2
Play3			3
Play4			4
Play5			5
Play1w	總體經濟變數直接視為風險因子。	贏：修定選擇為使得超過前一期的估計報酬的風險選項中最接近真實報酬的選項。 輸：考慮排除本期選項的所有的選擇下更換不同的選擇。	1
Play2w			2
Play3w			3
Play4w			4
Play5w			5
CPlay1	將總體經濟變數考慮 CAPM 的β轉換作為風險因子。	贏：維持與前期相同的選擇 輸：考慮排除本期選項的所有的選擇下更換不同的選擇	1
CPlay2			2
CPlay3			3
CPlay4			4
CPlay5			5
CAPlay1	將總體經濟變數考慮 CAPM 的β(系統風險)轉換並加入α(非系統風險)作為風險因子。	贏：維持與前期相同的選擇 輸：考慮排除本期選項的所有的選擇下更換不同的選擇	1
CAPlay2			2
CAPlay3			3
CAPlay4			4
CAPlay5			5
CPlay1w	將總體經濟變數考慮 CAPM 的β轉換作為風險因子。	贏：修定選擇為使得超過前一期的估計報酬的風險選項中最接近真實報酬的選項。 輸：考慮排除本期選項的所有的選擇下更換不同的選擇	1
CPlay2w			2
CPlay3w			3
CPlay4w			4
CPlay5w			5
CAPlay1w	將總體經濟變數考慮 CAPM 的β(系統風險)轉換並加入α(非系統風險)作為風險因子。	贏：修定選擇為使得超過前一期的估計報酬的風險選項中最接近真實報酬的選項。 輸：考慮排除本期選項的所有的選擇下更換不同的選擇	1
CAPlay2w			2
CAPlay3w			3
CAPlay4w			4
CAPlay5w			5
PCAPlay1	考慮透過主成份分析將總體經濟變數轉換成新	贏：維持與前期相同的選擇	1
PCAPlay2			2

PCAPlay3	的主成份得分，並視為風險因子。	輸：考慮排除本期選項的所有的選擇下更換不同的選擇	3
PCAPlay4			4
PCAPlay5			5
PCAPlay1w	考慮透過主成份分析將總體經濟變數轉換成新的主成份得分，並視為風險因子。	贏：修定選擇為使得超過前一期的估計報酬的風險選項中最接近真實報酬的選項。 輸：考慮排除本期選項的所有的選擇下更換不同的選擇	1
PCAPlay2w			2
PCAPlay3w			3
PCAPlay4w			4
PCAPlay5w			5

國立高雄大學 National University of Kaohsiung