

挑戰機率

黃文章

國立高雄大學應用數學系

民國九十一年一月起台北銀行發行公益彩券，盛行了幾期，要求降溫的聲音便不絕於耳。我們來看美國的情況。在 2000 會計年度，全美樂透彩券銷售金額達到 383 億美元，以二億四千萬人計，平均每人約買 160 美元，即約 5,600 台幣。單州銷售量最大的是麻薩諸賽州，該州有 635 萬人，但共賣出約 37 億美元。而個人買最多的為羅德島州，平均每人約買 823 美元，即約 28,800 台幣。台灣如果全年銷售 1,000 億元台幣，平均每人約買 4,300 元，尚較全美平均還低，更遠低於羅德島州。要知美國並非每一州均允許賣彩券，包含猶他州在內，有 13 州是不賣彩券的。

所以若與美國已經是穩定狀態的情況相比，台灣一開始的狂熱，即使不能說是小巫見大巫，也不須過度擔心。倒是因此引起普遍社會對機率統計的重視，進而較能以隨機的方式來思考問題，也是一個收穫。

一般樂透彩是從 1 至 n 的號碼中，任意挑選 r 個不同的號碼下注。我們稱此為 n 取 r 。台北銀行目前的版本為 42 取 6，與愛爾蘭及美國的一些州一樣。美國各州從 39 取 6 到 54 取 6 都有。世界各地樂透彩中獎的方式大同小異，均與台北銀行現行方式類似。每一期由具公信力的發行單位，隨機地產生 r 個號碼，就是頭獎號碼。頭獎中獎機率很低，以紐約州的 54 取 6 為例，只有 25,827,165 分之一，約為 42 取 6 的頭獎中獎機率的五分之一。台北銀行是以每一期總銷售金額的 56% 當作總獎金，頭獎獎金約佔總銷售金額的 17%，但因有普獎的關係，此比率每期會有些波動。一張彩券 50 元，其中便約有 8.5 元充做頭獎獎金。頭獎至肆獎若有數人同中，則均分該項獎金。

樂透彩對玩家而言，是一個不公正的賽局，平均每 100 元只能拿回 56 元。那為什麼還有這麼多人願意玩呢？主要的原因應是大獎的鉅額獎金吸引人。以「一券在手希望無窮」來形容尚不足，至少要加上「可以改變你的人生」。想想上億元的獎金是多少人一輩子不吃不喝也存不到的錢。再加上在樂透彩的賽局裡，投資可以很小，而且又眾生平等，每個人只要有 50 元便可進場。不論才智貧富，不需努力，每個人都可有相同的機會一夕致富。因此雖然數學的理論告訴我們，若找到一種每年投資報酬率為 15% 的投資方式，每月固定投資 1 萬 5 千元，則以複利計，30 年後本利和將超過 1 億元。但不少人還是寧願經由那 6 個號碼，來獲取 1 億元。要知 15% 的報酬率並非閉著眼睛便找得到，而 30 年也實在太長了，超過一般人願意的等待。在真愛一世情那部電影裡，茱莉亞歐蒙在布萊德彼特離家前對他說「不管多久，我會永遠等你。」幾年後彼特回來了，已嫁給彼特大哥的歐蒙，對前來看他的彼特，幽幽地說「永遠，實在是太久了。」

做莊的政府面對那些心甘情願的繳稅者，不禁樂在其中。英國學者伊文(C. H. L'E Ewen)曾說

國家徵收樂透稅， Lotto's a taxation,
愚人乖乖捧錢來， On all fools in the nation,

感謝讚美老天爺， But heaven be praised,
輕輕鬆鬆錢落袋。 It's so easily raised.

前面提過每期頭獎號碼是以隨機的方式產生。所謂隨機，乃表一組 6 個號碼，皆有相同的可能性出現。對於台北銀行的樂透彩，42 取 6 共有 5,245,786 組不同的號碼，每一組應皆有 5,245,786 分之一的機率出現。而且不同期之頭獎號碼應相互獨立，也就是互不影響。這是樂透彩與股市、賽馬等賭局不同處。一旦期數夠多後，發行的單位應做統計分析，以檢定歷來開出的頭獎號碼，是否以隨機的方式出現。光是檢查球的重量是不夠的。

如果號碼真的是隨機產生，那為什麼還有人追求明牌呢？坊間充斥著各種神樹牌、問神牌、解夢牌等，往往以心誠則靈做號召。但究竟有沒有效呢？連號的經常出現，頭獎號碼裡有重覆出現，有些號碼卻又一直未出現，這些均使人懷疑頭獎號碼的出現並非隨機，熱門及冷門號碼似乎是存在的。

上述這些問題，一方面可經由實際去計算機率而解惑。例如，每期頭獎 6 個號碼裡，會有連號之機率約為 0.56，有超過一半的機會。至於連續兩期，頭獎號碼有重覆的機率約為 0.63，而至少有兩碼重覆之機率約為 0.20。這些事件的機率均比我們想像中的大很多，所以發生是不足為奇的。何況大小大小有趣的事件其實很多，如 6 碼全為偶數，或 6 碼全在 1 至 21 等，即使每件事發生的機率不大，但因多少眼睛盯著那 6 碼，使得每一期總會讓人從 6 個中獎號碼中找到一些不尋常。另一方面我們要了解隨機的本質。將 10 個球隨機地丟進 10 個箱子中，你會不會以為每個箱子中各有一個球是最容易發生呢？非也！1 個空箱、2 個空箱，一直到 7 個空箱都比每箱中各有一球容易發生。以 5 個空箱來說，這個事件發生的機率，約為每箱中各有一球之機率的 354 倍。雖然是隨機地丟球，但結果是看起來不隨機的事件反較容易發生。這點違反一般人的直觀，其實仔細想想，每箱中要剛好各丟進一球才是高難度呢。大家應有底下的經驗：有時一天接到好幾通電話，有時連續幾天沒有一通電話，較少是每天接到一樣多的電話。這也是一樣的道理。

如果是每一組號碼中獎機率皆相同，那是否每次就隨便選 6 個號碼呢？樂透彩除了普獎(中三碼)是每人得 200 元，中四碼以上，皆是由中的人(或說中的號碼之擁有者)均分該獎之獎金。所以對同一獎項，中的人愈少，能分得的獎金便愈多。因此有底下兩個卑之無甚高論的規則。

1. 若簽兩注以上，不要有兩張超過三碼重覆。為什麼呢？我們以一極端的情況來說明。假設簽兩張號碼皆相同的注，則中頭獎的機率為 5,245,786 分之一，一旦中了，如果只有你一人中，你獨得該獎金，一人擁有兩張彩券並沒有幫助。若有另一人亦中，則你得三分之二的頭獎獎金，餘此類推。但若簽兩張不一樣的號碼，則中頭獎的機率為 5,245,786 分之一的兩倍，很容易看出此時中頭獎的獎金之期望值較大。前述較佳策略就是指所得之期望值較大的意思。要先提高中獎機率才有獎金可言。報載有人以包牌的方式花了一萬餘元，簽了 210 注，共中獎金 1 億餘元。如果你“確定”頭獎號碼就在某 10 個號碼中，則就用 10 個號碼去組合當然是好策略。但誰能事先打包票知道那 10 個號碼會涵蓋頭獎號碼呢？報紙只刊載包牌中大獎者，卻不登更多包牌而痛哭者。
2. 要儘量簽冷僻的號碼。德國樂透彩是 49 取 6。漢茲(見 Henze(1997)一文)曾對德國 1993 年 10 月 16 日那一期銷售的 6,803,090 張彩券做分析。並列出最

暢銷的二十組號碼。排名第一的是 7, 13, 19, 25, 31, 37, 共賣出 4,004 張, 排名第二的是 7, 14, 21, 28, 35, 42, 共賣出 3,817 張(這一組亦常是英國及美國加州最暢銷的號碼, 加州在 1988 年此組號碼全年共賣出 16,771 張。二地樂透彩皆是 49 取 6)。一直到排名 20 都還賣出 1,317 張。第一組是將 7 依序加 6, 第二組是將 7 依序加 7。這是很多人的習慣, 他們以為這樣子將數字分開最好, 殊不知人同此心。你看出問題所在了吧! 簽這種號碼, 如果幸運地中頭獎, 總獎金以 1 億元計, 每人只能分到兩萬多元。中獎者可能會從喜極而泣轉為悲從中來。曾有人研究購買樂透彩券者有三種型態: 第一種是簽注很明顯就是暢銷的號碼, 如上一期頭獎號碼, 或 1, 2, 3, 4, 5, 6 等。這種當然不是明智的選擇。另一種屬於較迷信者, 專簽諸如生日的排列組合。此情況可能會造成數字都偏小, 因此可能會有許多人與你簽的號碼相同(月份只有 1 至 12, 日期只有 1 至 31)。第三型就是較聰明的一類, 會儘量選非暢銷的號碼, 以免太多人來均分獎金。奉勸彩迷們, 對於各個神桌或土地公所提供的明牌, 務必敬而遠之。

期買幾張好玩就可以了。有人很豪放地拿出 10 萬元投入, 再將中的獎金繼續投入。你知道 1 個月也就是 8 期之後, 會成為多少嗎? 由於期望值是 0.56 倍, 花一百元平均只能拿回 56 元, 所以一期後, 約成為 $100,000 \times 0.56$ 元, 即 56,000 元, 兩期後約成為 $56,000 \times 0.56$ 元, 即 31,360 元。依此類推, 8 期後約成為 $100,000 \times (0.56)^8$ 元, 即約 967 元。10 萬元 1 個月後僅餘 967 元, 若投資 100 萬元則 1 個月後餘 9,670 元。玩樂透彩就如紅樓夢四十七回裡鳳姐所說「這一吊錢, 頑不了半個時辰, 那裡頭的錢就招手叫他了。」不要只看到有人僅簽一注或兩注便中了上億, 或上千萬元的獎金。這表示更多人是連五成六的本金都拿不回。這就是機率, 有東家長便有西家短。你可以拼經濟, 可以拼政治, 打口水戰也可以, 但千萬不要想挑戰機率。十年才能贏得青樓薄倖名。在樂透世界裡, 想跟機率拼的人, 只要 1 個月便可贏得公益名。

一些與彩券有關的機率, 可在「機率統計網路學習館」找到, 網址是 <http://probbat.nuk.edu.tw/>, 這是設在國立高雄大學應用數學系的網站。

進一步閱讀資料

1. 吳程遠譯(1999). 這個不科學的年代(Feynman, R. P. 原著: The Meaning of It All: Thoughts of a Citizen-Scientist)。天下遠見出版股份有限公司, 台北。
2. 葉偉文譯(2001). 統計改變了世界(Salsburg, D. 原著: The Lady Tasting Tea)。天下遠見出版股份有限公司, 台北。
3. 盛逢時譯(2001). 數字的陷阱(Bruce, C. 原著: Conned Again, Watson! Cautionary Tales of Logic, Math, and Probability)。時報文化出版企業股份有限公司, 台北。
4. 王業鈞譯(2001). 你賭對了嗎?(Bennett, D. J. 原著: Randomness)。新新聞文化事業股份有限公司, 台北。
5. Henze, N. (1997). A statistical and probabilistic analysis of popular lottery tickets. Statistica Neerlandica, Vol. 51, No. 2, pp. 155-163.