庶民中央極限定理

黃文璋

國立高雄大學
應用數學系，統計學研究所

統計科學營
2011年11月19日

中央極限定理，差不多是機率裡最重要的定理，怎會有庶民版？

那種庶民?

朱雀橋邊野草花，烏衣巷口夕陽斜，

舊時王謝堂前燕，飛入尋常百姓家。

唐 劉禹錫

烏衣巷

- 尋常百姓不尋常。
- 會來參加統計科學營者，即是庶民，

  尋常庶民！
- 臣本布衣，躬耕於南陽。

  布衣？


GS1527893K8
DEUTSCHE BUNDESBANK
10
ZEHN DEUTSCHE MARK
GS1527893K8


DEUTSCHE BUNDE
10

- 中央極限定理 ⇨ 常態分佈
- 機率密度函數

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ x\in R,$$

及其圖形出現在德國10馬克。

輸人不輸陣

- 民國95年後入學的高中生，高二下的數學，便有中央極限定理，及信賴區間。
- 99年後入學，中央極限定理及信賴區間，移至高三上。

- 在高中數學99課綱，附錄3.3“常態分布，信賴區間與信心水準的解讀” 中說：

  高中程度的統計推論只做隨機變數期望值的估計，它的背後理論是中央極限定理。要介紹中央極限定理，就需引入常態分布。此部分僅做通識性的介紹，以活動方式建立學生對於中央極限定理的直觀。對一固定的信心水準，給出信賴區間公式，再讓學生以亂數表模擬或實驗投擲正面出現為p的銅板n次，代入信賴區間公式，以說明信心水準的意涵；並以此解讀，何以大多數學生所得的信賴區間都會涵蓋p？

◆什麼是通識性？

◆聽到通識，你想到什麼？

- 高中為什麼要教中央極限定理？
- 是因為中央極限定理很重要嗎？

- 為了近似，先介紹中央極限定理，且僅考慮最簡單的情況，即伯努力分佈，及相關的二項分佈。
- 以民調當應用，因引入民調裡的信賴區間，才是介紹中央極限定理之主要目的。
- 民調的取樣，為簡單隨機抽樣，即取出後不放回。
- 取出後不放回，取出的樣本便不獨立。此時涉及超幾何分佈，而非二項分佈。要講清楚為什麼中央極限定理仍適用，不是那麼容易。
- 高中數學課本，寫到這裡，彆扭不產生也難。
- 或不講原因，讓細心的學生充滿疑慮；或講得一團混亂，製造出更多困擾。

- 鈔票能用就好。
- 課本看不懂，就有點難過了。
- 接觸信賴區間後，開始思索機率的含意。

何謂機率？

- 例1. 抽屜中有橘子及蘋果各一，老師拿一個放背後。
  問：是蘋果之機率為何？
- 例2. 投擲一公正的銅板，落地後蓋住。
  問：正面朝上之機率為何？

有人以為上述二機率皆

不是1就是0。

- 例3. 投擲一公正骰子，已知得到偶數。

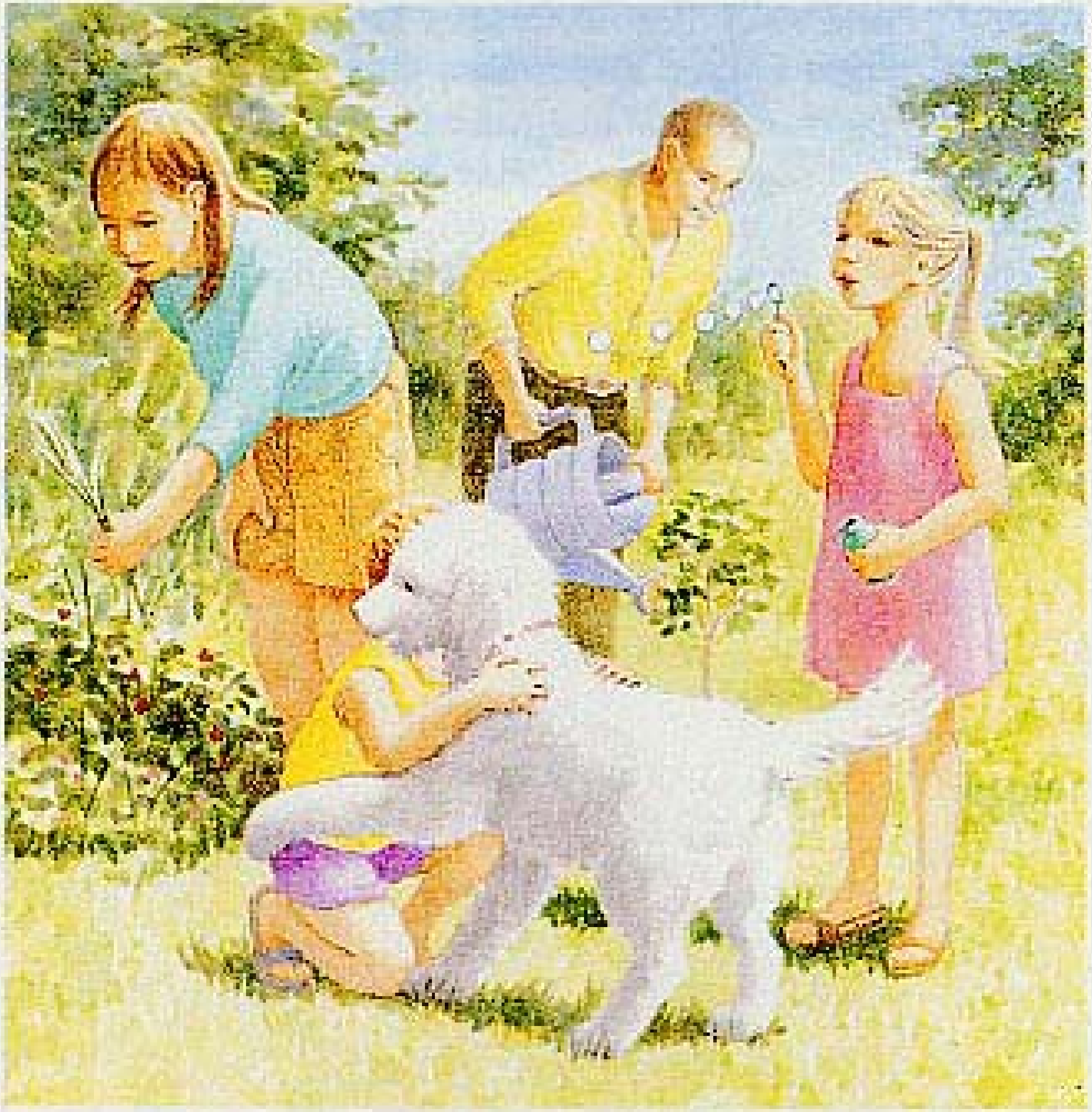
問：得到點數2之機率為何？


J
A
Jim Sturgess
Kate Bosworth
Laurence Fishburne
Kevin Spacey
21
INSPIRED BY THE TRUE STORY OF
FIVE STUDENTS WHO
CHANGED THE GAME FOREVER.
SPRING 2008

◆ 在決勝21點中，

有3扇門，其中1扇門後有汽車，另兩扇門後為山羊。你選擇第1扇門後，主持人打開第2扇，見到山羊。問你這時該不該換第3扇門？有位學生答

Yes, because my chance of getting the car will increase from 33.33% to 66.67% by switching from door 1 to door 3.



THE SMITH FAMILY
What is the probability that the kneeling child is a girl?

跪著的小孩是女孩之機率？

取自Scientific American 1996

在一篇機率或信心Q&A的文章

在某一次教師研習的綜合座談中，有老師提到以下的問題：

投擲1只骰子(傳統6面骰字，點數1, 2, 3, 4, 5, 6，點數1, 4為紅色，其他點數為黑色)，擲出1點的機率為何？若已知擲出的顏色為紅色，請問擲出1點的機率為何？

這個問題在學生沒有學過信賴區間與信心水準之前是沒有疑義的，還沒有擲出骰子前，擲出1點的機率是1/6；在擲出的顏色為紅色的條件下，擲出1點的機率為1/2。但學生學過信賴區間之後會說，不，老師，既然骰子已擲出，則骰子是1點的機率不是1就是0，不會是1/2或其他任何數字。

結果，學得越好的學生心中的疑惑卻越深。我們該如何回應這個學生？在條件機率的情境下，應該使用機率或信心？

Q&A作者如下回答：

擲一個公正骰子一次，出現一點的機率=1/6。這是由大數法則得到的，故以機率稱之。擲一個公正骰子一次，在已知出現紅色點數的條件下，出現一點的機率=1/2。這是由大數法則得到的，故仍以機率稱之。

- 大數法則，為機率中一重要定理。
- 學了信賴區間後，解中學的機率問題要用上大數法則？

殺雞焉用牛刀？

大數法則庶民化了嗎？

- 何謂公正骰子？
- 公正一詞乃口語，其含意為：

  骰子各面出現的機率相同，即皆1/6。
- 這是骰子公正下的結果，與大數法則無關。
- 說是由大數法則得到，不是事實，且易讓人對機率生畏。

- Q&A作者說學得越好的學生心中的疑惑卻越深，不就是因常看到這些夾纏不清的講法所造成？
- 前述Q&A所提出的問題，最後有句：

  在條件機率的情境下，應該使用機率或信心？
- 依題意，在擲出骰子的顏色為紅色之條件下，擲出1點的機率就是1/2。
- 條件機率的情境下？信心？

  令人更為困惑。

◆再來看：

骰子已擲出，則骰子是1點的機率不是1就是0，不會是1/2或其他任何數字

此Q&A中所提學生的困擾。

◆欲解惑，歸根究柢：

人們常在談機率，
到底機率的意義是什麼？

隨機現象

- 隨機現象，可談機率。未知現象亦可。

  有人敲門，是男是女？

  答：男女機率各1/2。

- 敲門者的性別確定。
- 但由於不知，對你而言，可能男可能女。
- 男女約各半，在無其他資訊下，1/2的機率產生。
- 與Q&A中，已知擲出的顏色為紅色(點數有1,4二可能)，則擲出1點的機率為1/2，原理一樣。

- 聽到門外傳來高跟鞋的走路聲：

  敲門者8成是女的。

  此即條件機率，給定的條件是敲門者穿高跟鞋。

- 有人的經驗是，男生也有不少穿高跟鞋者：

  女生的機率為0.6。

- 對同一隨機現象，每個人認定的機率，可以很主觀：

  主觀機率！

- 王建民下一場比賽贏的機率？

◆注意：

一旦門打開，見到門外那人，

則敲門者為女生的機率，不是1就是0。

◆若已看到女生(或男生)，還說女生的機率為0.8；或已假設骰子為公正，卻認為投擲一次後，會得到偶數的機率為0.7，便非在談機率。

類似例子

- 考試前一天仍可猜題，雖題目已出好。
- 比賽已結束。你猜王建民贏了沒有？
- 要不要賭新來的女老師有沒有男朋友？

◆畢達哥拉斯：

All is number

萬物皆數

⇨

All is random

萬物皆隨機

◆若擲兩面皆正之銅板，亦視為一隨機現象—退化的隨機現象。

幾種常見對機率的想法

- 一：

  骰子有6個面，基於相同的可能性(古典機率)，導致每個面出現的機率皆為1/6。

- 二：

  主觀的想法。覺得沒有道理那一面較易出現。

- 三：

  由過去多次投擲的經驗，觀察到骰子各面出現的相對頻率難分軒輊。

⋮

◆還有一種：

此為一假設

⇒

以公理化的方式引進機率空間

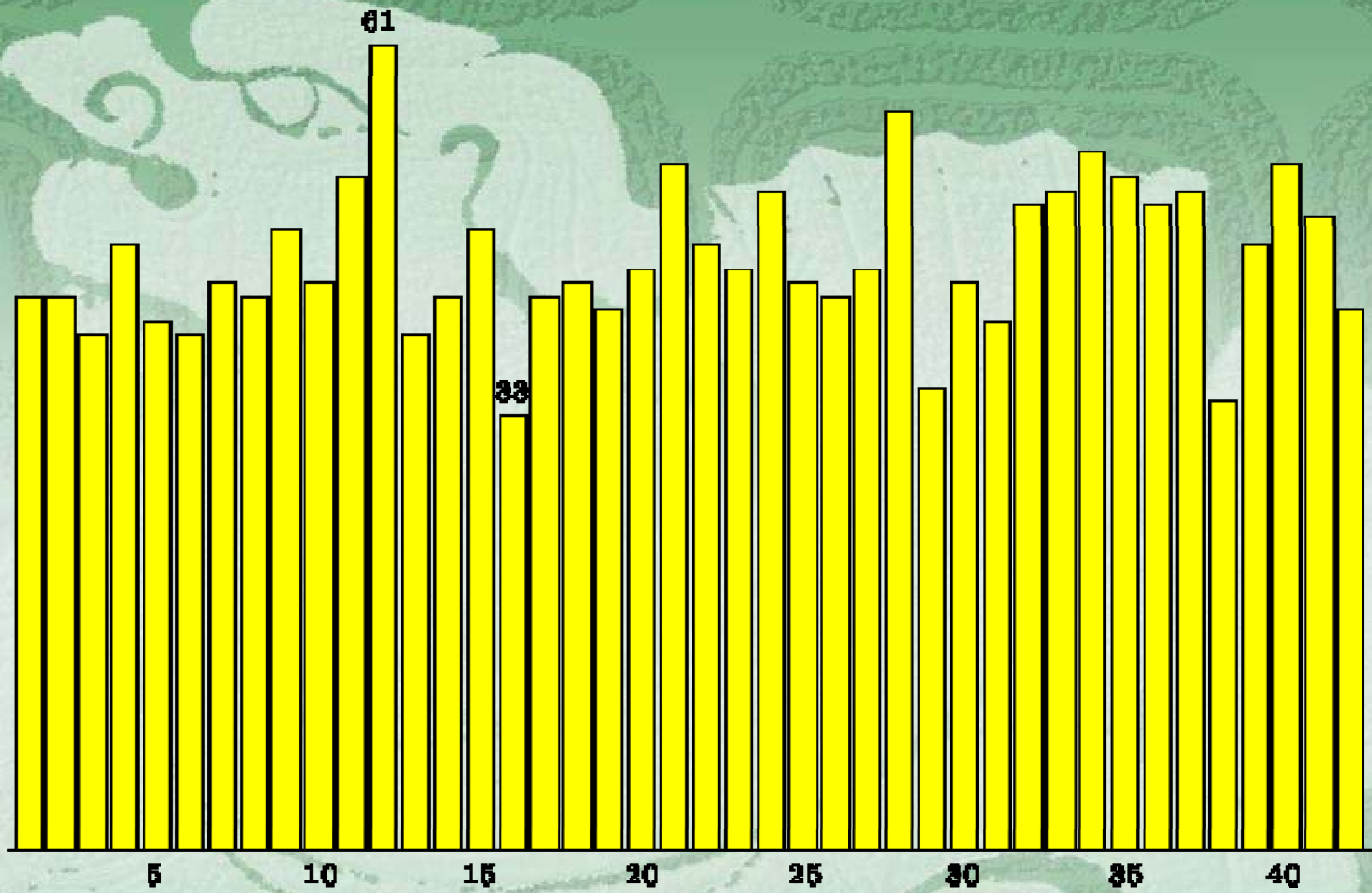
- 若真有一骰子，則不論基於那一種想法，究竟是否可採信骰子各面出現的機率皆為1/6？

做一統計檢定。

- 在上述第三種想法裡，骰子各面出現的相對頻率，是否夠接近到足以視為相等？

藉助統計檢定來判定。

- 在第三種想法裡，某面出現的機率為1/6，導致多次投擲後，該面出現的相對頻率將很可能接近1/6，反之亦然，使用到大數法則。
- 要有隨機的概念，即使公正的骰子，不論投擲再多次，各面出現的相對頻率，都很難相等。
- 有些人以為投擲數夠多後，會使各面出現的相對頻率相等，此為錯誤。



91.1.22~94.1.21共314期小樂透頭獎號碼
出現頻率

- 在隨機世界中，一切都是假設，看你接受那一個。

  我愛你，愛著你，就像老鼠愛大米。

- 法庭宣判被起訴者無罪：

  真無罪嗎？

- 骰子是否公正，不論投擲再多次，仍是天曉得。

假設檢定

- 統計檢定裡，依無罪推定的原則，及在給定所能容忍之犯錯機率下，有一套程序，以判定該接受或拒絕那一假設。
- 除非是退化的隨機現象(如銅板兩面皆為正)，否則不論證據再顯著(如投擲銅板100次都得正面)，其推論均可能犯錯。
- 僅能以較好的統計方法，減小犯錯機率。

什麼是公正銅板

- 投擲兩次出現一正一反？
- 陳宇慧(鄭丰，1973-)原有四個小孩：三男一女。為免小女兒寂寞，想多追一個女兒。

機率1/2。結果呢？

成為四兒一女，五個孩子的媽。

千萬不要輕易挑戰機率！

住在美國鹽湖城的貝茲夫婦結婚22年間，生了18個小孩，8個兒子、10個女兒。貝茲太太表示，她很喜歡生小孩，要再拼兩個男孩，湊成10男10女。

(取自每日郵報，2011年8月27日)

◆伯努力法則(Bernoulli law)：

獨立且重複地觀測一發生機率為p之事件A n次，出現$n(A)$次。當$n \rightarrow \infty$，$n(A)/n$接近p之機率，將趨近1。

機率趨近1？

◆ $n(A)$有 $B(n,p)$分佈。即

$$P(n(A)=k)=\binom{n}{k}p^{k}(1-p)^{n-k},\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n$$ 。

伯努力指出，當n很大時，$n(A)/n$與p之差距，應極可能很小。

- $n(A)$每回觀測都不盡相同。$n(A) = 0, 1, \ldots, n$。
- 投擲一公正銅板100次，100次全出現正面的機率很小，僅$1/2^{100}$。
- 重複執行此試驗(每回投擲100個銅板)2^{100}回，若出現一回100個全是正面，不用太奇怪。
- 如果做2^{110}回，平均可出現

$$2^{110}/2^{100} = 2^{10} = 1{,}024(\text{回})。$$

◆註1. 要完成2^{100}回投擲銅板100次並非易事。假設以電腦模擬，且1秒鐘可模擬1萬兆($=2^{16}$)回。1天有86,400秒，1年365天約有$3.1536 \cdot 10^{7}$秒。因此一年約可模擬$3.1536 \cdot 10^{23}$回。又

$$2^{100} \approx 1.2676506 \cdot 10^{30},$$

約要模擬$4.01969 \cdot 10^{6}$年。

◆野史裡偶有投擲出100個正面的記載，那些銅板當然都是特製的。

◆伯努力認為n很大時，$n(A)/n$與p之差應極可能很小。即只要n夠大，

$$|n(A)/n-p|\le\varepsilon$$

之機率應很大，$\forall\varepsilon>0$。

$$\sum_{|k/n-p|\le\varepsilon} P(n(A)=k)=\sum_{|k/n-p|\le\varepsilon}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\quad。$$

伯努力證明$n\to\infty$時，上式右側和趨近1。

◆後人利用柴比雪夫不等式(Chebyshev inequality)，可輕易地證出比伯努力更一般的結果。

- 大數法則可支持頻率對機率的解釋。
- 設有一銅板，出現正面的機率為p，只投擲一次，無法感受p的意義。
- 投擲數夠大，銅板出現正面的相對頻率，就很可能會接近p了。1928年，俄國機率學家辛欽(Khinchin)，證明對iid的隨機變數，只要期望值存在，大數法則便成立。
- 即對$n = 1, 2, \ldots$，設$X_1, \ldots, X_n$為iid，且$E(X_1)$存在，則

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} E(X_1)$$

- 期望值若不存在，大數法則就不適用了。
- 圖1給出當X_n, $n = 1, 2, \ldots$，為iid且以$Ber(1/2)$為共同分佈，$\bar{X}_n$之一模擬圖形，$n = 1, 2, \ldots, 1{,}000$。
- 對$C(2.5,1)$分佈，即機率密度函數為

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+(x-2.5)^2)},\ x \in R,$$

圖2給出 $\bar{X}_n$之一模擬圖形。

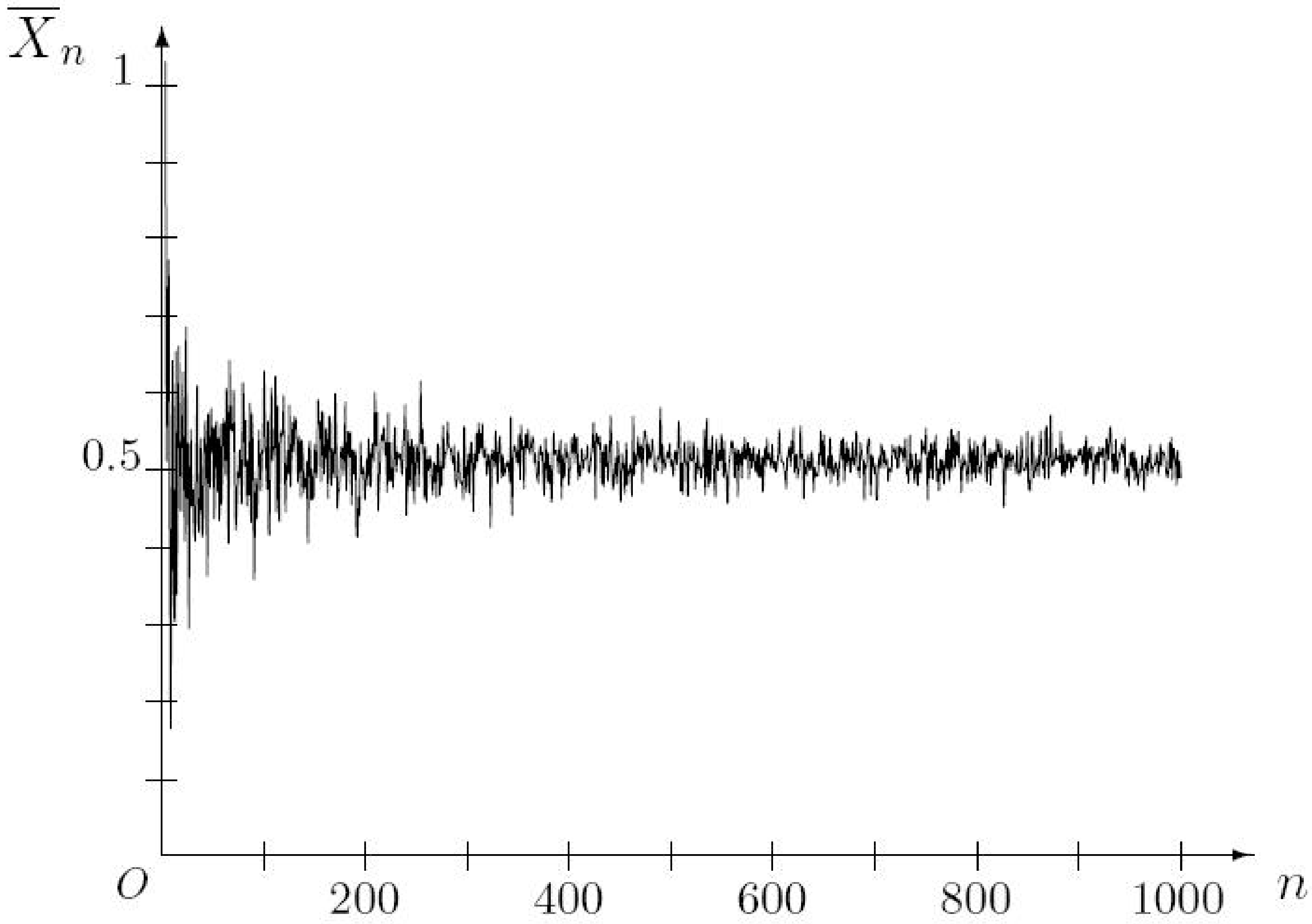


圖1. $\mathcal{B}er(1/2)$分佈$\overline{X}_n$, $1 \leq n \leq 1{,}000$, 之模擬圖

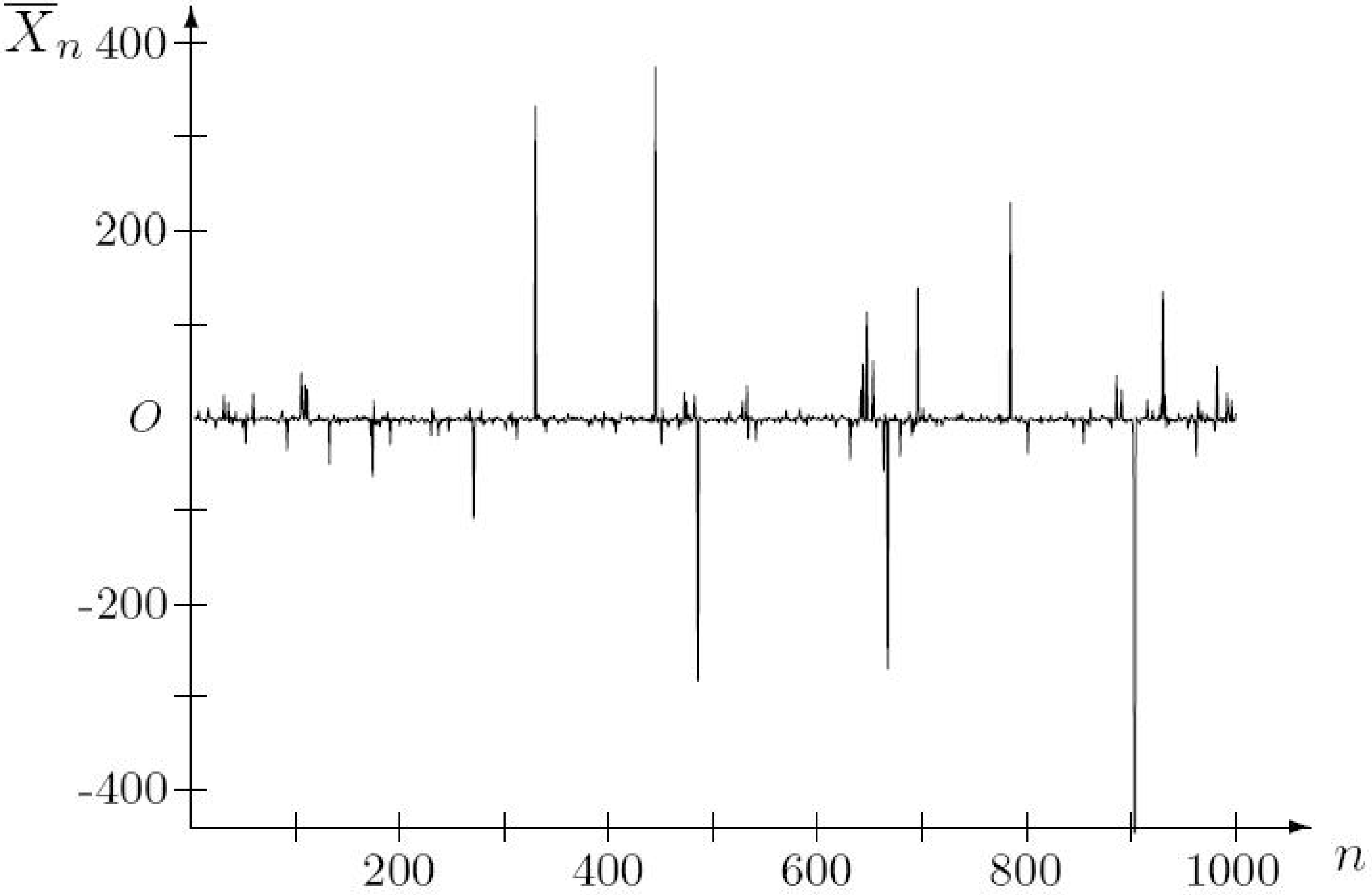


圖2. $\mathcal{C}(2.5,1)$分佈$\overline{X}_n$, $1 \leq n \leq 1,000$, 之模擬圖

中央極限定理

- 大數法則指出，n很大時，S_n/n差不多就是p：

  n夠大， S_n/n應有很大的機率在p附近變動。

  問：n很大時， S_n應很接近np？

- n很大時，雖S_n/n大致在p附近，但S_n卻很可能會愈偏離np。

◆對S_n有$B(n,1/2)$分佈，且n為偶數，利用史德林公式(Stirling formula)，得

$$P(S_n=\frac{n}{2})=\binom{n}{n/2}\left(\frac{1}{2}\right)^n\sim\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}},\ n\to\infty,$$

其中符號"~"表$n\to\infty$時，兩側比值趨近1。對二固定的整數 $0\le r\le s$當n很大時，

$$P(r\le S_n\le s)=\sum_{k=r}^{s}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

也將很小。

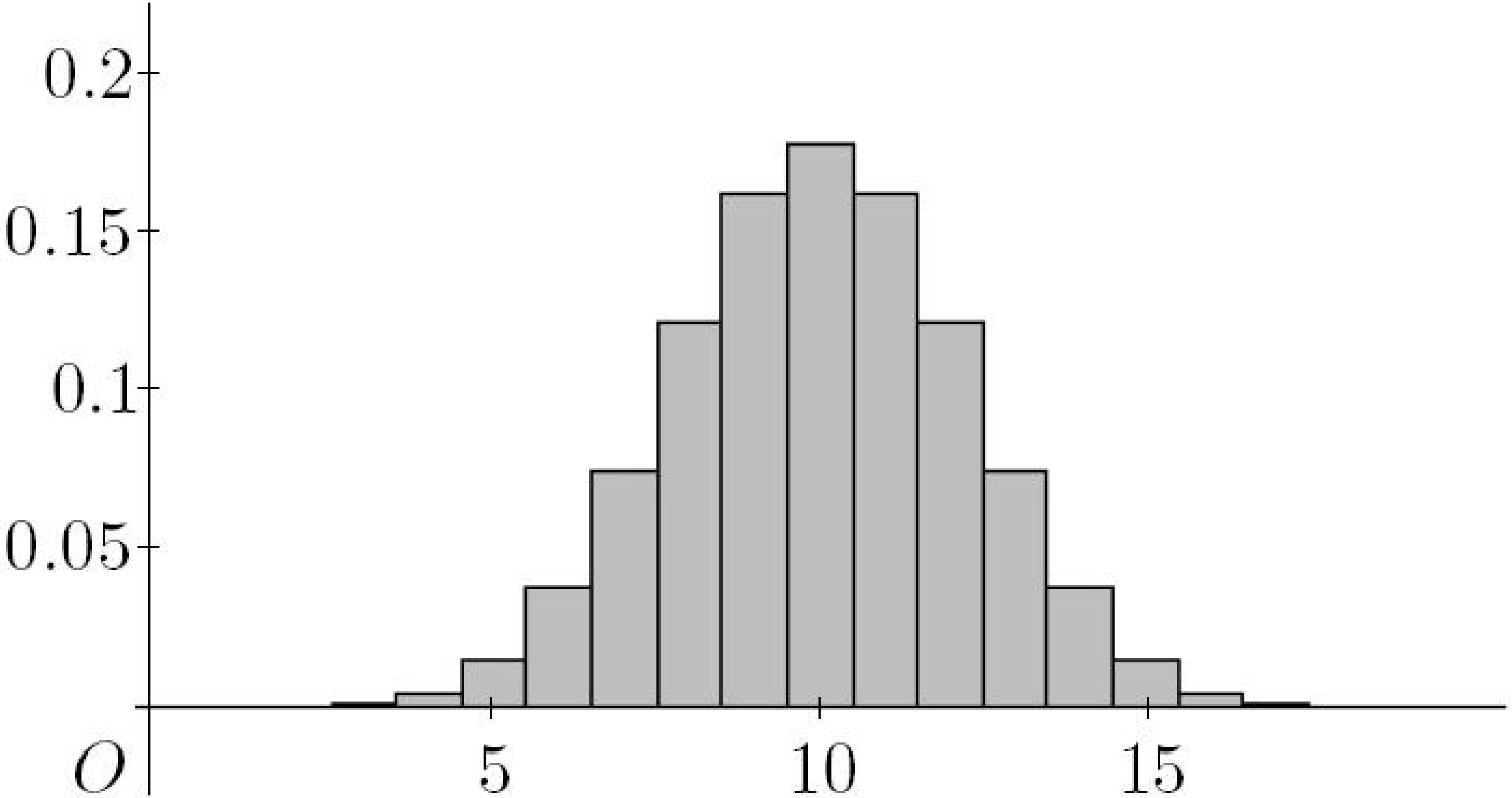


圖3. $\mathcal{B}(20, 0.5)$分佈直方圖

當n為偶數，對每一固定整數k，可得n很大時，

(1) $$P(S_n = \frac{n}{2} + k) \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}}$$ 。

除非在$n/2$附近有夠多的項，否則S_n落在$n/2$附近一區間$[n/2+a, n/2+b]$之機率將很小。即n很大時，

(2) $$P(\frac{n}{2} + a \le S_n \le \frac{n}{2} + b) = \sum_{k=a}^{b} P(S_n = \frac{n}{2} + k) \approx 0$$ 。

且由(1)式，所需項數，應須能與$\sqrt{n}$相匹比。

◆隸美弗(de Moivre)以適當的a_n, b_n取代(2)式中的a, b得到那些機率值的和，可表示為一個積分，並在1733年發表此結果，即中央極限定理的雛型。

◆拉普拉斯(de Laplace)在1812年推廣棣美弗$p = 1/2$的結果至一般的p。

◆19世紀結束後，中央極限定理的重要性，才被完全認識。

◆1901年，里阿普那夫(Aleksandr M. Lyapunov)，給出此定理較一般的敘述，及嚴密的證明。

◆對S_n有$B(n,p)$分佈，拉普拉斯證出，對α<β，$n \to \infty$ 時，

$$(3)\quad P(np+\alpha\sqrt{np(1-p)} \le S_n \le np+\beta\sqrt{np(1-p)})$$

$$\to \Phi(\beta)-\Phi(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta}\phi(u)du,$$

其中

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\phi(u)du,\ x\in R,$$

而

$$(4)\qquad \phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2},\ x\in R \text{ 。}$$

◆(4)式定義出一標準常態(以$N(0,1)$表之)分佈之機率密度函數。圖4給出其圖形，所謂鐘形曲線。圖形最高點發生在$x = 0$，其值為 $\phi(0) = 1/\sqrt{2\pi}$ ，約為0.39894。

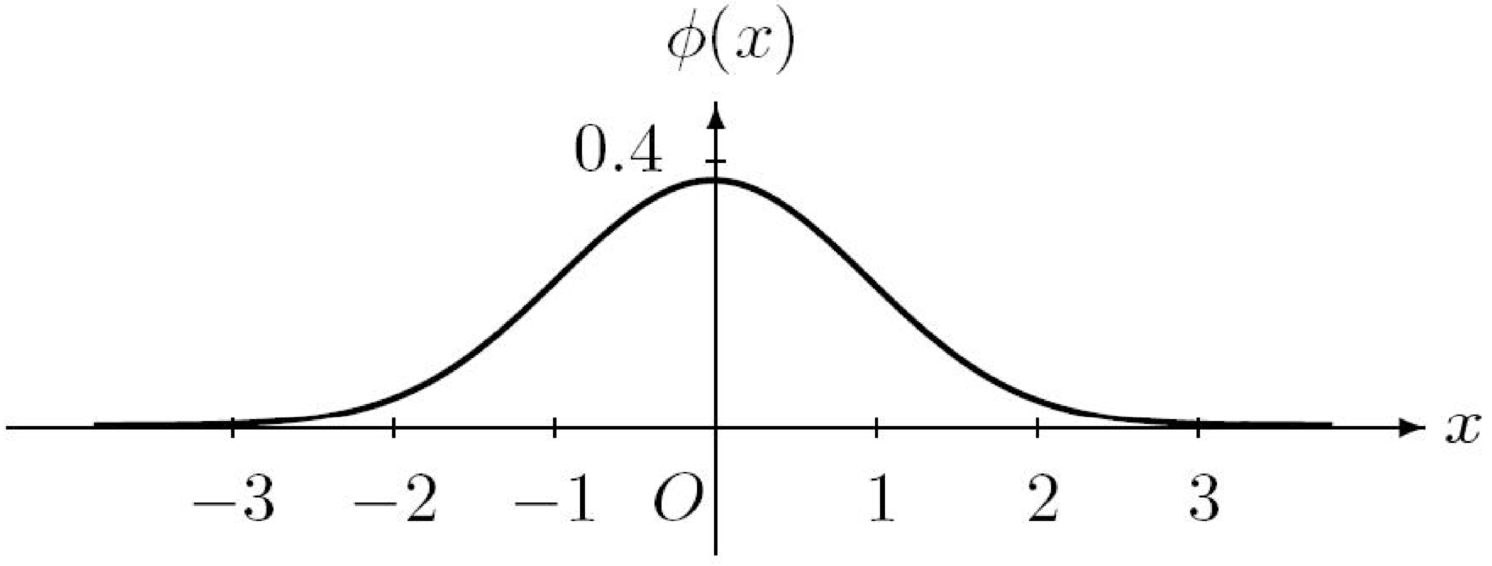


圖4. $\mathcal{N}(0,1)$分佈之機率密度函數圖形

◆(3)式之另一表示法為，當α<β，$n \to \infty$ 時，

(5) $$P\left(\alpha \le \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \beta\right) \to \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$ 。

二項分佈趨近至常態分佈。

- 對S_n有$B(n,p)$分佈，np，及$\sqrt{np(1-p)}$分別為S_n之期望值及標準差。
- S_n的核心np，隨著n之增大，已移至很遠處。
- 將S_n減去期望值np，則$S_n - np$的核心便成為0：有如座標平移。
- 再經改變尺度，單位長由1成為$\sqrt{np(1-p)}$，則S_n的直方圖，從np量起，α個標準差至β個標準差間，那些長方條面積和，可表為$\overline{X}_n$之圖形下與x軸間，介於$x=\alpha$至$x=\beta$間的面積。
- 隨機變數減去期望值，再除以標準差，稱為將其標準化。

- 隨機變數若有二項分佈，則可表為iid伯努力隨機變數之和。將其標準化後，會趨近至$N(0,1)$ 分佈。
- 只限伯努力隨機變數之和嗎？

- 中央極限定理說，若有夠多的iid隨機變數之和，經標準化後，當n很大時，可以$N(0,1)$分佈做為近似。
- 設對每一$n>1$，$X_1, \ldots, X_n$為iid，且$\mu = E(X_1)$，及$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$皆存在。則對$\alpha < \beta$，

$$(6)\quad \lim_{n\to\infty} P(\alpha \le \frac{X_1 + \cdots + X_n - np}{\sigma\sqrt{n}} \le \beta) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha),$$

$$\lim_{n\to\infty} P(\alpha \le \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le \beta) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)\ 。$$

n很大時，

$$P\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right|\le c\right)\approx 2\Phi(c)-1,\ c\ge 0,$$

$$P\left(|\bar{X}_n-\mu|\le \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}\right)\approx 2\Phi(c)-1,\ c\ge 0$$ 。

$$P\left(|\bar{X}_n-\mu|> \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}\right)\approx 2(1-\Phi(c)),\ c\ge 0$$ 。

$$P(|\bar{X}_n-\mu|>\varepsilon)\approx 2(1-\Phi(\varepsilon\sqrt{n}/\sigma)),\ \varepsilon\ge 0$$ 。

- 弱大數法則指出，對每一ε> 0，n很大時，$P(|\bar{X}_n-\mu|>\varepsilon)$將很小。究竟多小？

- 中央極限定理給出n很大時，

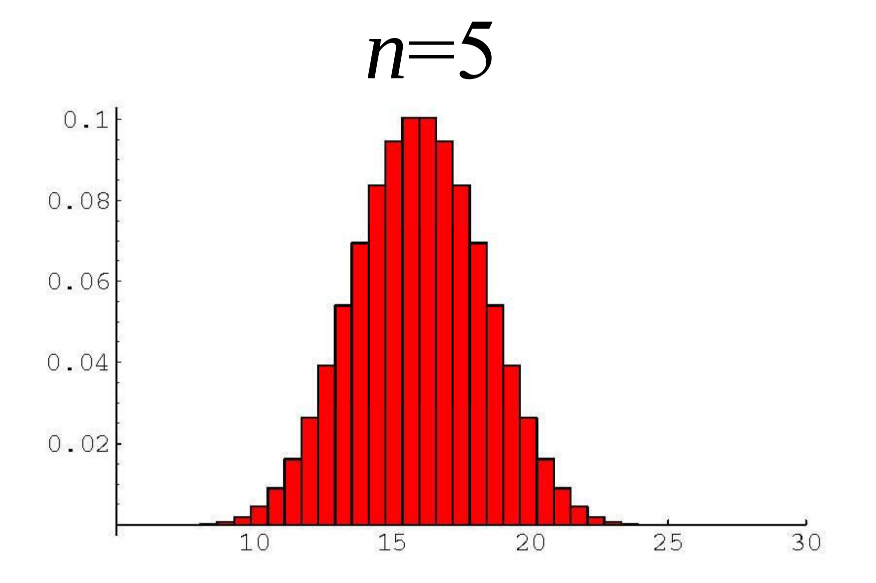
$$P(|\bar{X}_n-\mu|>\varepsilon)\approx 2(1-\Phi(\varepsilon\sqrt{n}/\sigma))$$ 。

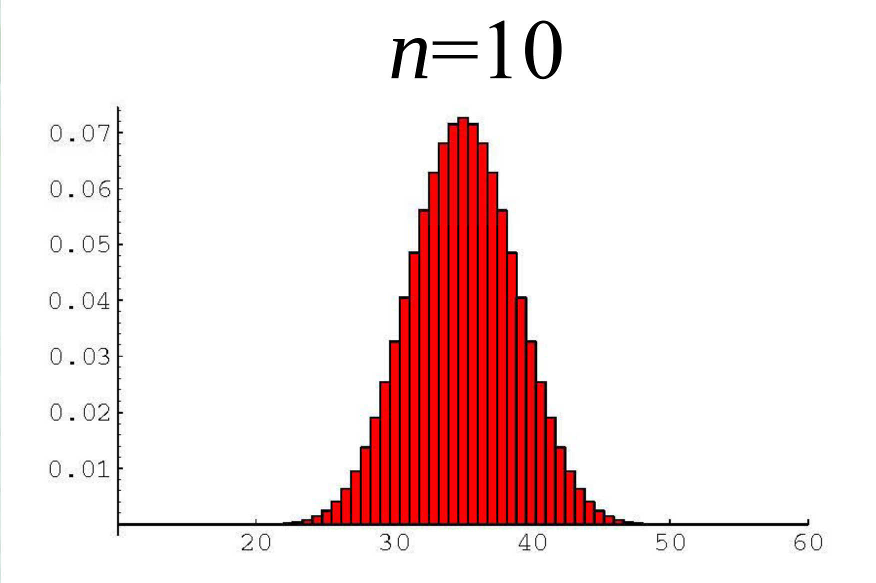
- 不論X_n, $n=1, 2, \ldots$，之共同分佈為何，都成立。

- 無法保證n很大時，$|\bar{X}_n-\mu|$ 不會超過ε，但只要變異數σ^2存在，則 $P(|\bar{X}_n-\mu|>\varepsilon)$的大小，便可掌握，即約$2(1-\Phi(\varepsilon\sqrt{n}/\sigma))\to 0$，當$n\to\infty$ 。

- 中央極限定理，有更一般的型式。獨立性及分佈相同的假設皆可放寬。
- 智商、身高，及膽固醇含量等，這些隨機的量，常可視為很多微小的隨機效應累積所造成，因此往往能用常態分佈來描述。
- 19世紀時，奎特雷(Quetelet)及高頓(Galton)，發現很多生物裡的特徵，其分佈皆符合常態分佈。這是此分佈被稱為常態的主因。
- 也隱含其他分佈不算常態。

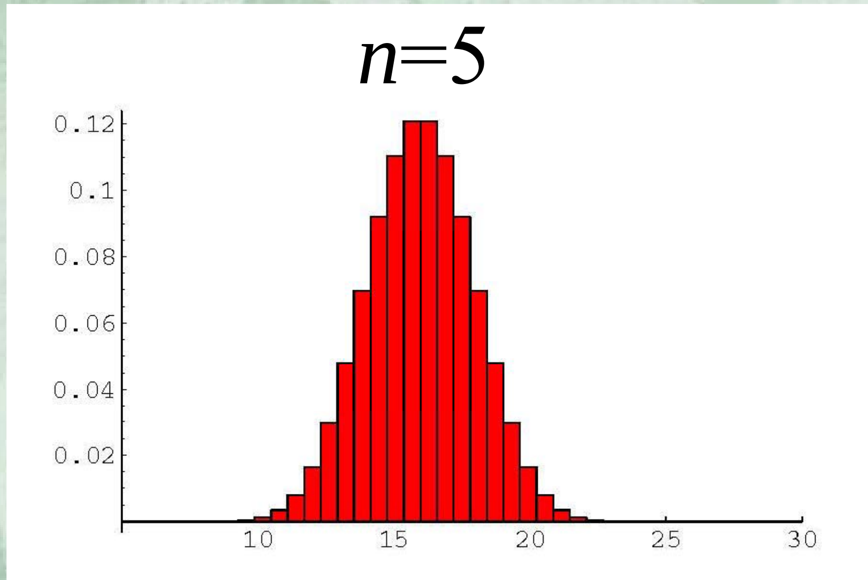
投擲骰子5次及10次所得點數和之直方圖

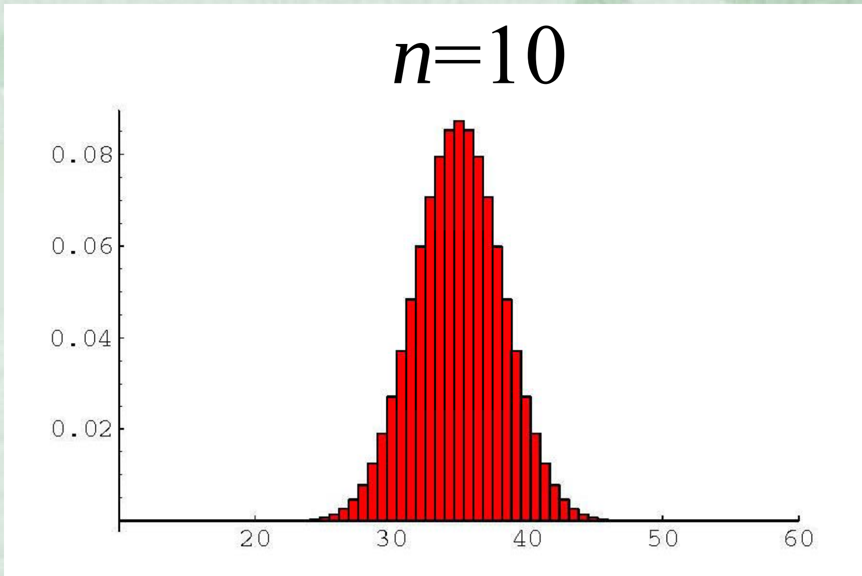




(a) $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = 1/6$

投擲骰子5次及10次所得點數和之直方圖



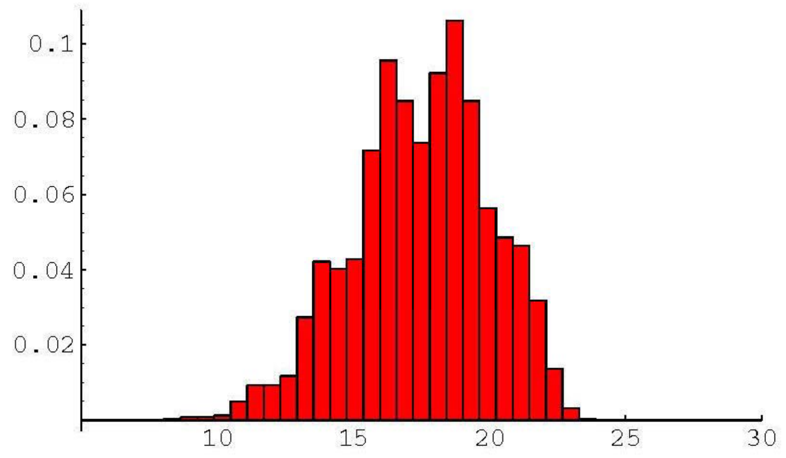


(b) $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.15$, $p_3 = 0.25$,

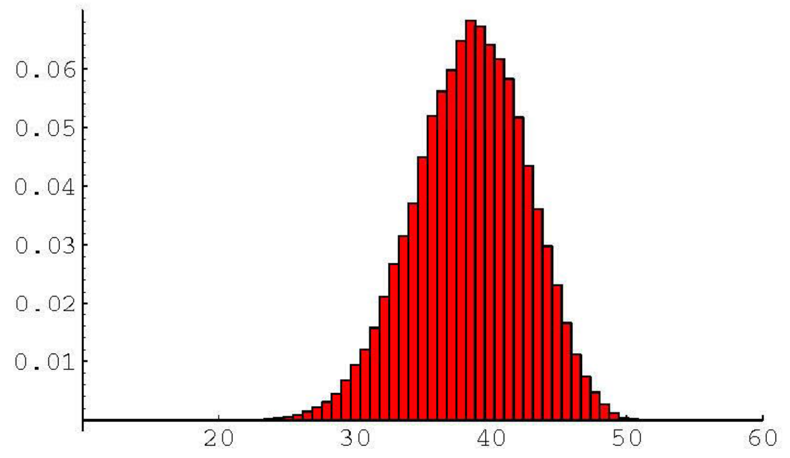
$p_4 = 0.25$, $p_5 = 0.15$, $p_6 = 0.1$

投擲骰子5次及10次所得點數和之直方圖

n=5



n=10



(c) $p_1 = 0.2, p_2 = 0.1, p_3 = 0,$

$p_4 = 0.1, p_5 = 0.4, p_6 = 0.2$

應用1：運氣好有罪嗎？

- 民國99年3至6月，有對夫婦共中了24張統一發票的普獎。
- 當年中獎率為0.003。
- 國稅局指出：

  24張中獎發票都在同一家便利商店開出，按照數學教授的計算，機率只有十億分之一，而且兌獎的發票也要夠多。

- 該夫婦質疑運氣好難道有罪嗎？國稅局採有罪認定？

◆若有8000張以上的發票，平均可中24張以上。

◆3至6月共122天中，一個家庭累積8000張發票，平均每天65張以上，且來自同一家商店？

◆該太太曾在這家便利商店上班，公司規定若侵占發票，將提出控告。

◆說不出口合法取得巨量發票，也不願承認發票是侵占，只能說運氣好。

這樣的運氣，好到什麼地步？

- 假設4個月內累積1000張發票，平均每天有8張以上。
- 至少中24張的機率有多大？
- 相當於重複做1000次試驗，各試驗相互獨立，每次成功(中獎)的機率為0.003，想要求成功24次以上之機率P。
- 成功次數X有B(1000,0.003)分佈。

$$P = P(X \geq 24)$$
$$\approx P\left(\frac{X-3}{\sqrt{1000 \cdot 0.003 \cdot 0.997}} \geq \frac{24-3}{\sqrt{1000 \cdot 0.003 \cdot 0.997}}\right)$$
$$\approx 1 - \Phi(12.14) \approx 3.2 \cdot 10^{-34}$$ 。

- 此值到底多小？
- 對42取6的樂透彩，每張彩券中頭獎之機率約為

524萬分之1 $\approx 2 \cdot 10^{-7}$。

$(2 \cdot 10^{-7})^5 = 3.2 \cdot 10^{-34}$。

- 有人宣稱他每期只買一張，卻連續5期中頭獎(機率 $\approx P$)，你相信嗎？

- 運氣好無罪。
- 在無罪推定之原則下，發生極不尋常的事件，當然會被高度的懷疑。

- 十億分之一的機率如何求出？
- 在不知擁有幾張發票下，並無法算出中獎24張之機率。
- 從籠統地說兌獎的發票也要夠多，我們合理的懷疑，新聞中那位數學教授，

唬人？虛擬？

- 在中學裡介紹中央極限定理，大抵僅針對二項分佈，底下為一些講法:
- 在參數是(n,p)的二項分布中，當試驗的次數n足夠大時，成功次數X的機率分布會近似於平均數μ為np，標準差σ為 $\sqrt{np(1-p)}$的常態分布。
- 當n足夠大時，二項分配的圖形近似一平滑的鐘形曲線，此時二項分配近似於常態分配。

- 可看出當n=32而p=0.5時，二項分配機率圖是對稱且呈鐘形，接近常態分配。…事實上，對任意$0<p<1$，由中央極限定理可知：n夠大時，X會接近常態分配。
- $\bar{X}_n$的相對次數直方圖長相非常接近鐘形。
- n夠大，隨機變數$\hat{p}= X/n$近似常態分布，其平均數μ= p，標準差σ= $\sqrt{np(1-p)}$…。
- 當樣本數n夠大時，$\hat{p}$的分佈會趨近於平均數為p，標準差為$\sqrt{p(1-p)/n}$的常態分佈。

這些都不太正確

- 所謂n足夠大，當然包含n無止盡地增大。
- 對$B(n,p)$分佈，不論p為何，n愈大時，S_n將很可能也是很大。
- 即$n \to \infty$時，S_n機率收斂至∞。
- 又$n \to \infty$時，S_n/n機率收斂至p。
- 因此說，n夠大時，S_n及S_n/n會分別近似那一常態分佈，都非正確。

- 隨著n之增大，$B(n,p)$分佈之直方圖，將愈趨貼近水平座標軸(想想最大高度趨近0)，怎會近似鐘形曲線？

- 至於n很大時，S_n/n的直方圖，將如底部中點為p之一座尖塔，高聳入雲，也絕不會讓人聯想到鐘形曲線或常態分佈。

S_n有$B(n,0.5)$分佈

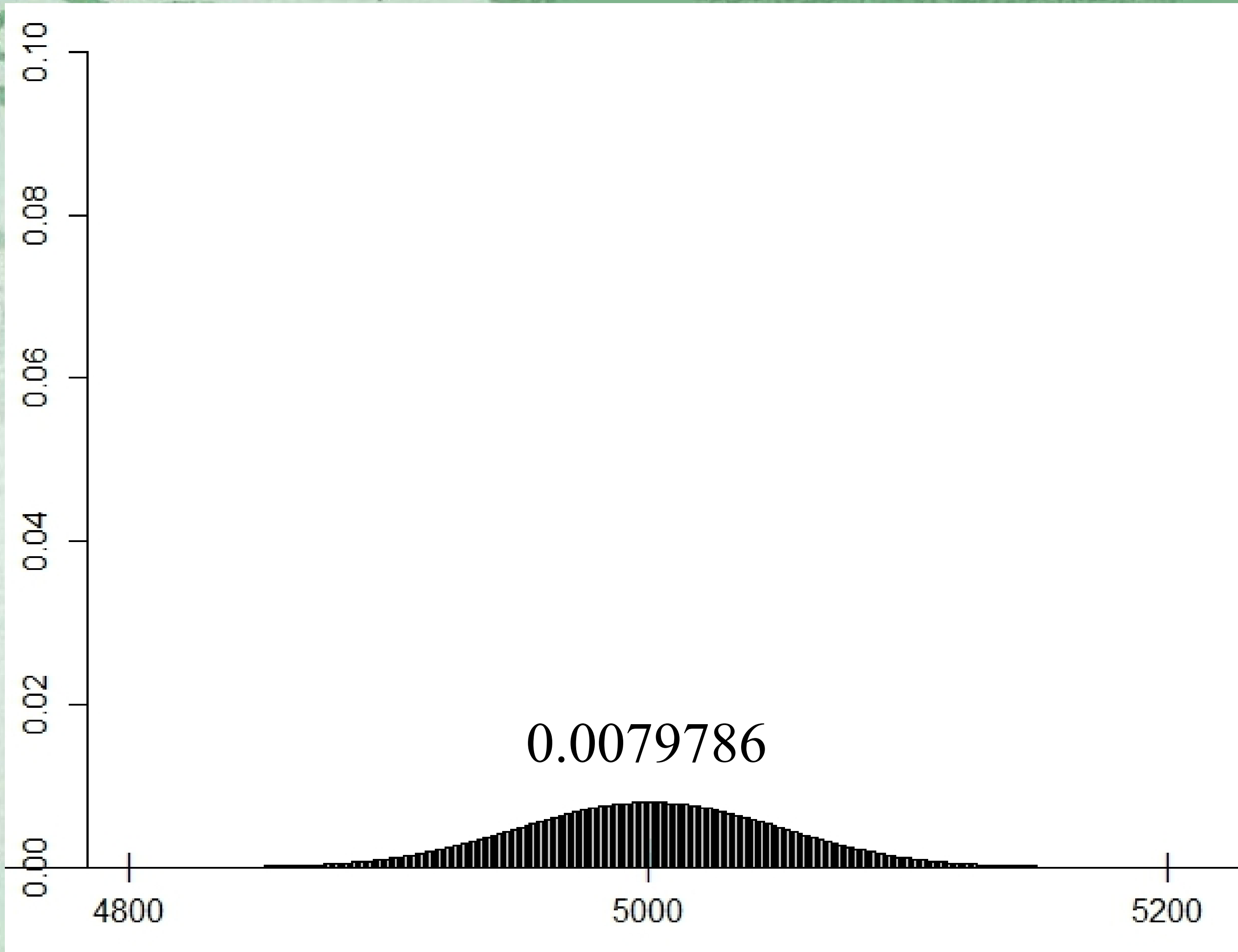


圖7. S_n之直方圖, n =10,000

S_n有$B(n,0.5)$分佈

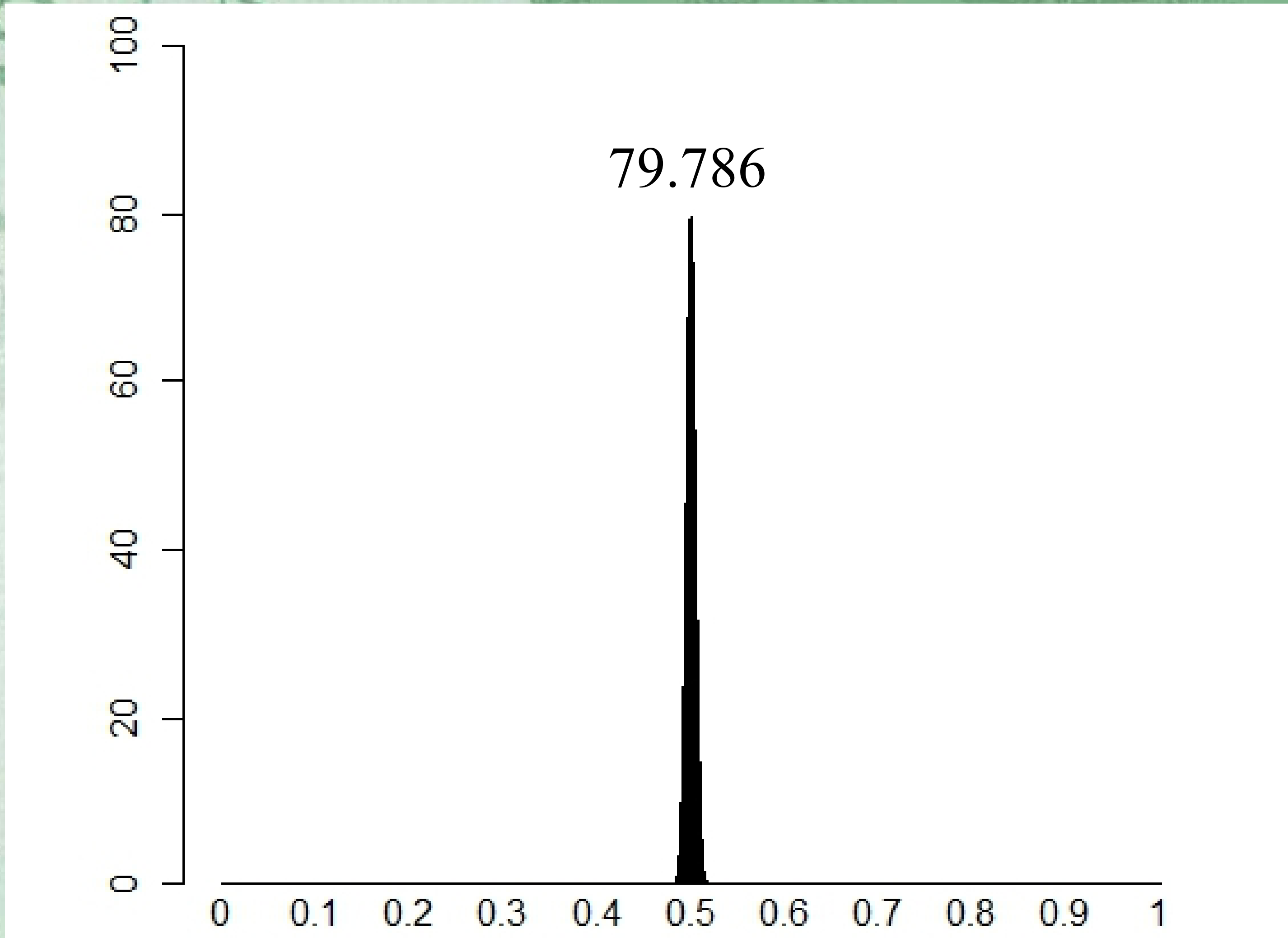


圖8. S_n/n之直方圖, $n = 10{,}000$

近似不能僅靠目測

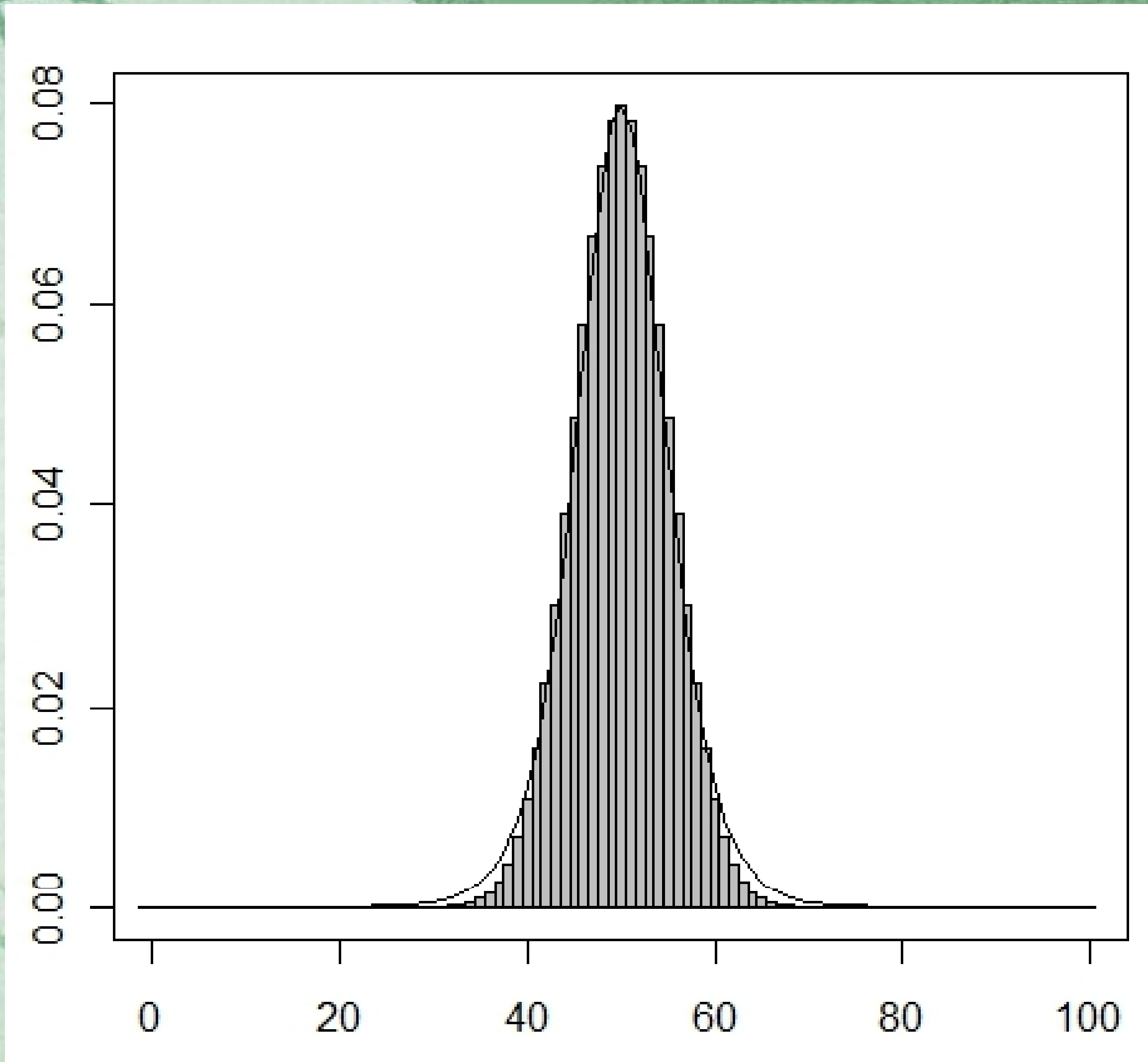


圖9. $B(100,0.5)$, $Logistic(50, 5\sqrt{2\pi}/4)$

$Logistic(\mu,s)$

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{-(x-\mu)/s}}{s(1+\mathrm{e}^{-(x-\mu)/s})^2},\ x\in R$$ 。

課本不能盡信

二項分配的期望值

在一伯努利試驗中成功的機率為 p，失敗的機率為 q，$(p+q=1)$.
若重複此試驗 n 次，則 n 次中成功次數的期望值

$$E=np.$$

例題 5

在同時丟 2 個硬幣的試驗中，把兩個硬幣都出現正面叫做成功．重複丟 2 個硬幣 100 次，求成功次數的期望值.

解：因為兩個硬幣都出現正面的機率為 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，

所以此試驗成功的機率為 $\frac{1}{4}$.

根據二項分配的期望值，重複此試驗 100 次，成功次數的期望值為

$$E=100\times\frac{1}{4}=25.$$ ☒

隨堂練習

在同時擲 2 個骰子的試驗中，把至少有一個出現 6 點的情形叫做成功．求同時擲 2 個骰子 30 次的試驗中，成功次數的期望值.

丙 二項分配與常態分配

假設硬幣都是勻稱的，投擲一硬幣 20 次，會出現幾次正面？根據二項分配，期望值 $E=20\times\frac{1}{2}=10$（次）．這是說當我們投擲一硬幣 20 次時，會恰好出現 10 次正面嗎？顯然未必如此.

現在讓全班每位同學都投擲一硬幣 20 次，可能有人擲出 8 次正面，也有人擲出 12 次．如果將每人所擲出的正面次數紀錄下來，那麼這些數的平

均值就會相當接近 10 次. **機率裡的期望值就是統計試驗中大量數據的平均值**. 藉由機率的模型, 統計學家也告訴我們：全班同學所擲的正面次數分布會近似於常態分配, 其平均數 μ 等於期望值 np, 標準差 σ 等於 $\sqrt{npq}$, 即

二項分配的平均數和標準差

將成功機率為 p 的伯努利試驗, 互相獨立的重複 n 次, 若 X 代表 n 次中成功的次數, 則當 n 夠大時, X的次數分布會近似於常態分配, 且

(1) 平均數 $\mu = np$.

(2) 標準差 $\sigma = \sqrt{npq}$. (其中 $p+q=1$).

例題 6

全校每位同學投擲一硬幣 20 次, 設 X 是每人所擲出正面的次數, 求 X 的平均數與標準差.

解：「重複投擲一硬幣 20 次」的試驗中, X 的次數分布會近似於常態分配, 其平均數

$$\mu = np = 20 \times \frac{1}{2} = 10.$$

標準差

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{20 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \sqrt{5} \approx 2.2. \qquad \boxtimes$$

在第四冊提及常態分配有一個特性, 它們都遵循 68 − 95 − 99.7 規則, 即大約 68%的數值落在距平均數 1 個標準差範圍內, 95%的數值落在距平均數 2 個標準差範圍內, 99.7%的數值落在距平均數 3 個標準差範圍內, 如圖 1 所示.

- 由於獨尊的名稱中央，與涉及的分佈名之為常態，有人誤以為機率統計裡只有常態分佈。
- 常態分佈雖無所不在，所謂萬物有常，在實務上，仍要謹慎判斷是否適合用來當模型。

- 2011年7月號科學月刊 “Hello Kitty”的數學一文：

$X_0+\cdots+X_{41}$，

$X_1, \ldots, X_n$獨立，

且$X_i \sim Ge((n\text{-}i)/n)$，$i = 0,\ldots,41,$

⇨ 根據常態分佈的50-68-95法則，…

- 並非任意獨立隨機變數和，當樣本數夠多，只要經標準化後，便可以常態分佈來近似。

有須滿足的條件。

常態分佈並非那麼無所不在！

◆有教科書說：

這類資料的次數分布圖呈現中間較高，且左右對稱的鐘形時,我們就稱這組資料呈現常態分佈。

◆亦有作者說：

分佈曲線都是呈現單一高峰的左右對稱曲線，這種曲線稱為常態曲線。

◆到底何謂鐘形?

◆常見分佈裡，便有好幾個也具“單一高峰左右對稱”的機率密度函數圖形。如柯西分佈，*t*分佈，拉普拉斯分佈(Laplace distribution)，及羅吉斯分佈(Logistic distribution)等。

◆僅就形狀而言，你能分辨C(0,1)分佈之機率密度函數圖形不像鐘形嗎？

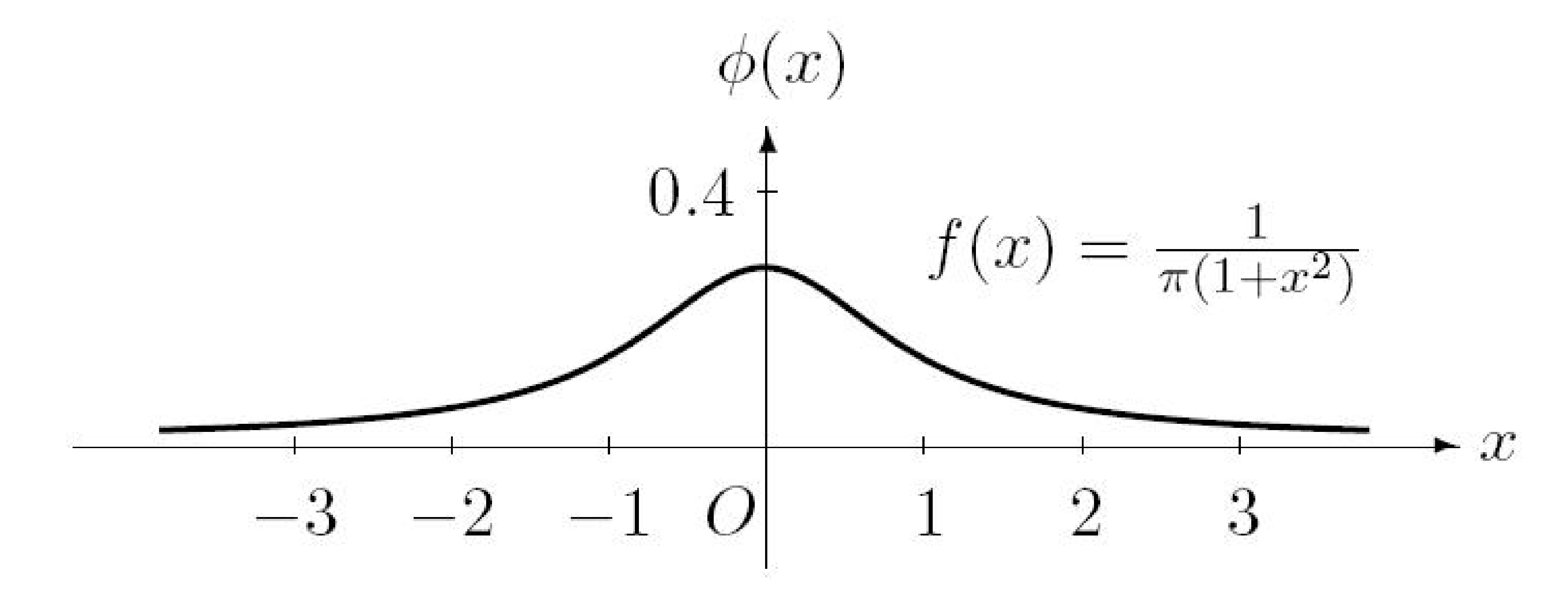


圖10. C(0,1)分佈之機率密度函數圖形

◆樣本數n為30以上，中央極限定理便適用？

◆假設X_i's之共同分佈為$Ber(0.02)$，且$n=100$。則$X_1+\ldots+X_{100}$有$B(100,0.02)$分佈。而$B(100,0.02)$之分佈可以$P(2)$分佈做很好的近似。

◆$P(\lambda)$表參數λ之波松分佈(Poisson distribution)，機率密度函數為

$$f(k)=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!},\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

◆$P(2)$分佈之直方圖，絕對不像常態分佈。

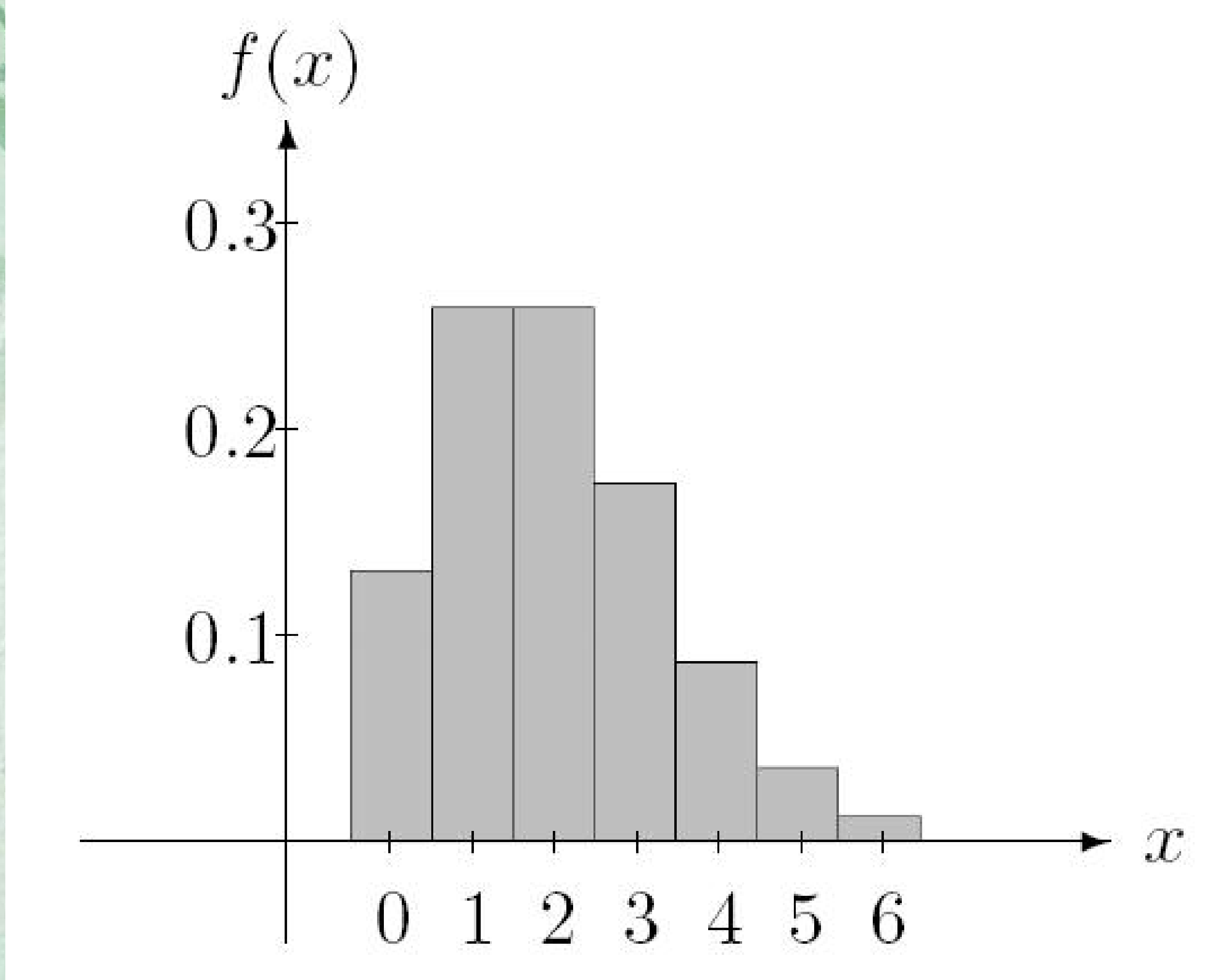


圖11. $P(2)$分佈之機率密度函數圖形

應用2

問：投擲一銅板若干次，正面數出現比率為50.114%，僅比50%略多，是否不足以推翻此銅板為公正？

解. 結論為何與投擲數 n 有關。

設X_1, …, X_n為i.i.d. $Ber(p)$分佈之r.v.'s。$E(X) = p$，$\text{Var}(X) = p(1 - p)$。欲檢定

$$H_0：p = 0.5 \text{，} H_a：p > 0.5 \text{。}$$

拒絕域為$\{\overline{X}_n > c\}$。由中央極限定理，

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \approx N(0,1) \text{。}$$

現觀測到 $\overline{X}_n = 0.50114$。

(1) $n = 13{,}000{,}000$。

$$
\begin{aligned}
p\text{-值} &= P(\overline{X}_n \geq 0.50114 | H_0 \text{為真}) \\
&\doteq P\left(Z \geq \frac{\sqrt{13,000,000}(0.50114 - 0.5)}{\sqrt{0.5 \cdot 0.5}}\right) \\
&\doteq P(Z \geq 3605.55 \cdot 0.00228) \\
&\doteq P(Z \geq 8.22) \\
&\doteq 1.03 \cdot 10^{-16} \text{。}
\end{aligned}
$$

此值微乎其微，故拒絕H_0，即認為銅板並非公正。

(2) $n = 1{,}000{,}000$。

$$\begin{aligned} p\text{-值} &= P\left(Z \geq \frac{\sqrt{1,000,000}(0.50114-0.5)}{\sqrt{0.5\cdot 0.5}}\right) \\ &= P(Z \geq 1,000\cdot 0.00228) \\ &= P(Z \geq 2.28) \\ &\doteq 0.0113\text{。} \end{aligned}$$

若$\alpha>0.0113$，則拒絕H_0，否則接受H_0。

(3) $n=10{,}000$會如何(實際 n 不可能為10,000，因 $\overline{X}_n$ 算至小數第5位值)？

$$
\begin{aligned}
p\text{-值} &= P\left(Z \geq \frac{\sqrt{10,000}(0.50114-0.5)}{\sqrt{0.5\cdot 0.5}}\right) \\
&= P(Z \geq 100\cdot 0.00228) \\
&= P(Z \geq 0.228) \\
&\doteq 0.40978\text{。}
\end{aligned}
$$

對大部分的情況下($\alpha<0.40978$)，皆接受H_0。

◆ 50.114%與50%差異是否夠大，與投擲數 n 有關！

n 愈大，此差異就可能夠大，

n 較小時，此差異可能不夠大。

◆ 換種說法，正面數比反面數多30,000是否夠多？

- 若對本演講有疑惑者，請讀庶民中央極限定理一文。
- 希望今日過後，我們皆是懂中央極限定理的庶民：

尋常庶民！

謝謝各位！