談科普寫作

黃文璋

國立高雄大學
應用數學系，統計學研究所

99年7月10日 於科工館

寫作

- 不分中外，自古即知發表著作之重要。
- 即使刻在竹簡，或寫在羊皮上，也要將想法留下來。
- 論語、孟子、幾何原本、聖經、史記、…。

立德、立功、立言。

孔子為何作春秋？

- 在史記太史公序：
  - 我欲載之空言，不如見之於行事之深切著明也。…。故作春秋，垂空文以斷禮義，當一王之法。
- 想藉文字，來斷定人事的合不合禮義，當做天子的法度。

司馬遷為何作史記？

- 報任少卿書，自述作史記動機：
  - 意欲以究天人之際，通古今之變，成一家之言。草創未就，會遭此禍，惜其不成，是以就極刑而無慍色。僕誠以著此書，藏諸名山，傳之其人，通邑大都。則僕償前辱之責，雖萬被戮，豈有悔哉。

有效流傳

- 注疏。
- 傳抄、印刷。胡適：
  - 紅樓夢最初只有鈔本，沒有刻本。
- 選輯：唐詩三百首，古文觀止，四庫全書，…。
- 孔子刪詩書，訂禮樂，贊周易，作春秋。

…

- 網路。

科學

- 古人不乏上通天文，下通地理者。
- 亞里斯多德(西元前384-322)，著作包含：
  - 物理、生物、動物學、邏輯、政治、哲學、倫理、修辭學、詩歌、戲劇，…。
- 達文西(1452-1519)：
  - 建築師、解剖學家、藝術家、工程師、數學家，…。

為何需要科普作品？

- 科學愈分愈細。有史以來三大數學家：

  阿基米德、牛頓、高斯，

  在物理學亦有很大成就。

- Poincáre(1854-1912)：
  - 最後一位興趣廣泛的數學家。

    今日少有博士，專士就已很了不起！

- 英國劍橋大學學者史諾(Charles P. Snow, 1905-1980)，提出兩種文化：
  - 我曾與一些人聚會。他們均受過高等教育，並一直對科學家的無知，感到難以置信。有一兩次我被激怒了，於是質問他們之中，有多少人能解釋熱力學第二定律。令人沮喪的，也同樣沒有。
    然而我問的這一問題，大概就是將“你讀過莎士比亞嗎？”轉用科學語言描述而已。

現在我相信，如果我當初問的更簡單，例如，你認為質量、加速度是什麼？即與“你能閱讀嗎？”這一問題轉為科學語言後等價。但這些受過高等教育的人中，不會有超過十分之一，會認為我在表達同一意思。所以說，當現代物理學的大廈不斷增高時，西方世界中，大部分最聰明的人，對其理解，仍如他們新石器時代的祖先一樣。

- 史諾批評英國政治人物，多數為人文學界出身，對科學一竅不通，由這群人制定國家政策是很危險的。
- 史諾也批評科學家輕視人文。

科普寫作原則

- 科學、普及、寫作。
- 先確定主要閱讀對象：

  下里巴人？陽春白雪？
- 正確、可讀。
- 取之不盡的題材。
- 觀點要能被接受。

題材俯拾即是

- 電梯由21樓墜到地下4樓。

問：掉了幾樓？

◆某大學應用數學系，民國76年成立，95年慶祝成立20周年。

人人需要科普！

數學應用不易

南方壺

位於台中的中國醫藥大學附設醫院，於 9 月 8 日那天發生電梯墜落的意外事件。有一台電梯，從 21 樓墜到地下 4 樓。受困的 21 人，全為該醫院的醫師，其中兩名醫師還因此腿部骨折。隔日中國時報對此新聞所下之標題為：

中國附醫電梯墜落 25 層樓　21 醫師驚魂。

電梯由高處墜下雖令人驚魂，不過從 21 樓墜到地下 4 樓，卻不是墜落 25 層樓，而是 24 層。你只要想由 2 樓墜到 1 樓，只墜 1 層，因此由 21 樓墜到 1 樓，是墜了 20 層。再往地下墜 4 層，20 加 4，共墜了 24 層。要注意台灣一般大樓並沒有第 0 層。

假設你去某百貨公司，車子停在地下 4 樓的停車場，而你要去的是 3 樓。久等電梯不到，乾脆走樓梯。共爬了幾層？雖然爬了很辛苦，但卻不是爬 7 層。而是 4 加 2，共爬了 6 層。

其實上述問題，與大家在小學數學裡，應都學過的植樹問題相關。也就是告訴你一條路有多長，及每隔幾公尺種一棵樹，問共種幾棵樹？可分兩端種，兩端不種，一端種一端不種，還有種在長方形邊上等各類型。不算太難，想通後要算對，只需細心而已。小學時大部分的人都會，只是長大後

就不太會了。但不要以為前述計算錯誤，只是一般人才會犯的錯，數學家也高明不到那裡去。

有一所研究型大學的應用數學系，研究相當突出，論文發表數頗驚人。該系於民國 95 年 11 月校慶時，興高采烈地號召歷年畢業系友回來，以慶祝該系成立 20 周年，並藉此機會成立系友會。該系創於民國 76 年，先成立研究所碩士班，接著大學部於 79 年成立，博士班則於 83 年成立。但 76 年至 95 年，怎會成立 20 周年呢？因 77 年時是成立 1 周年，78 年時則是成立 2 周年，餘依此類推。至民國 95 年，95 減 76 等於 19，是成立 19 周年，而非 20 周年！這屬於植樹問題一端種一端不種的一類。雖是熱情邀約，但畢竟學系究竟成立幾周年，還是要正確。總不能像百貨公司的“周年慶”，只是為了促銷，一年慶祝兩次都無妨。雖自知多事，仍告訴他們。後來該系成立“20 周年”的大會如何進行，就不便多問。只是不知怎的，因這 20 周年慶，我一直想到“郢書燕說”這個典故。

最近我又看到該系 97 年 8 月出版的一份資料，其中有一段“至今已有大學畢業生十四屆共 xxx 位，碩士班畢業生十九屆共 xxx 位，博士班畢業生 xx 位”。這兩個屆數，又讓我特別留意。一方面是資料為 8 月出版，一方面是由於已畢業的博士並非太多，資料中所有博士班畢業生的姓名及畢業年等全都列出，因此的確是統計到今年 7 月底。那屆數怎會對呢？大學部成立於 79 年，要讀 4 年，83 年產生第一屆畢業生，84 年第二屆，至 97 年（這屬於兩端都種的一類），

97 減 83 再加 1，共有十五屆畢業生。至於碩士班要讀 2 年，76 年成立，78 年產生第一屆畢業生。至 97 年，共有二十屆（97-78+1=20）畢業生。原來上回對於成立幾周年，多算了一年，這回畢業幾屆，則大學部與碩士班，都各少算一屆。

看來不用太高深，即使簡單的數學，要正確應用，也都不算容易。 (97.09.11)

- 文章本天成，妙手偶得之！
- 留意生活中的事物，媒體資訊，…。
- 閱讀國內外通俗性刊物。
- 改寫，闡釋其中原理，釐清一些概念。

小題可以大作！

Poincáre是誰？

解百年難題
俄數學奇才拒領百萬美元

美國麻州劍橋克萊數學研究所1日宣布，解開百年數學難題“龐加萊猜想”（Poincare conjecture）的43歲俄羅斯數學奇才裴瑞曼，拒領頒給他的100萬美元“千禧獎”。

號稱世上七大數學難題之一的龐加萊猜想，是法國數學家Henri Poincare1904年留下的。裴瑞曼早於2003年在網路上發表其解法，赴美演說後即遁隱聖彼得堡林間。今年3月，學界證實裴瑞曼之解法正確，克萊數學研究所決定頒獎給他，但他並未出席6月的頒獎典禮。

該所所長卡森認為此事不足為奇，因為裴瑞曼2006年也曾拒領有數學諾貝爾獎之稱的費爾茲獎。裴瑞曼說，美國哥倫比亞大學數學家漢彌頓，對證明這道難題同樣有貢獻。他利用漢彌頓研發的技巧，得以解開此一難題。裴瑞曼表示“我跟數學圈看法不同。我不喜歡他們的決定，我認為他們不公平。”

待業中的裴瑞曼和老母住在聖彼得堡市郊的小公寓。他曾拒絕數所美國頂尖大學的延聘。他說“我想要的東西都已得到了。”

【2010/07/03 聯合報】

- 龐加萊猜想：“在三度空間裏，任何封閉的、單一連結的流形（manifold），和三度空間的球同胚（homeomorphic）。簡單地說，就是“任何沒有破洞的封閉三度空間物體，都可以揉成一顆球。”

新聞中的科學》世界杯想賭贏 搞懂機率唄

【本報記者李名揚】

世界杯足球賽進入最後關頭，全世界的賭徒也為了輸贏賭盤、各隊封王的賠率絞盡腦汁，到底賭盤賠率是怎麼算出來的？為何有時會開出「買1賠1000」這種誇張賠率？

賠率 如何算出的？

高雄大學副校長黃文璋表示，不論是兩隊交手賭其中一隊贏，或是在進入世足的32隊中，賭某一隊最後會獲得冠軍，開賭盤的原理都一樣，就是先估計某隊獲勝（或拿冠軍）的機率，再往回推。

例如在一開始的32隊中，估計巴西隊獲得冠軍的機率為30%，可假設10個賭客中，有3個會買巴西隊，7個買別隊；若每人賭注都是100元，當巴西隊真的獲得冠軍時，由這3個人均分全部賭金1000元，於是每人可分得333元，也就是「買1賠3.33」。

不過，這是假設莊家純服務、不賺錢的情況，才會開出這種賭盤；實際上由於莊家要從中獲利，所以開出的賠率，會比3.33少，可能是「買1賠3」，這樣賭贏的3個人各獲得300元（扣除自己賭資100元，實際上只贏200元），剩下的100元就進了莊家口袋。

賠率=1／奪冠機率

賠率的計算，就是「賠率=1/奪冠機率」，相反地，已知賠率，也可用「奪冠機率=1/賠率」算出奪冠機率；若只是兩隊交手賭輸贏，算法也相同，只是把「奪冠」改為「獲勝」。

例如十六強賽巴西對迦納那場，巴西賠率是「買1賠1.25」，迦納賠率是「買1賠10」，就可算出莊家認為巴西獲勝機率為1/1.25，也就是80%，而迦納獲勝機率只有1/10，也就是10%。

猜兩隊交手輸贏和32隊賭奪冠，有一點最大不同，就是只有兩隊時，因為賭盤有勝、負、和三種可能，所以這三種賠率至少有一種賠率要低於3；因為若三種賠率都大於3，賭客只要花三倍錢，同時為勝、負、和下相同賭注，不管結果如何，都可獲得三倍以上的彩金，一定會賺錢。

賭32隊誰奪冠，因賭贏的機會從1/2變成1/32，機率降低，賭贏的彩金就會增加；例如這次世界杯賽前開出的賭盤，奪冠賠率最低的巴西為「買1賠2.5」，其次的英格蘭、德國和阿根廷，都是「買1賠8」。

賠率高 奪冠機率小

若想一夜致富，就不能押這些強隊奪冠，得賭安哥拉、多哥、沙烏地阿拉伯或千里達，賠率高達「買1賠1000」，不過這也代表這些球隊奪冠機率只有0.1%，贏錢機率非常低。

不論兩隊交手賭輸贏或32隊賭奪冠，理論上參賽球隊的勝率相加，應該等於1，但實際上莊家要靠此賺錢，所以勝率相加會大於1，再計算賠率；這樣即使某次或某場比賽爆出冷門，使莊家虧錢，但長期下來，莊家還是會賺。

莊家還會視下注情形，隨時調整賠率，黃文璋舉例說，若莊家開巴西「買1賠10」，賭客必然搶著下注，莊家很可能虧錢，若開「買1賠2」，又可能沒人下注；所以莊家會上下調整到大家都願意下注、莊家又不容易虧錢的賠率。

國家	巴西	阿根廷	德國	英格蘭	義大利	法國	葡萄牙	烏克蘭
賠率	1賠3.25	1賠4.5	1賠5.5	1賠6.5	1賠7.5	1賠12	1賠17	1賠51
換算奪冠機率	31%	22%	18%	15%	13%	8%	6%	2%

8隊奪冠機率相加為1.15，大於1。若賭客根據奪冠機率，同時下注巴西31元、阿根廷22元……，共需花費115元。不論那一隊奪冠，賭客都可贏回100元，一定虧15元，也就是莊家賺15元。

情況	巴西勝	平	法國勝
賠率	1賠1.8	1賠2.8	1賠4.5
換算發生機率	56%	36%	22%

莊家預估每114人中，有22人買法國隊贏，但因太多人看好巴西隊，結果只有10人買法國隊贏，莊家收入114元，只需付出45元。

製表／李名揚

【2006-07-05/聯合報/C8版/文教】

大樂透 頭獎機率 1/1400萬

誰贏

賭場常見的輪盤，上有1到36及0、00共38組號碼，賭客只能押1至36，但是猜中的機率是1/38，所以總體的勝算，莊家大於賭客。 （美聯社）

台北訊

獎金經常上億的大樂透，是從49個號碼中，任選6碼；要算中獎機率，得先算出6個數字的排列方法有1400萬種，中頭獎的機率就是1/1400萬。
至於最小的普獎是中3碼，即彩券上有3碼和頭獎6碼中的3個相同、有3碼不相同且不是特別碼，這種組合有23萬個，所以中普獎機率為23萬/1400萬，也就是1.6%，若每期都買1張，平均每買61期，會中1次普獎；但因為這只是機率，所以也有可能連續買20年，卻1張都沒中，或是連續2期都中獎，完全要看個人運氣。

至於獎金，由於大樂透每期都從總銷售金額中，提撥57%做為獎金，所以平均每花50元買1張彩券，就可獲得28.5元獎金；但這是所有中獎者平均後的結果，因為頭獎金額占高比率，所以大部分的人都只能空手而回，事實上，中獎機率只有1.86%。

高雄大學副校長黃文璋建議，買大樂透最好不要買明牌，而要簽冷門號碼，因為大樂透除六獎1000元和普獎400元外，其他獎金都是定額，由中獎者均分，而每張彩券中獎機率完全相同，所以愈冷門號碼，愈少人中獎，每人可獲得的獎金就會愈高。

【2006-07-05/聯合報/C8版/文教】

同班同學 同天生日機率高

台北訊

每年學生分配到新班級時，同班常會發現有人同一天生日，好像很巧；但用機率算一算，就知道若班上沒有兩人在同一天生日，才是怪事。

要計算班上任兩個人同一天生日的機率，要先算「每個人生日均不相同」的機率：若只有兩個人，第二個人生日和第一個人不相同的機率為364/365，若加進來第三個人，和前兩個人生日都不相同的機率為(364/365)x(363/365)。

依此類推，當一個班上人數達到23人，每個人生日都不相同的機率，就只剩49.27%，也就是說，有兩人（或更多人）生日相同的機率是50.73% ，超過一半；現在台灣的小學，每班35人，其中兩人以上生日相同的機率為81.44%，國中每班38人，機率為86.41%，所以大部分班級都會有人在同一天生日。
【2006-07-05/聯合報/C8版/文教】

保險公司 靠機率賺大錢

台北訊

愈來愈多人不忌諱買保險，保險金也是根據風險機率算出來的，是「多數人一起分擔風險」的觀念，也就是所謂的「大數法則」。

高雄大學副校長黃文璋舉例指出，買一年期500萬意外保險，保費約5000元，是保險金的1/1000；若保險公司要賺一半，就表示台灣民眾一年因意外事故死亡或殘障的機率，大約是1/2000。

也就是說，2000人共花1000萬元買保險，但平均只有1個人出意外，保險公司只需支付500萬元。

若一年有2萬人買這項保險，保險公司收入保費1億元，而平均會有10人獲得理賠，拿走5000萬元，保險公司就賺剩下的5000萬元；但若某年特別不幸，有30個人發生意外，保險公司要支付1.5億元，反而會虧5000萬元。對保險公司來說，1年虧5000萬元，問題不大，而且意外人數要從10人突增到30人，機率很低，所以從機率看，保險公司風險比被保險人低了許多。

【2006-07-05/聯合報/C8版/文教】

誰能從事科普寫作？

- 具備一定的專業知識，尚可的文字駕馭能力，及熱誠：

  物質報酬通常不多。

- 如同影劇界，讀戲劇系、參加演員訓練班等，皆非成為好演員之充分必要條件。
- 興趣、志向可能較重要。
- 要多看，多揣摩，反覆推敲，並充實自己各方面的能力。

從專業到科普

- 我手寫我口。
- 滿腹經綸，如何表達出來？
- 大部分的人缺乏寫的訓練。
- 很多情境式的數學考題，題意不清，只在乎其中的數學。

數學家不一定較有邏輯，
國文老師不一定能寫好作文。

編輯大意

自然界處處可見**數學樣式**：行星循著**橢圓**軌道，繞太陽運行不息；雨後的彩虹，以七彩**圓弧**橫越天際；蜂巢**正六角形**的構造，精巧實用；蝴蝶、雪花、晶體都閃爍著**對稱**的美，呈現迷人的**碎形**；向日葵的果實左、右向都呈**螺旋**狀排列，數一數左旋、右旋的數目，竟然近似**黃金比**；非洲原野的鹿群，為了擺脫猛獸的追逐，繞著**等角螺線**奔跑．盛唐詩人王維的名句："大漠孤煙直，長河落日圓"，僅用**直線**和**圓**就已勾勒出塞外蒼涼風光．

數學是科學之母，在科技領域的拓展上一直擔當舉足輕重的角色。它可用於探索自然科學，也是研究人文及社會科學的重要工具，隨著社會多元化的進展，數學的應用更日漸廣泛，尤有甚者，學習數學對個人思維能力的提升，效力無窮。同學們，我們生活的周遭處處用得著數學，不論你將來學什麼、做什麼，數學對你的幫助、影響都極為深遠。衷心期望你趕快從本書中學好**數學概念**，提升**數學能力**，掌握**數學方法**，養成深厚的**數學素養**，必能助你學好每一門課業，做好每一項工作，解決每一個問題，進而享受窮研究破與創新發展的樂趣。

本書係依據教育部民國九十七年修正發布之「普通高級中學必修科目數學課程綱要」編輯而成，編寫時依據下列幾點原則：

從國文到作文

- 99年學測國文單選題第5題：
  - 「飛魚季」、「天才夢」兩個詞，是由「飛魚+季」、「天才+夢」所構成，「飛魚」對「季」、「天才」對「夢」都具有限制和界定作用。下列選項中，兩者皆屬於上述構詞方式的是：

  (A)錯誤；下棋 (B)種地瓜；談友誼 (C)問候天空；再別康橋(D)荷塘月色；蕃薯地圖。

國文成績再高，不能寫好作文，也是枉然！

愛亞:我的散文之路是這樣開始的

一邊寫一邊讀別人的散文，愈讀愈覺自己不夠好，有時寫得嚕嗦繁冗，有時卻太簡單，人家文字裡有些令人拍案驚奇的句子，我都沒有。前輩教我，不論散文小說，文字一定要注意“敘述與描繪”。我的敘述尚可，但描繪很不足。很沮喪，散文讓我退縮了，我回頭去寫小說。十分自然，我把習慣了寫散文的方式帶到小說裡了。為了加強小說的力量，我在小說中，以散文文字，敘述時做了解說，我忽然認知到那解說竟然就是“描繪”！

我會寫作了！我終於懂得了散文的寫作。2009年我獲得吳魯芹散文獎，這是散文的終生成就獎。

文學原鄉/一徑恬心小路【2010/07/04 聯合報】

以讀者為尊：勿自我陶醉

數學從中國的商高、祖沖之、或者西方的歐基里得、亞基米得發展到現在，少說也有一、兩千年，就算只從高斯、牛頓的現代數學算起，也有三、四百年的歷史。雖然，物理、化學、生物等學科,也有同樣長的歷史，可是數學理論的生命比起他們來說，卻是長的多。一個數學定理只要是邏輯正確，就會有無限的生命，永垂於各種數學文獻中。我們不會因為一個定理在幾千年前歐基里得或者祖沖之就已證明過，就覺得它沒有用或是不時尚。數學真理就是絕對的真理。不過，物理學、化學、生物學或其它現代科學和工程學，都是在追新立異。從牛頓、愛因斯坦、楊震寧…等，都是在否定前人所說，而後建構更美妙動人的理論。所以，數學家是學千秋的業績，而學其他科學卻最重視今朝今夕的發展。換句話說，數學比較多東西學。看官可能會說,"學文學、音樂、藝術…不也是一樣嗎?" 不同的是，學數學雖然重視傳統，但更重視出新(而不推陳!) 我總覺得學文科是在"法先王";而學數學是在"法後王"。像唸中文的人，多少有點古典主義。研究的知識越古，學問越淵博。譬如說，大家總認為:研究司馬遷和史記的人，會比研究金庸和武俠小說的人有學者味。

沒有時間？

- 女金庸 陳宇慧，1973年出生，住在香港，在銀行上班，4個孩子的媽。2008年，覺得陪孩子時間太少，才辭掉工作。
- 2007年出版天觀雙俠(4冊)，2009年出版靈劍(3冊)。

時間是擠出來的！

樂透統計學論文：多簽冷牌！

3大學教授得出結論 簽熱門牌不如打隨機牌 中頭彩可分較多錢

記者謝梅芬／高雄報導

國立高雄大學應用數學系教授黃文璋在去年政府推出樂透彩後，就密切注意中獎號碼，經過半年的研究，今天發表一篇「樂透彩頭獎號碼隨機性的檢定」，建議彩迷簽注時不必過度重視熱門號碼，要有隨機能力，若簽兩注以上，不要有兩注超過三碼重複，而且要儘量簽冷僻的號碼。

黃文璋今天是在中山大學參加第11屆南區統計研討會和中山大學應用數學系教授洪宛頻、羅夢娜發表這篇文章。

黃文章從去年政府發行樂透彩券後就蒐集歷期中獎號碼資料，得到的結論是任何一組號碼中頭獎的機率都是一樣的不會變大，也不會變小。因此，若想增大中獎的機會，唯一的辦法是多買，但是如果中大獎時，是獨得或較少人簽相同號碼，相對的就可分得較多的獎金。在此原則下，黃文璋建議要提高獎金的原則有二：一是若簽注兩注以上，不要有兩注超過三碼重複，第二要儘量簽冷僻的號碼。

黃教授說，這兩項原則，與目前民眾的簽注習慣大不相同，一般民眾喜歡「包牌」、找熱門號碼，其實這在統計學來看是「很不隨機」的。

黃文璋說，分析樂透頭獎1到37期，每人所得獎金最高的是第31期，僅有一人得獎，分得3億4000萬元，第33期是每人所得最低者共有13人簽注，每人分得八百餘萬元，這就是簽熱門號碼中獎的後果。為此，一般人所說的熱門號碼，黃教授認為在中獎機率都一樣的前提下，簽注熱門牌是不智的舉動。

黃文璋還在高雄大學應用數學週中以獎品方式鼓勵在校學生「下注」，結果發現全校師生一起「下注」，35名應用數學系學生在上過一年的機率與統計課程後，似乎對隨機性的能力較好，也就是說比較能以隨機方式簽注，相對的中獎機率也較高，因為他們比較知道機率的一定趨勢及變化。

民調樣本 多多益善？

本報記者李名揚、郭錦萍

政壇藍綠人馬最近口水、炮火四射，都在拚初選民調，但只要民調結果不符期望，又會批評民調單位有特定立場，測不出真正的民意，偏偏不管國民黨或民進黨，最後還是得要靠民調決定人選。到底怎樣的民調才算有效、有公信心？

高雄大學統計所所長黃文璋指出，民調是應用統計學「中央極限定理」所發展出的技術，理論上，若問題僅兩個答案可選（如是或否或非甲即乙），則不論總人數（母數）多少，只要有效回答的人數（樣本數），達到1068人，民調結果「誤差」就是正負3個百分點，「信心水準」是95%。

「誤差正負3個百分點」的意義是，若有一份選舉民調，甲候選人的支持度42%，代表他真正的支持度，介於39%到45%之間；若有另一位乙候選人支持度37%，就是介於34%到40%之間，則這兩人的真正支持度，有可能是甲39%、乙40%，甲帳面上數字雖贏，事實上是輸，所以兩人的民調支持度是一樣的，基本上，要兩人的支持度相差6個百分點以上，才可以說其中一人領先。

黃文璋表示，民調是用少數人意見推論全部人意見，所以不可能是一個確切數字，一定有一個誤差範圍，調查結果才能讓人相信；但這個誤差範圍要適中，若樣本數很多，雖然可把誤差範圍減小，調查成本也會大幅增加。

如若要把誤差範圍從正負3個百分點縮小到1個百分點，樣本數必須增為9倍，這其實不太符合成本效益；所以一般民調，有效樣本數儘量取到1068左右，讓誤差範圍維持3個百分點左右。

「信心水準95%」則是說，用這種方法做的民調，在每100次民調中，有95次是可以信賴的，也就是實際上全部人的意見，還是有5%的機率，不落在民調的誤差範圍內；當然若增加樣本數，或是把誤差範圍放大（例如誤差正負10個百分點），也許可讓信心水準提高到99.9%，但也失去民調意義，而若信心水準只有80%，又好像太低，所以最後妥協出95%這個數字。

當民調母數不是剛好1068人時，一般習慣是設定信心水準95%不變，只改變誤差範圍。

從賠率到機率

在運動競賽、彩券或賭場上，常聽到賠率一詞，然而「賠率」究竟是什麼意思？賠率大小與事件發生機率關係密切，簡單地說，發生的機率愈小，賠率愈高，發生的機率愈大，賠率愈小。

■黃文璋

每逢重大的運動競賽，常會聽到賠率一詞。網路上也經常有人在問賠率的意義。賠率與機率關係密切，利用機率可解釋賠率，反之，賠率也是解釋機率的方式之一。因此，就讓我們先由賠率討論起。

2006年6月9日至7月9日，在德國舉行4年一度的世界盃足球大賽。這一屆世界盃共有32隊參賽，分成8組， 每組4隊。每組經單循環賽6場，取前兩名進入16強。再經單淘汰產生8強，又單淘汰產生4強。4強捉對廝殺，勝隊爭冠亞軍，敗隊爭季殿軍。全部共比賽64場。每場比賽90分鐘， 在分組賽中可以有平手。進入16強後，若在正規的90分鐘後平手，則延長30分鐘，若再平手，則雙方各罰5球定勝負，這就是扣人心弦的12碼罰球PK（penalty kick）賽。

6月初有份賽前的封王賠率排行榜，6月底產生8強後，又有份新的封王賠率表（依封王賠率大小由小到大的排名前8名）。表中賠率1賠a，有兩種常見的賠法。其中一種是下注1元，若你贏的話給你a元，但不論你輸或贏，這1元都拿不回。另一種是若你贏的話給你a元，且原下注的1元還是你的，若輸的話，則下注的1元被收走。

看了賠率表你會產生什麼心得？首先，賽前所預測的排名並非太離譜。賽前

足球是圓的，球賽的勝負難以準確預測。

2006年世界盃足球賽在德國舉行

2006年世界盃足球賽8強封王賠率表

（小括號中的數字是32隊在賽前預測的封王排名）

8強排名	球　隊	賽前封王賠率	8強封王賠率
1	巴　西	1賠 3.25（1）	1賠 3.25
2	阿根廷	1賠 9.00（5）	1賠 4.50
3	德　國	1賠 9.00（4）	1賠 5.50
4	英格蘭	1賠 7.00（2）	1賠 6.50
5	義大利	1賠 9.00（3）	1賠 7.50
6	法　國	1賠15.00（8）	1賠12.00
7	葡萄牙	1賠23.00（9）	1賠17.00
8	烏克蘭	1賠67.00（14）	1賠51.00

預測的前5名都進入8強，8強中的另3隊原預測是8、9、14名，即使14名也還不算離前8名太遠。賽前預測名次的1、5、4、2、3名，在8強中的名次是1、2、3、4、5名，雖然預測名次不盡然準確，但似乎也相當具有參考價值。依據實際表現及發展（如原來32隊，如今只剩8隊），賠率做了修訂。8強淘汰一半，產生4強，8強封王賠率中的前4名，就有3隊未能進入4強，只有排名第3的德國進入4強。

除了封王賠率外，還有各種賠率，如德國對阿根廷的賠率，其中又分德國贏的賠率、阿根廷贏的賠率，和在正規時間內定輸贏的賠率等等。此外，還有最多進球賠率，一場比賽誰進第一球的賠率等，有各種賭法。

2006年世界盃足球賽4強封王賠率表

4強排名	球　隊	封王賠率	實際名次
1	德　國	1賠2.62	3
2	法　國	1賠2.87	2
3	義大利	1賠4.33	1
4	葡萄牙	1賠7.00	4

一般而言，賠率過高，賭場（如彩券公司、博奕公司等）覺得划不來，賠率太低，賭客下注意願低，因此賠率會有一合理的平衡點。賭場認為有利可圖，也有夠多的賭客認為合理，這個賠率才有行有市。隨著比賽進行，依球隊的表現，賭客對球隊贏球的機率會隨時重新評估。換句話說，當有新的條件加入時，賠率可能會隨之而變。另外，不同賭場的賭法可能不同，對同一支球隊的賠率，也可能不同。

4強封王賠率排名依序是德國、法國、義大利及葡萄牙。只是德國先敗於賠率較高的義大利隊，法國倒是贏了賠率比他高的葡萄牙。德國及葡萄牙爭季、殿軍，德國獲勝。義法的冠亞軍之戰，則由義大利獲勝。這份4強封王賠率表的順序，其2、4名正確，1、3名則互調。可見以賠率排名預測實際名次，有時準有時不準。

賠率大小究竟與機率有什麼關係？簡單地說，發生的機率愈小，賠率愈高，發生的機率愈大，賠率愈小。開賭場當然要賺錢，所以對賭客而言，賭場裡不會有公正賽局（fair game）。假設是公正賽局，則由賠率如何換算出贏的機率？

公正賽局

何謂公正賽局？這不見得有唯一的答案，因每人心中對公正的看法可能不同。我們就以「期望淨所得是0」當做公正賽

局的定義。期望值（expectation或稱expected value, mean）是機率裡一個重要的量，在這裡不下定義，先把它想成是平均好了。先前已對賠率1賠 a 有兩種常見的賠法做了說明。其一是你得先下注1元，不論你輸或贏，這1元都拿不回。若你賭的那支球隊是1賠 a（這裡 $a\geq 1$ 才合理），則在公正賽局下，你認為該球隊贏的機率為何？

輪盤

假設贏的機率是 p，且範圍介於 $0<p\leq 1$ 之間，並令 X 表示每次賭的淨所得。則淨所得 $X=a-1$ 的機率是 p，淨所得 $X=-1$ 的機率是 $1-p$。所以下式應成立：

$$p\cdot(a-1)-(1-p)\cdot 1=ap-1=0$$

解出 $p=1/a$。即如果是1賠2而且是公正賽局，這球隊贏的機率應該是 $1/2$。A和B兩支球隊比賽，假設沒有和局，又假設A贏的賠率是1賠 a，B贏的賠率是1賠 b，顯然 a 與 b 不會同時都大於2。否則你兩隊各下注1元，付出2元，卻保證所得多於2元，這並不合理。

現考慮第二種賠法。你下注1元，1賠 a，表示贏的話給你 a 元，且原下注的1元還是你的，若輸的話，則下注的1元被收走。這時 a 便可小於1，即 $a\geq 0$。仍令 X 表示每次賭的淨所得，p 是贏的機率，則

$$p\cdot a-(1-p)\cdot 1=(a+1)p-1=0$$

解出 $p=1/(a+1)$。第二種情況下的1賠 a，與第一種情況下的1賠 $a+1$ 等價。因此利用第一種情況的結果，也可得 $p=1/(a+1)$。倘若在第二種情況裡，如果是1賠2，贏的機率是 $1/3$；而第一種情況1賠2，贏的機率是 $1/2$。

反過來看，對第一種情況，若贏的機率是 p，則應該是1賠 $1/p$；對第二種情況，若贏的機率是 p，則應該是1賠 $(1-p)/p$。為了能更清楚地解釋，舉兩個例子來說明。

擲骰子的結果是典型的機率問題

例1：假設你與同學賭巴西贏日本，10賠1。則你認為巴西會贏日本的機率為何?

這是第二種情況的1賠0.1，也是第一種情況的1賠1.1，因此$p=1/1.1=10/11$。至於巴西輸的機率是$1-p=1/11$。即巴西贏日本的機率是輸日本的機率的10倍。

例2：在上例中，假設各經過1場與他國的比賽後，巴西隊表現不如預期，日本則後勢被看好。這時你與另一位同學賭巴西贏日本，5賠1。5賠1即1賠0.2，因此巴西贏日本的機率是$p=1/1.2=5/6$。巴西贏的機率由$10/11$降為$5/6$，雖只降了少少的$5/66=0.07575$……不到一成，但賠率卻由10賠1變成5賠1。

在6月初那份賽前封王賠率表，排名最後的是千里達及托巴哥共和國，是1賠1001.00。預測排名很前面的球隊，雖贏球機率大，但賠率小，賭對了，所獲不多。因此雖然千里達及托巴哥會奪冠的機率很低，仍有人押注，萬一爆出冷門，賭客就大賺了，而賭場不就大賠？

因此，賭場所設計出的賠率，通常對賭徒不是公正賽局，但賭場仍有可能賠錢。盛行於台灣民間的六合彩，有時會有組頭因不堪大賠而跑路。事實上，若資金不夠大，較易發生賭場破產；資金愈大，賭場撐不下去的機率也就愈低。這方面的討論是屬於機率論裡的破產問題（ruin problem），本文不加詳述。

對一公正賽局，已說明由賠率可以算出贏的機率。但若對某一球隊連續兩屆都奪冠的機率有興趣，則可否由各屆封王的機率求出這個機率呢？答案或許是否定的，因為並不知道兩屆比賽封王事件間的關係。而對於兩個事件，若只知各自發生的機率，而無其他資訊，也就無法求得同時發生的機率了。

法國隊在分組賽中表現並不太好，但進入8強後，卻能贏原先最被看好的巴西隊。球是圓的，事先誰也不敢打包票哪一隊必得冠軍。對即將對抗的兩支球隊，在公正賽局下，如果是勢均力敵，可以認為贏的機率各是$1/2$。但如果有一隊較強，則其贏的機率p應大於$1/2$，至於弱的那一隊，贏的機率q應小於$1/2$，而$p+q$應為1才有道理，這可能是一般人的認知。

儘管足球迷們對各隊強弱的評估可以不同，但$p+q$應該是1。也就是雖然人人都可當預言家，誇誇其談各隊贏球機率，但這些機率還是要滿足某些條件，不是可以任意說巴西奪冠機率是0.9，阿根廷奪冠機率是0.5等。對於這部分，再以兩個例子來解釋。

例3：在4強對決前，賭客對媒體報導更加謹慎。因賽前排名1、2名的巴西及阿根廷，在8強賽都被淘汰，跌破賭客們的眼鏡。在4強中，大部分的賭客都看好德國和法國會勝出，兩國分居封王排行榜的1、2名。

報載賭盤開出：德國贏，一萬賠一萬零六百；義大利贏，一萬賠兩萬兩千六百。我們先換算出德國贏是1賠1.06，義大利贏是1賠2.26。則在公正賽局的假設下，德國贏的機率加上義大利贏的機率是

$$1/1.06+1/2.26=1.385874$$

兩隊得拚得你死我活，贏的機率相加卻超過1，這是怎麼回事？難不成兩隊向上帝的禱告都能奏效？我們已說過被認為愈容

對一公正賽局，由賠率可以算出贏的機率。
但若對某一球隊連續兩屆都奪冠的機率有興趣，
則可否由各屆封王的機率求出這個機率呢？
答案或許是否定的，因為並不知道兩屆比賽封王事件間的關係。

義大利 vs. 法國

90分鐘	賠率	機率
義大利勝	1賠2.5	1/2.5
平手	1賠2.7	1/2.7
法國勝	1賠2.8	1/2.8
		機率和=1.127513

封王	賠率	機率
義大利勝	1賠1.72	1/1.72
法國勝	1賠2.10	1/2.10
		機率和=1.057586

義大利對法國的賠率

易贏的，賠率便愈小。賭場要賺錢，因此球隊贏球機率被放大了。而賭客要刺激、要豪賭，對不公正的賽局仍可接受。有些被看好的球隊輸球，慘遭民眾辱罵，相信罵人者中有些是因賭輸而生氣的。

賠率低到1賠1.06，表示德國極度被看好，只是在90分鐘正規比賽平手後，在30分鐘延長賽的最後兩分鐘，義大利連進兩球，以2比0擊敗德國。

例4：在4強封王賠率表中，法國排名在義大利之前，但在法、義冠亞軍賽前，較多人看好義大利。知名的博奕公司英國的威廉希爾（William Hill），開出的盤口是義大利勝1賠2.50，平手1賠2.70，法國勝1賠2.80，這是就踢完正規的90分鐘而言。如果你3種可能性都押1元，則最少淨虧0.20元，最多淨虧0.50元，都必然是淨虧，因此大約少有人這樣賭的。至於義大利封王賠率是1賠1.72，優於法國的1賠2.10（沒有平手）。在公正賽局的假設下，前者3種情況的機率和是

$$1/2.50+1/2.70+1/2.80=1.127513$$

後者義大利與法國封王機率和是

$$1/1.72+1/2.10=1.057586$$

因此第二種賭法似乎對賭客稍有利。

另外也有義大利奪冠11賠8的說法，可看出這是屬於贏的話，所下的賭注仍屬於第二種情況。11賠8即1賠8／11，故贏的機率是

$$1/(1+8/11)=11/19$$

對應第一種情況1賠19／11＝1.727，與前述1賠1.72接近。也有報載義大利勝1賠1.21，平手1賠1.81，法國勝1賠1.66，這也是屬於第二種情況。對應第一種情況的1賠2.21，1賠2.81，以及1賠2.66。

那次冠亞軍戰在正規的90分鐘結束時，雙方以1比1戰成平手。延長30分鐘，雙方都沒有進球，接著就是PK戰，義大利以5比3擊敗法國。一旦結果揭曉，賽前預測的機率便沒有意義了。

生活即機率

兩百多年前，法國大數學家及天文學家拉普拉斯（Pierre-Simon Laplace, 1749-1827）就已說：「大部分生活中最重要的疑問，都只是機率的問題。」拉普拉斯並未誇大，時至今日，機率論的確已成為幾乎所有科學、工程、醫學、法庭及工業中，極基本且重要的工具。而且如拉普拉斯所指出，人們已習於問「這件事的機率如何?」，而不若以往問「這件事會如何？」。以下列出一些新聞標題做為佐證。

怎樣才能提高加薪機率？

普通公務員成為部長的機率有多大？

研究發現大腿愈粗罹心血管機率愈高。

吃排卵藥懷三胞胎機率不到10％。

電腦輻射導致癌症的機率提高到45％。

吃全素的女性產下雙胞胎的機率約為常人的五分之一。

吃蛤蜊吃到紫珍珠的機率是二百萬分之一。

姚明表示他參加男籃世錦賽的機率是50%。

2102年小行星撞地球的機率有千分之一。

再引用胡適在重印乾隆壬子本《紅樓夢》序裡的一段話供各位參考。

戴雋容先生說：「凡作考據，有一個重要的原則，就是要注意可能性的大小。可能性（probability）又叫做幾數，又叫做或然數，就是事物在一定情境之下能變出的花樣。把一個銅子擲在地上，或是龍頭朝上，或是字朝上，可能性都是百分之五十，是均等的。把一個不倒翁擲在地上，他的頭輕腳重，總是腳朝下的，故他有一百分的站立的可能性。試用此理來觀察紅樓夢裏寶玉的生年，有二種可能……」

胡適（1891年12月17日－1962年2月24日）

胡適這篇序寫於1927年，距今約80年。雖然文中對機率的用語，以今日觀點並非很精準，不過其依「可能性的大小」來做考據，的確是頗客觀的態度。文學考證要具科學的精神，而「可能性的大小」就是依據之一。

擲杯的一面平，另一面凸，兩個擲杯出現一平一凸的機率是多少呢？

台灣的彩券是「公益彩券」，賺的錢大部分做公益之用。

可能性就是機率，但做決策有時並非只依機率值的大小。以賭博為例，前面提及的期望淨所得，也是一種常考量的依據。只是大部分的賭，期望淨所得都是負。以四星彩為例，玩法之一（正彩）是自0000至9999共10,000組有序號碼中，任選一組。若開出的號碼恰好是你所選的，則彩金是投注的5,000倍，無論中或沒中，所下的注當然收不回。中獎機率是1／10,000，只賠5,000倍，要賠10,000倍才是公正賽局，但你也知道很難有這種彩券。雖每100元，期望淨所得是50元，但仍有人願意下注。

每個人對金錢有不同的效益函數（utility function），這函數並非都是金錢的線性函數。有些人不在乎小錢，而想要以簡單且快速的方法得到大錢，這時賭就是方法之一了。有些人希望穩紮穩打，有些人則願意豪賭。高利潤常伴隨高風險，因此變異（variation）大小，也是做決策時會考慮到的。變異是機率論中一項基本的概念。

既然生活中處處充滿著與機率相關的問題，我們有必要對機率論有相當程度的了解，這也是機率論日漸成為大學中許多學系必備知識的主因。 □

黃文璋
高雄大學應用數學系

應隨機以恆周

德相非空非有應隨機以恆周，

法身無去無來住寂光而不動。

■黃文璋

應隨機以恆周

必然性與隨機性

對自然的探索，了解宇宙的奧祕，一直是人們所追求的，所謂「究天人之際，通古今之變」。而宇宙的運轉，穿插著必然性及隨機性。有些現象我們確知必然會發生，例如天體運轉及科學中的很多規律性，都可歸因爲必然性。至於事先無法確定結果的情況，也所在多有，這就是隨機性。

由於一代一代對知識的探索，宇宙間很多必然性逐漸被人們了解。以數學爲例，大家在中學都學過平面幾何學，平面幾何學裡就有各種關於圖形的必然性。信手拈來，如三角形內角和是180度，直角三角形兩股平方和等於斜邊平方（畢氏定理）。較複雜一點的如三角形三邊的垂直平分線交於同一點（外心），重心（三邊中線的交點）距任一頂點距離是對應中線長的三分之二，外心、重心及垂心（三邊高的交點）三點共線等。

對幾何圖形裡那種種毫無例外的性質我們感到神奇，更驚訝前人是如何發現的？尤其這些發現，多半源自距今兩千五百多年前，古希臘時代的畢達哥拉斯（畢氏定理即以他命名）。爾後歐幾里得把從畢達哥拉斯及其追隨者等先輩開創出來的工作，有系統地整理成《幾何原本》一書。至少到19世紀非歐幾何學出現之前，這本書一直是平面幾何學的推理、定理和方法的主要依據，今日中學平面幾何學的內容，大都不超過它的範圍。

歐幾里得因編著《幾何原本》，在麥克．哈特著《影響世界歷史100位名人》中排名第14。

平面幾何學除了教我們圖形的性質，我們的邏輯推演能力也多半奠基於這門課，而這竟然是距今兩千多年前，就已被那些聰明人發現的學問。想想那是個沒有紙筆的時代，眞不知當時的數學家是如何畫圖，以及如何能如此觀察入微。不過與其歸根於觀察力，還不如說是他們抽象思考的能力很好。要知在數學裡並不需眼見爲實，數學家自有一套思想體系，在這套體系裡，他們自有一套判定事件是眞或僞的步驟。

在《幾何原本》第9卷的最後一命題，討論完全數（perfect number）。所謂完全數就是一數等於小於它的所有因數的和。6是第一個完全數，6＝1＋2＋3。28是第二個完全數，28＝1＋2＋4＋7＋14。古希臘學者覺得這些數字具有特別的象徵和神祕的意義，6也確實與宗教裡一些完美性相關聯。《聖經．創世記》裡記載，上帝創造世界花了6天，在第7天歇工，西方人可能因此認爲6是一個很完美的數字。

目前的曆制，一星期有7天，一個月是四星期（即28天）多一些，似乎28也是一個讓人所樂意接受的數字。古希臘時代只知道4個完全數，在《幾何原本》第9卷的最後一句話寫著「6、28、496、8128等都是完全數」。歐幾里得發現，這4個完全數都可表示成 $2^{n-1}(2^n-1)$ 的型式，n 分別是2、3、5及7。

$$6 = 2 \times 3 = 2 \times (2^2-1)$$
$$28 = 4 \times 7 = 2^2 \times (2^3-1)$$
$$496 = 16 \times 31 = 2^4 \times (2^5-1)$$
$$8128 = 64 \times 127 = 2^6 \times (2^7-1)$$

6、28、496、8128為前4個完全數，3、7、31、127都是質數。

在改成歐元前，瑞士10法郎的圖案採用歐拉像。

歐幾里得也看出當 $n=2$、3、5或7時，2^n-1 都是質數。這項觀察使他在《幾何原本》裡證明：「若 2^n-1 是一質數，則 $2^{n-1}(2^n-1)$ 是一完全數。」

歐幾里得給出了偶完全數的充分條件，但是否尚有其他偶完全數呢？歐幾里得之後約兩千年，大數學家歐拉，給出了偶完全數的必要條件：「偶完全數必呈 $2^{n-1}(2^n-1)$ 的型式，且 2^n-1 是一質數。」

至此人們知道偶完全數是如何產生的，毫無例外的，就是 $2^{n-1}(2^n-1)$ 的型式，而且 2^n-1 是一質數。2^n-1 型式的質數，稱為梅仙尼質數。每找到一個梅仙尼質數，便找到一個偶完全數。偶完全數的尋找至今仍方興未艾，近年來由於網際網路的興起，加速了梅仙尼質數及偶完全數的誕生。有興趣加入尋找行列者，可上網站。

http://www.mersenne.org/prime.htm

大家可能會好奇，找很困難嗎？不是只要找到一個 2^n-1 型式的質數就好了嗎？可惜這種質數很稀少，至西元2005年，才知道42個偶完全數。最大的一個是2005年2月18日發現的：$2^{25,964,950}(2^{25,964,951}-1)$，位數達15,632,458位。假設一頁可印4,000位數，印出這數字要3,909頁，真是個天文數字。古人才找到4個就知道很珍貴，命名為perfect number，其慧眼真令人敬佩。至於奇完全數是否存在呢？至今仍然未知。

宇宙間的各種變化，科學裡的各種現象，長久以來人們所追求及所突破的，大都屬必然性。例如，天體運行的規律性、幾何學裡種種美妙的性質，及偶完全數一定是什麼型式等。

至於隨機性呢？雖然我們可以準確地算出哈雷彗星下次來的時間，以及下回金星凌日的時間，但明天會不會下雨、颱風走向，以及下次地震是何時，就不一定清楚了。又如讓手上的銅板以自由落體的方式落地，只要固定高度，且忽略空氣阻力，落地所需的時間是可以確定的，但是卻無法預知哪一面朝上。所以人們對隨機性的了解，有很長一段時間，即使不是繳白卷，成就也很有限。

處處有機率

其實人們對隨機性的經驗源遠流長。在《聖經．利未記》第16章：「為那兩隻羊拈鬮，一鬮歸與耶和華，一鬮歸與阿撒瀉勒。」《聖經．民數記》第26章，耶和華曉諭摩西：「還要拈鬮分地。」在《新約聖經．約翰福音》裡，耶穌被釘死在十字架上後，兵丁以拈鬮來分他的裏衣。雖很早便知有隨機性，但較晚才開始探討。涵蓋隨機性的機率與統計這兩門學問，其萌芽都遲至17世紀。初期僅是算算排列組合或收集資料，而同時期數學的其他領域，已發展得很深入了。

一般認為機率發展有3個階段。第一是解決玩撲克牌、投擲骰子等實際情況中事件出現的可能性問題。第二是建立抽象系統，解決較一般的問

金星凌日每243年出現4次，間隔分別是8年、105.5年、8年及121.5年，下次會出現在2012年6月6日。

給定高度，落地時間可求出。

應隨機以恆周

題。第三是1933年，俄國數學家柯莫果洛夫以公理化的方式建立機率論的數學體系。自此機率成為數學的一個主要領域，距今不過七十餘年。

至於現代統計學的發展始自19世紀末，歷史也不是太長。今日統計已成為做決策的主要依據，甚至連心理分析都可說是統計的應用。可以這麼講，統計理論並不能保證所提供的選擇永遠是最好的，但可以保證在所設定的條件下，沒有其他更好的策略。

統計理論並不能保證所提供的選擇永遠是最好的，但可以保證在所設定的條件下，沒有其他更好的策略。

數學雖然博大精深，但日常生活中所用到的，例如計算總和、平均、利息、報稅等，大致不會讓人迷惑。稍微難一點的數學，一般人多半不敢輕易觸及，認為那是專家的工作。

以前會計和統計是在一起的，大學裡有會計統計學系。其實會計中用到的數學都還不算太難，只是會計師的制度存在已久，是一種高收入的專業，但統計工作則常令人以為可以自行處理。諸如機率、獨立、期望值、變異數、95%的信心水準、抽樣誤差等，這些很難解釋清楚的概念，卻常出現在報章媒體上。不少人也就在辦公室或街頭上做起「抽樣調查」。

一般人雖然對機率一詞朗朗上口，其實連事件的機率大小，也不太能精確地掌握。

事實上，前述那些名詞比極限、微分、積分還難解釋明白。例如，投擲一公正的骰子，所得點數的期望值是（1+2+3+4+5+6）／6=3.5。雖然不論怎麼投擲都得不到一個非整數的值，但偏偏3.5被認為是「期望得到的值」。中小學的機率與統計的題材置於數學課程中，一般人受多了數學中必然性的訓練，對隨機性也就想用必然性的手法來處理。數學中的數字，一般人會謹慎面對，但對求機率值不知怎麼，一向就較隨意，隨機像是等同於隨便。我們給一例子如下。

例如「每個投票所多一票就贏了」，落選者常這樣嘆息。聽起來很容易，實際情況如何？假設有10,000個投票所，任一投票所至少多一票的機率假設是0.999（算是不低），但要每個投票所都至少多一票的機率則是（假設各投票所的投票行為相互獨立）

$$0.999^{10000} \approx \frac{4,517}{100,000} \approx \frac{1}{22,000}$$

可看出一個投票所要多一票可能不難，但要每一投票所都能多一票，就不見得容易了。即使只有1,000個投票所，這個機率也才約0.3677，並不是很高。

上述例子顯示一般人雖然對機率一詞朗朗上口，其實連事件的機率大小，常也不太能精確地掌握。例如影響翻盤機率，與SARS有關的題目出現機率可能不低，以及恐怖耶誕，全美警戒，選舉機率與規模，911至今最高等說法，其中所提到的機率很可能並沒有嚴謹的依據，但卻屢屢出現在報紙上的新聞標題中。

隨機的概念

實際上機率並非頻率。我們常有下述講法：每4年有1次閏年；每19年有7次閏月；哈雷彗星每76年接近地球1次。對機率的表示，也常採類似的方式：一期買一張樂透彩，5萬年可中頭獎；每5名曾接受肺癌手術的病人，只有1人能存活5年；和伊朗比10場會贏9場，但偏偏這是第10場。

久之機率與頻率混淆，以為發生機率三分之一，就是每三次觀測會出現一次，變異的概念逐漸失去，而把隨機變數常數化。兩事件如果發生機率相同，就誤以為發生頻率也要相同。

以北銀發行的42取6的樂透彩為例，自91年1月22日發行，至94年1月21日結束，共發行314期。有人研究1~42各號碼出現的頻率，發現出現最多的是12號，有61次，最少次數的是16號，只有33次。雖然各號碼出現機率相同，但開了三百多期，各號碼出現頻率的差異卻很大。

統計推論常引起迷思

數學中有很多證明，但對於隨機現象，通常無法證明其真偽。諸如銅板為公正，樂透彩頭獎號碼的出現符合隨機性，都無法依一定步驟證明對或錯。統計裡對一假設（如機率 = 0.5）經過檢定後，得到的結論不是真或偽，而是接受或不接受這個假設。

由於變異的存在，統計推論允許犯錯，而且對同一假設，如果重複觀測，推論可能會不一樣。又因常要處理涉及人的問題，例如民意調查或某種新藥對治療某特定疾病是否有效等，相對於檢驗一銅板出現正面的機率是否等於 0.5，多變的人和無怨無尤的銅板是完全不同的情況。造成的後果就是使人以為統計的工作可以輕率地執行，也有不少人以為統計的推論就如同數學中的證明。因而有人不相信統計，有人過度相信統計。不論相信或不相信統計，主要是不了解隨機的本質，不知隨機現象中是有變異的。

前面提到統計裡的假設檢定，會先定出一個比較小而可以容忍的犯錯機率，如 0.01、0.05或 0.10。看多了小機率，難免令人誤以為小機率代表事件幾乎不會發生。事實上，在生活中小機率事件可能是常常發生的。

樂透彩中頭獎的機率雖然很小，但卻常有人中頭獎，這是因為每期買的人很多的緣故，美國還曾有人中了樂透彩頭獎兩次。民國90年12月，台北市新開幕的京華城購物中心，有一對夫婦中了7部休旅車，轟動一時。美國前總統雷根2004年6月去世，《新聞周刊》及《時代》兩份著名的雜誌據稱各擁有上百萬張雷根的照片，但卻選了同一張做為封面。

有些我們以為不可能的事，卻常常發生，原因是發生機率並沒有想像的低。另一方面即使機率小，一旦觀察次數夠多，也不難發生。此外，世事留意皆文章，只要有心，經常可觀察到發生機率很小的事件。

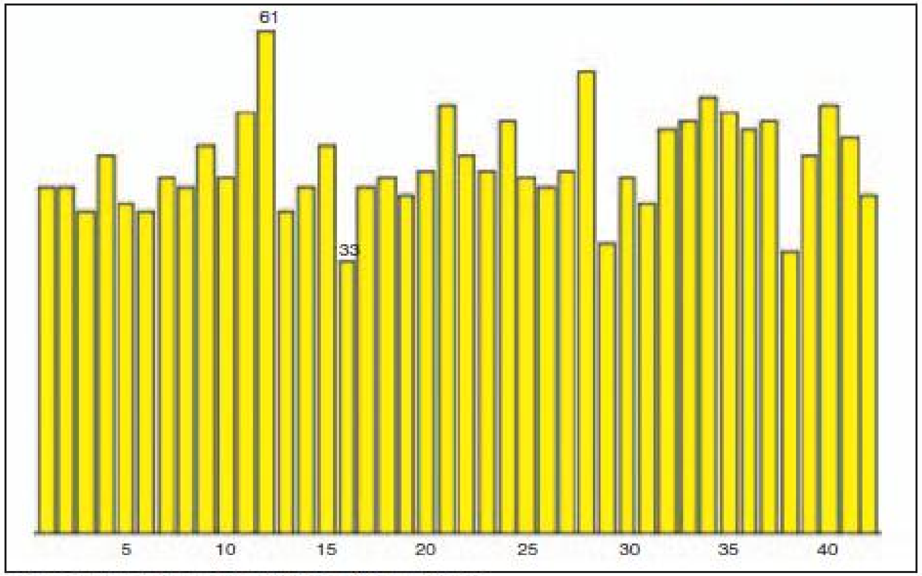
應隨機以恆周

顯通寺是佛教聖地五臺山現存最古及最大的寺院。相傳五臺山是文殊菩薩演教和居住的地方，所以五臺山的寺院，都以供奉文殊菩薩為主。大文殊殿是顯通寺的第二進殿宇，殿外有幅對聯

德相非空非有應隨機以恆周，
法身無去無來住寂光而不動。

切記，不能以數學的方式來想機率與統計。

假設 A 銅板出現正面的機率是 0.6，B 銅板出現正面的機率是 0.4，



91年1月22日至94年1月21日共314期北銀樂透彩頭獎號碼出現的頻率

在美國前總統雷根去世時，《新聞周刊》及《時代》兩份著名的雜誌據稱各擁有上百萬張雷根的照片，但卻選了同一張做為封面。英雄所見略同？

應隨機以恆周

0.6＞0.4，是否各投擲10次，A銅板出現的正面數必多於B銅板呢？當然不一定，這可不是數學中的比大小。那機率的大小不是沒意義嗎？也不盡然，如果比賽誰得的正面數多，你要選那一個銅板呢？顯然是A銅板，機率的功能這時就呈現了。

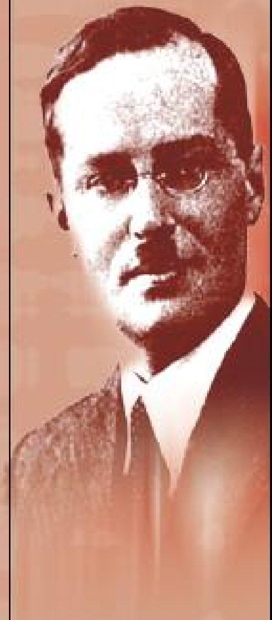
另外，統計裡95%的信賴區間也不是指實驗100次有95次值得信賴。信賴區間的意義不易解釋，但卻常出現在媒體上，可能是因為95%在數學上的意思很明白吧！在隨機現象裡，事件的機率會因情況不同、新資訊的出現而改變（即條件機率），千萬不可守著一個機率值，不知變通。隨機挑選一個人，你可假設是男是女的機率都是0.5。但如果告訴你，是從高雄女中挑選的，你還會認為挑中男女的機率相同嗎？

要把隨機融入思考中，做決策時先算算機率、期望值、變異數等，依統計方法找到最佳策略。在所要求的條件下，除非有意外，結果都會令人滿意。只是隨機世界裡，永遠會有意外，豈有此理之事一向也不少。出現意外，對原先相信的事，是可以動搖信心。經過進一步檢驗，如果意外仍然出現，改變選擇是合理的決策。但會不會誤判？也不無可能。有新資料出現可否再改變選擇？答案是肯定的。萬物雖有常，但世事多變，不要挑戰機率，也不要過度倚賴機率，而要善用機率。

在這個必然性與隨機性並存的世界裡，必然性就像法身，隨機性則是德相。必然性使人們願意事先好好準備，隨機性使未來充滿著盼望與不確定性。光有必然性的世界毫無變異，光有隨機性的世界一切靠運氣，皆會使人少了努力的動機，若只有其中一項，世界是無法周轉的。

隨機世界中，由於有大數法則及中央極限定理等，使其中又有些可以掌握的現象存在，這就是隨機法則。我們從小學數學，熟悉數學中的法則，運用較自如。對隨機法則，就不是那麼能駕馭了。了解必然性，掌握隨機性，才能適存於這個隨機世界。□

黃文璋
高雄大學應用數學系



統計學裡無罪推定的精神

一般報導

我國最高法院直到最近才採無罪推定原則。
在運用統計方法做決定時，
早就採用無罪推定原則了。
朝令夕改在統計裡是不被鼓勵的。
在統計裡一貫秉持著「除非證據夠強，
否則不輕易推翻現況」的精神。

■黃文璋

被公認為現代統計學鼻祖的英國學者費雪（R.A. Fisher），曾提到下述故事。時間是一九二〇年代後期，某日有位女士對一群正在喝下午茶的科學家宣稱，奶茶的調製順序對風味有很大的影響，把茶加進牛奶裡，和把牛奶加進茶裡，兩者喝起來口味完全不同。在座的科學家們當然對這種說法感到可笑，他們看不出兩種混合方式的化學成分有什麼差異。但費雪卻認真地設計了一個實驗步驟，來對這種說法做一檢定，包括要準備多少杯茶，以及依照什麼順序給這位女士喝等。

民國九十年十二月二十日，Yahoo!奇摩網站上有底下一則新聞報導：

（中央社記者郭傳信安卡拉十九日專電）土耳其國立安卡拉大學醫學院婦科系教授庫克在專欄中表示，早在西元前二二〇〇至二〇〇〇年，藥學史極為發達的古埃及人，已經能夠在不使用化學藥劑的情況下，檢驗出女性是否懷孕。

根據已發現的古埃及紙草文獻記載，希望知道自己是否懷孕的婦女，必須把自己清晨起床後的第一次尿液，裝在一個盛有大麥種子的袋子裡，在此同時，另須把一位確定未懷孕的女性，清晨起床後的第一次尿液，裝在另一個同樣盛有大麥的袋子裡以便比對。庫克表示，由於女性懷孕後，體內會較未懷孕女性產生更多的荷爾蒙，因此泡在懷孕女性尿液中的大麥種子較容易發酵並提前發芽，如此即可用來判定是否懷孕，但如果兩袋的大麥種子同時發芽，則表示尚未懷孕。

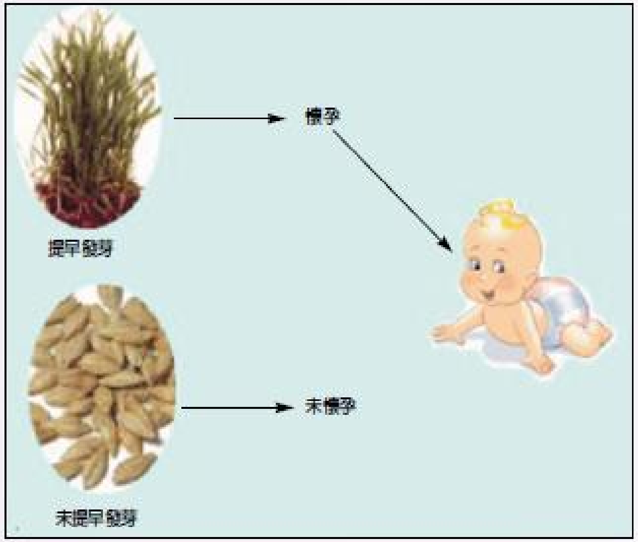
庫克最後在文中強調，現代科學已證實，這項古老的驗孕方法「相當準確」。

關鍵在於機率

在費雪的故事裡，如果只拿一杯奶茶讓那位女士喝，且正確指出是先放茶或先放牛奶，這樣一來我們是否就會相信她真有能力分辨？可能不會，因為有1／2的機會她會說對，這一機率蠻大的。如果給她兩杯呢？她有1／4的機會說對，機率也不算太小，可能還是不相信她有能力分辨。如果連續10杯她都說對，此時機率僅是1／1,024，算是很小的了，即使仍不太相信她有分辨的能力，也許暫時不會排除此一可能性，但是如果20次中只錯了一次呢？

畢竟人難免會犯錯，偶爾一次叫錯朋友的名字，你不會承認是認錯他。那麼20次中錯兩次呢？我們對犯錯是有一些忍受度的，至於程度究竟多大，這就因人而異，或因情況而異。附帶一提，如果該女士事先知道10杯中有5杯是先放牛奶，另5杯是先放茶，則10杯全說對的機率是1／$\binom{10}{5}$ =1／252，大約是1／1,024的四倍。（此處用到 $\binom{10}{5}$ 的組合符號，它是代表自10個物件中任取5個出來成一組的方法，共有幾種的意思。）

再看檢驗女性是否懷孕的方法。俗語說「一樹之果有酸甜之別，一母之子有賢愚之分。」即使同一批大麥，發芽的時間也有快慢之別，就算倒入沒有懷孕的婦女尿液，大麥可能也會提前發芽。仿照前述女士喝茶的情況，將待驗婦女的尿液與10位未懷孕的女性比較，如果是倒入該婦女尿液的大麥，以6：4提前發芽，那算不算真的因較多的荷爾蒙，而使得麥子提前發芽？



要知A、B兩支球隊，即使勢均力敵（即每場兩隊獲勝的機率均是1／2），連比十場，A隊領先（即至少贏6場）的機率約為0.377：

$$\frac{\binom{10}{6}+\binom{10}{7}+\binom{10}{8}+\binom{10}{9}+\binom{10}{10}}{2^{10}}=\frac{386}{1,024}\doteq 0.377,$$

可說很容易發生。B隊領先的機率一樣大約是0.377。至於平手，即各勝5場的機率大約是1－2 × 0.377=0.246，反而較小。而且怎樣算「提前」？1秒鐘？1分鐘？絕大多數的人不會把這麼小的差異當做提前。報導中庫克強調現代科學已證實此法相當準確，至於古埃及人是如何操作此法，以得到可靠的推論，就不得而知了。

數學與隨機事件的差異

在數學裡，一個命題，如直角三角形兩股長的平方和等於斜邊長的平方，三角形三邊的高相交於同一點等，一旦被證明是對的，就毫無疑問地成立。有時，即使尚未能獲得結論，數學家知道那只是時機尚未成熟，結論的獲得只是早晚的事，就如同開門的鑰匙仍在找尋中，一旦尋獲鑰匙，門一定可以打開。

著名的費馬最後定理：當 $n\geqq 3$ 是一整數，且x，y，z皆不是0，則 $x^n+y^n=z^n$ 無整數的x，y，z解。此一定理從提出到一九九四年被證明，前後歷經三百餘年。此後就犯不著再在這一問題上思索，看看是否會運氣好，找到一組整數解，那是不可能的。假設銅板M出現正面的機率是0.6，銅板N出現正面的機率是0.5，是否各丟10次，這二個銅板分別會出現6個及5個正面呢？你知道不一定。在數學裡 0.6 > 0.5，是否銅板M出現的正面數一定較銅板N多呢？經驗告訴我們也不一定。

對於隨機現象往往無法有如數學中斬釘截鐵地推論，在數學上我們可以寫「假設 $n\geqq 3$ 是一整數，且x，y，z皆不是0（假設A），試證 $x^n+y^n=z^n$ 無整數解（結論B）。」此命題的假設條件是A，想得到的結論是B。

但在隨機世界裡，一件事往往很難判定真偽。到底該女士能否分辨奶茶裡是先放牛奶還是先放茶，即使她20次（亂猜猜中的機率等於 $1/2^{20}$，約是百萬分之一）都說對，恐怕還是有人不相信她有這種能力。因此我們不會採用如數學上的命題方式「假設有某一泰勒女士，試證該女士『能』分辨奶茶是先放牛奶還是先放茶，或是要試證該女士『不能』分辨……」來要求被詢問者做一判定。

數學家因先相信在條件A下，$x^n+y^n=z^n$ 無整數解是對的，再去證明它確是如此。但對奶茶那一問題，由於女士宣稱她有分辨能力，因此研究人員先假設該女士無分辨能力，只是隨機地猜。

費雪（R.A. Fisher，1890－1962）

然後譬如說拿二十杯奶茶讓她分辨，統計她能夠正確判斷的次數，首先設定一能忍受的錯誤機率 α，如 0.05, 0.01 或 0.001 等，接著觀察在每杯猜對機率皆為二分之一的假設下，正確猜對這麼多次的機率有多大。如果機率小於 α（也就是這麼多次正確是較不尋常的），則得到結論「拒絕」原假設（即判定該女士並非無分辨能力），否則便說「接受」原假設。

統計假設

對一隨機現象，研究人員都是先提出一猜想，再把猜想表示成統計假設（簡稱假設）的形式。而導致接受或拒絕一統計假設的步驟，就是統計推論的主要工作。

統計假設與一般數學中的假設是不同的，在數學裡我們常有下述這類敘述：假設 $x > y$。由於並未涉及任何隨機的量，所以這不是統計假設。但如果以 μ 來表示北銀樂透彩頭獎號碼中，1 號出現的機率，則 $\mu > 1/7$ 就是一項統計假設了。

由於一項統計假設是否是真，通常都無法確定。所以一般的作法是，取一組隨機樣本，並利用這組樣本當做是否支持某一假設的證據。如果證據與假設所陳述的不吻合，更精確地說二者吻合的機率很低，便拒絕該假設，否則便接受該假設。

我們常說「數據會說話」，但不論方法多好，對一統計假設所做的推論，也有可能是錯的。所以在設計決策步驟時，要考慮推論錯誤的機率。在無法避免犯錯的情況下，只能以較好的方法儘量減小犯錯的機率，否則所做的統計推論便不易被採信。

在數學裡，對於一命題，有真或偽兩種結論。但在統計學裡，我們不說一假設成立或不成立，而是說接受一假設，或拒絕一假設。要注意的是，當我們拒絕一假設，並不表示該假設是不可能，而是表示該假設不像會發生、似不可信的。接受一假設也並不表示認為該假設必定成立。

口語裡的不可能，有時並非真的表示不可能，而是指發生的可能性極低。在〈不可能的任務（Mission Impossible）〉那部電影裡，主角湯姆克魯斯還是把任務完

奈曼（J. Neyman，1894－1981）

成了。

某公司宣稱其產品的不良率 $p=0.1$，某消費者協會想做檢定。此處的假設就是 $p=0.1$，隨機地取 100 個樣本來檢驗，且發現其中有 10 個不良品，則很可能會接受前述假設，因數據是吻合的。如果將假設改為 $p=0.11$，則這假設大約也會被接受，因證據並不強到足以推翻 $p=0.11$。所以，務必要了解的是，接受一假設，僅表示樣本未提供充分的證據以拒絕該假設。

另一方面，若拒絕一假設，則表示樣本提供的證據夠強，足以推翻該假設（但仍有可能犯錯）。換一方式來說，若拒絕一假設，表示當該假設是真時，會產生所獲得的樣本的機率很小。例如，對上述情況，若得到 20 個不良品，則應足以拒絕 $p=0.1$ 的假設。什麼原因？若 $p=0.1$，利用排列組合，會得到至少 20 個不良品的機率約是 0.0008。也就是若 p 真等於 0.1，會得到至少 20 個不良品的機率是很小的，僅約萬分之八，所以此時拒絕 $p=0.1$ 的假設，會犯錯的機率很低。

如前所述，拒絕一假設，表示我們認為該假設極可能不真，但接受一假設，倒並不排除其他可能性。因此對一假設，有些人認為以「不能拒絕」的說法，取代「接受」的說法較適宜，這是一種較保守的講法，有點像「不能說不喜歡」不等同於喜歡。不過一般在實際應用時，往往並不那麼謹慎。反正只要理解這是一個隨機現象，在這組數據下可以被接受，在另一組數據下便可能被拒絕了，誤判是難以避免的。因此在文字上斤斤計較，似無必要。


費馬（Pierre de Fermat，1601－1665）

假設檢定

有了一項統計假設，下一步就是去檢定是否要接受或拒絕這假設，這整個過程稱為假設檢定。假設檢定的理論及架構是由波蘭人奈曼（J. Neyman）及英國人皮爾生（E.S. Pearson），在一九三三年提出著名的奈曼－皮爾生引理所奠定的。

在奈曼－皮爾生的架構裡，有一虛無假設（null hypothesis）及一對立假設（alternative hypothesis）。虛無假設通常表示現況，而對立假設表示我們傾向相信的，也就是想證明它是真者。例如，對北銀樂透彩頭獎號碼中1號出現的機率是否大於 1／7 的問題，若研究人員認為答案是肯定的，則會把虛無假設取為 $\mu=1/7$，而對立假設當然就是取為 $\mu>1/7$。

虛無假設是被保護的，除非證據夠強，否則不輕易推翻，這是合理的。如果宣布樂透彩 1 號出現的機率大於 1／7，可能引起不小的震撼，之後即使做了更正，宣布實驗有誤，所造成的損失將難以彌補。對於現況不輕易推翻，會使人們在做決策（如宣布某產品的規格，制定某項辦法等）時更謹慎。因一旦宣布後，便很難被更改，如此會使大家下決定前，能考慮得更周全。古人批評「朝令夕改」，

今人說「朝令有錯，夕改何妨？」相較之下古人還真有智慧。

在假設檢定的過程中，所能忍受的錯誤機率有多大，則要視情況而定。以誤判的機率而言，事實上這中間有兩種錯誤的機率，其一是虛無假設為真卻拒絕（這稱為第一型錯誤），其二是虛無假設不真卻接受（這稱為第二型錯誤）。理想的狀況當然是兩型錯誤機率皆為 0，但通常不會有這種情形。當樣本數固定時，一般而言，兩型錯誤的機率，有一減小另一必增大。

	虛無假設為真	虛無假設不真
接受虛無假設	正確	第二型錯誤
拒絕虛無假設	第一型錯誤	正確

由於虛無假設是真卻誤判它不真的後果往往較嚴重，所以通常的作法是先控制第一型錯誤的機率不要超過某一事先設定的值，然後使第二型錯誤的機率愈小愈好。

無罪推定原則

統計假設的架構，與刑事訴訟法中的無罪推定原則（被告未經審判證明有罪確定前，推定其為無罪）是類似的。我國最高法院，於民國二十五年立下的有罪推定原則判例，在經過 67 年後，終於通過修正。此後被告原則上是無罪的，不必證明自己無罪。法官只要認為被告罪證不足，即可判無罪，不必窮調查之途，才可以判被告無罪。宋朝歐陽修在追述其父母生前言行事蹟的〈瀧岡阡表〉一文中，提到他的父親是死囚「求其生而不得，則死者與我皆無恨也。」也是這種無罪推定的精神。

老師：你們兩人十題是非題答案完全一樣，顯然作弊。
學生：冤枉啊！10題中有5題很簡單，大家都會，其餘5題的答案總共有$2^5=32$(種)組合，我們班有33人，當然會有兩人答案完全一樣。

以往檢察官若認為法官未窮盡調查的途徑，便判被告無罪，會不服而提起上訴，那是因為長期以來法院採取有罪推定原則。法官判決時，採用無罪推定原則是較為人性且合理的。

若一嫌犯因證據不足而被釋放，如果他是無辜的，那當然最好。如果他其實是有罪，但被釋放後洗心革面，再也不犯罪，那也很好。如果他因心存僥倖或其他原因，又犯了罪，則第二次以後，就不見得每次都有那麼好的運氣了，夜路走多總是沒有好下場。若採有罪推定原則，由於這假設不易被推翻，被起訴者容易被判有罪，一旦執行刑罰（如死刑），日後如果真相大白，錯誤如何挽回？

讀者大約也會明白「虛無」二字的由來。如果研究結果宣布北銀樂透彩每期頭獎號碼的產生符合隨機性，這種結論可能沒有幾個人有興趣。社會大眾有興趣的結論是拒絕虛無假設！要嘛宣布頭獎號碼是有公式可以算出，要嘛宣布明牌存在，的確有某幾個號碼較容易出現。

正如一般人有興趣的是，電影明星的婚姻有問題（對立假設），影迷們對其經紀人一再宣稱該明星夫妻恩愛如常（虛無假設），是不會感到興趣的。很多政治人物在被檢察官起訴時常聲稱遭到司法迫害，等法院判決無罪時，又改口稱許司法還他清白。如果明白法院可能是因證據不夠充分，不得已之下而做出接受「虛無」假設（無罪）的判決，就不用太認真地認為司法還給他什麼了。□

費馬最後定理

有解		無解
$x^2+y^2=z^2$	$3^2+4^2=5^2$	$x^3+y^3=z^3$
$x^3+y^3=2z^3$	$1^3+1^3=2\cdot1^3$	$x^4+y^4=z^4$
$x^4+y^4=z^5$	$17^4+34^4=17^5$	$x^5+y^5=z^5$
$x^3+y^3+r^3=z^3$	$3^3+4^3+5^3=6^3$	$\vdots$
$x^3+y^3+r^3+s^3=z^3$	$11^3+12^3+13^3+14^3=20^3$	
$x^4+y^4+r^4=z^4$	$95800^4+217519^4+414560^4=422481^4$	
$x^5+y^5+r^5+s^5=z^5$	$27^5+84^5+110^5+133^5=144^5$	

即使找到再多有解的式子，右側式子依然無一有解。

黃文璋
高雄大學應用數學系教授

以機率淺釋愛國者全勝奪冠夢碎

南方壹

眾所矚目的美國職業美式足球聯盟 (NFL)，2008 年 2 月 3 日舉行第 42 屆超級杯 (Super Bowl) 大賽。賽前未被看好的紐約巨人 (New York Giants) 隊，爆冷門以 17 比 14 險勝不敗之師新英格蘭愛國者 (New England Patriots) 隊，粉碎愛國者隊以空前 19 戰全勝奪冠的美夢。上一次以全勝戰績捧走超級杯的球隊，是 1972 年的邁阿密海豚 (Miami Dolphins) 隊，那已是 36 年前了。強隊如林，整個球季要獲得全勝可說非常不容易。當年海豚隊是全季 17 勝 0 敗。愛國者隊，今年球季本來已獲連贏 18 場的佳績。若贏得超級杯，將創下全季 19 勝 0 敗的空前紀錄。大多數人希望看到英雄，愛國者隊創紀錄的機會大不大？

巨人隊曾有兩次在超級杯奪冠，分別是 1987 及 1991 年，距今已有多年。而自 2002 年起的這 7 年，愛國者隊已是第 4 次闖進超級杯，且前 3 次均奪下冠軍。又今年已有的這 18 場勝利中，其中有兩場便是從巨人隊手中取得。所以從過去戰績來看，愛國者隊本回奪冠的機會似乎是不小。

可惜造化弄人，本來以 10 比 14 落後的巨人隊，在賽終場前 35 秒，完成 13 碼傳接達陣，終場以 17 比 14 贏得冠軍，傷透了愛國者隊及眾多球迷的心。

我們不妨趁此來練習一下機率的演算。假設有隻強隊，每場球獲勝之機率為 0.82，算是很高。則 18 場連勝之機率為 0.82 的 18 次方，約為 0.028096313，是很小。此一小機率事件，平均約 35.5（為前數之倒數）年發生一次。要知小機率事件，只要觀察夠久就不難見到。但即使對這種平均 35、36 年才產生一次的罕見優異球隊，下一場比賽，該隊仍有 0.18 (=1−0.82) 的機率飲恨。0.18 的機率可說不算太小。這說明"大爆冷門"的事件，何以不會少見。 (97.02.04)

趣味統計

南方壺

在美國唸書的女兒，這學期 TA 工作加重。不再如上學期只是帶實習課，要提槍上陣，教一門主要是給管理學院大學部學生的機率課，名稱是 Introduction to Probability Models。對一個來自台灣的研究生，英文不是母語，第一年就要上台教書，壓力當然不小。

1 月 7 日第二學期開始上課。第二週，她相當開心。因不但有學生來找她加簽，還有位學生告訴她說，他上禮拜因故缺了一堂課，只好去旁聽別的班補回來，又說："I think your lecture is better。"女兒聽了很高興，在來信中寫著：

> 哈哈哈！我聽到真是太感動了。原本想說我會不會是裡面最糟的一個。如果他不是在巴結我的話，那我至少是倒數第二名了。一路笑著走回宿舍，真是太開心了。哈哈！(我在想他缺的那堂課，可能是上禮拜三教最爛的那堂。所以他不知道我也是有教很爛的時候)。他帶給我了一點信心。

上課第三週，女兒說她“遇到大挫折”。原來有道排列組合的問題，有位學生想知道他的作法錯在何處？女兒一時沒辦法找出他多算了那些情況，遂告訴學生下次上課會告訴他們。結果一轉身寫黑板，就聽到有人拿著包包走了。一下

課女兒馬上就想了出來，可是已經來不及了。女兒很沮喪，心想他們是不是覺得她很遜，才不想上課。同學安慰她，就當作是他們尿急，才忍不住跑出去。又有一次，才一考完小考，就有人悄悄地跑走了。女兒在信中說：

> 我已經很認真了，很希望可以讓他們學到一些什麼。如果還是有人不想上課，那就算了。他們很多人小考都考不好，我不知道是我講得不夠清楚，還是他們沒有好好念？那些東西我上課都講過，滿分 20，大概只有 15 個人能拿到 16 分以上，很多人還是沒辦法分辨那種題目要用什麼方法。下禮拜三晚上他們要期中考，早上的課是要複習。我一直在想，要怎麼樣才能讓他們把這些東西弄懂。

過年前，我問女兒，學校的台灣同學會有沒有什麼慶祝活動？女兒回信道：

> 上週日台灣同學會有辦個活動，但是我想幫我的學生們弄一份複習講義，所以後來我就沒去了。

上課第五週，2 月 6 日除夕（美國時間）晚上，女兒教的那門課，統一考期中考。考完試後，女兒又來信：

> 我現在上台前有時還是會緊張，只是 10 分鐘後，大概就沒事了。
>
> 總共 15 個班，我們班平均 71.92，比全部 533 個學生的平均 (70.35) 高一點。而且 71.92 是 15

個班裡面第6高的。哈！看來我們班上還是有一些認真唸書的人。4個90分以上，其中一個100。80至90有8個，7個不及格。所以其實他們考得還算可以。我們大家輸入成績的時候都很緊張。我正在輸入時，後面的學長大叫一聲 "Yes! I broke 70! Seventy point zero! I'm a good teacher! " 大家都快被他笑死了。所以等我發現我們班平均將近72的時候，雖然想也未必是因為我教得好，但還是蠻開心的。哈哈！有另一個去年教過的，他非常沮喪。他教兩班，一班平均62，一班平均59。不過他的時間是早上七點半跟八點半，那麼一大早，大概很多學生都還沒睡醒吧！總算度過學生的第一次期中考，換我要準備期中考了。

我回女兒的信：

看來你還算有教書天分。你現在相信你適合教書了吧。學生表現好壞，老師及學生都有責任。另外，也要看雙方可否麻吉。所以一位老師究竟教得如何，可能要看長期，有如球隊講勝率。無論如何，這對你是個好的開始。信心最重要。一旦站上台，掌握發言權，即使心中忐忑不安，仍要顯出談笑風生的樣子。這樣學生才會覺得自在，沒有走錯教室之感。

顯然女兒對教書相當投入，她度過第一個考驗，我很替她高興，但仍忍不住想來看看其中的統計問題。假設這 15

個班程度都差不多，每位任課教師也都教得差不多，不分軒輊。但考試總有運氣，也就是各班平均成績之高低，機會都一樣。則某一班，平均成績在前 6 名之機率為 6 除以 15。有四成的機率，並不難發生。因此某班平均成績排名在前 6 名，尚無足夠證據來支持這位老師教得比較好。另一方面，女兒班上有 38 位學生（比每班平均 35.53 人多些），如果那位考 100 分的學生，當初因某一原因，選修別班的課，卻換來一位程度較差，考 40 分的學生修這班。如此全班總分少了 60 分，平均便少了 1.58，成為 70.34。這時該班平均，便會由高出全部平均 1.57(=71.92-70.35)，轉為低於平均 0.01。排名可能會掉幾名，教師的心情也會由高昂到低沈。但追根究柢，不過就是好、壞兩位學生選課的差別。

女兒又要拿她爸爸無可奈何了。她才高興一下，她爸爸就跟她算統計。這那是什麼趣味統計？ (97.02.16)

趣味數學

南方壺

上個月中旬看到報載“孔子世家譜”第五次的續修工作，已於去年底結束登記，現正進入全面編纂。經過此次大修，家譜所收錄的孔氏家族之總人數，預計將超過 200 萬人，是上一次修訂後的 3 倍多。這份新版孔子世家譜，將涵蓋孔子後世 83 代，刷新原先世界上最長 82 代家譜的金氏世界紀錄。

自明代以來，孔子世家譜已大修 4 次，分別在明代天啟年間、清代康熙年間、乾隆年間，及 1930 年（耗時 7 年）。此次修訂，是首次將女性、少數民族，及外籍後裔納入。其中在韓國的孔子後裔，便有 3 萬多人。這次修訂過程中，還找到居住在台灣桃園及屏東的 9 百多位孔子後裔，以及失散在山西昔陽和河南洛寧，超過千年的兩支族人。新修訂的世家譜，預計在今年底定稿，於明年（2009 年）孔子誕辰時，正式出版。自初中時讀歷史，就一直記得孔子生於西元前 551 年，卒於西元前 479 年，享年 72 歲。所以明年將為孔子誕辰 2560 年。

一個人生後 2560 年，經 83 代，共繁衍出兩百多萬人，算不算多呢？如果你以一代有兩個人來估算，則 83 代共會繁衍的後代共有 2 的 83 次方，即約 9.671 乘上 10 的 24 次方，這將會極端的高估！中國歷來生出來的人，也不會有這麼

多。中國大陸現有人口 13 億，1 億是 1 後面 8 個 0。13 億不過就是 1.3 乘上 10 的 9 次方“而已”。由於天災人禍，人口的繁殖向來沒那麼順遂。而且在中國歷史上，達官貴侯（這些是高繁殖的族群），因鬥爭失敗，或得罪皇帝，而滿門抄斬的不少。還有以往家譜都是不記載女性的，這使家譜中的人數僅約為所有後代之半。

我們家從家父開始，生出 3 個男孩，沒有女兒。我們 3 兄弟皆結婚，共生出 5 個小孩。陰盛陽衰，有 4 女 1 男。女孩不計，我父親的下兩代，人數是 3-1。家父那唯一的男孫，如果將來沒有生男孩，則家父的家譜，傳至 3 代，就結束了。至於如果從我開始算，由於我只有 1 個女兒，沒有兒子，因此自我開始，嗚呼哀哉，是沒有家譜的。這是比照過去兩千多年，孔子世家譜不收錄女性，女子不列入後代。再看我岳家。岳父當年隻身由大陸來台，娶了位寶島姑娘，陸續生了 3 男 1 女。唯一的女兒，自然是內人。他 3 個兒子，共生出 5 男 1 女。所以自我岳父起算的下兩代（仍不計女孩），人數是 3-5，較家父的後代興旺。

這新版的孔子世家譜，男女平等，將女後裔納入。但僅由簡短的報導中，我們不清楚是僅將目前在世的所有女後裔皆納入，還是將兩千多年來的女後裔皆納入，或採其他方式。要將歷來孔子的女後裔皆納入，不只是很困難，應做不到。因在中國歷史上，女子的名字往往未清楚記載，常就是孔氏，黃氏的稱呼。例如，在史記孔子世家索隱中，說孔子有 9 位姊姊（為孔子父親元配“施氏”所生），但名字皆未

記載，及一位哥哥叫做伯尼（早孔子而死），這是他父親的妾（連姓都沒記載）所生。孔子母親，史記裡只說是顏氏，索隱裡則給出顏氏徵在。

孔子年譜中記載“孔子 19 歲時娶宋人亓官氏之女為妻”。也是沒說其名為何？所以我們不知至聖師母的大名。孔子 20 歲時生子鯉，字伯魚。至於孔子有沒有女兒？年譜裡並沒記載。但因在論語公冶長篇中說，子謂“公冶長可妻也，雖在縲絏之中，非其罪也。以其子妻之。”以其子妻之，就是把女兒嫁給公冶長。這種老師真不錯。我也得想想要把我女兒嫁給那位優秀學生？所以，孔子應是至少有一個女兒的，但名字還是不知道。

孔子的父親至少娶了一妻二妾，至於孔子有沒有其他妾？就不清楚了。史記孔子世家記載孔子生伯魚，伯魚生子思，子思生子上，子上生子家，子家生子京，子京生子高，子高生子慎，子慎生鮒，鮒弟子襄，子襄生忠，忠生武，武生延年及安國，安國生卬，卬生驩。列了 13 後代，才共 15 人，並未有太多後裔的樣子。不過如同聖經。在創世記裡，從亞當起記載誰生誰，亞當共活了 930 歲，他的後裔常也是活好幾百年，但記載的每一後代，人數都不多。結果到創世紀第 6 節，就說“當人在世上多起來…”。由於人的行為敗壞，上帝降雨在地上四十晝夜，將其所造各種活物都從地上除滅，只留挪亞一家。所以猜想史記中對孔子的各後代，是如聖經擇重要的記載。孔子世家譜中，對前幾代的記載應很詳盡。

我們沒看過孔子世家譜，一切都只是猜想。孔子家譜中之"非大陸"人士的後裔究竟多少，由新聞中並無法得知。但所佔比例不會太高（仍是猜想），因與中國接鄰的韓國有 3 萬多，且台灣才 9 百多。至於總人數超過兩百萬，是到幾萬，目前我們無法得知。又雖傳了 83 代，但現今在世的孔子後裔中，輩分最高者，"猜想"可能遠達 70 代。因平常所見，同一家族現存的親戚中，差 5 代並不罕見，何況傳了兩千五百多年。

在這麼模糊的資訊下，由已知孔子世家譜中，登錄的後裔有兩百多萬人，想估算現今大陸 13 億人口中，孔子後裔有多少人，容不容易呢？其實由於資料正在整理中，要知道這個數目，也許並不太難。但我們不想去打聽。因即使孔子世家譜中的資料，也必定誤差很大。會有些真孔子後裔未被收錄，而也會有不少是假後裔被收進。

數學中有底下一著名的問題。某人養一對剛出生的兔子。假設兔子自兩個月大起，每對每個月可生一對兔子，若兔子皆未死亡，問 12 個月後共有多少對兔子？答案是兔子按月依下述數列增加：1（第 0 月），1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233，…。所以 12 個月後共有 233 對兔子，其中新生的那一代有 89 對（為第 10 代的 89 對所生）。上述數列，就是著名的費氏數列（Fibonacci sequence）。此數列有很多有趣的性質，與幾何學中著名的黃金分割，關係也極密切。

人口繁殖當然無法像兔子繁殖那麼簡單。而且人就是無

法不死，每個人壽命也不一樣。這兩百多萬的孔子後裔中，很多當然早已過世。那如何估算目前世上有多少孔子後裔呢？

將問題簡化。先假設孔子世家譜中登錄的後裔，就正好是 200 萬人，全為男性，且全為大陸居民。又設每一代出生的人數都相同，且以 r 表之。孔子算第 0 代，有 1 個人。則第 1 代有 r 個人，第 2 代有 r 的 2 次方個人，第 3 代有 r 的 3 次方個人，餘此類堆。即現今輩分最低的第 83 代，有 r 的 83 次方個人。這個等比級數的和有公式求，大家國中時便學過，等於 r 的 84 次方減去 r，再除以 (r-1)。此數若等於 200 萬，藉助計算機解此方程式，立即得 r 之值約為 1.16316，這是每代繁殖出之男性數。怎會繁殖出有小數的後代？此不難解釋，可想成平均每代繁殖的後代人數。反正是沒有辦法中的辦法。我們只是想在未看到新版的孔子世家譜前，對現存孔子後裔的總人數，有個概念。

如果接受 r=1.16316，則孔子第 83 代之男後裔，人數為 1.16316 的 83 次方，即約有 280,592 人。人的壽命差不多是 7、80 年（根據 2007 年 8 月，美國中央情報局統計資料，全世界國民平均壽命最長的國家是西歐小國安道爾，平均壽命為 83.52 歲，台灣以 77.56 歲排第 51，中國大陸則排第 103）。就簡單地假設現存的孔子後裔有 3 代人。則第 82 代男後裔有 1.16316 約 82 次方，即約 241,232 人。而第 81 代男後裔有 1.16316 的 81 次方，即約 207,394 人，這三代男性人口總和為 729,218 人。如果孔子後裔中，男女各半（實際上生男

的比例會高些)，則全大陸目前孔子的後裔為此數的兩倍，即有 1,458,436 人，佔大陸現有 13 億人口的千分之 1.1219。換句話說，大陸目前總人口，約為孔子現存後裔的 891 倍。這數字顯示孔子本身雖只有獨子，但其後裔真是家大業大。

孔子生長的春秋時代，中國究竟有多少人？這我們可不清楚。但來看史記所記載的一段歷史。春秋之後的戰國時代，趙國將領趙括，其父趙奢雖為戰國七雄中，秦國之外六國的八名將之一，趙括的生平事蹟卻成為成語“紙上談兵”。趙括家學淵源，自幼熟讀兵書、能言善辯，卻無實戰經驗。趙王中了秦國的反間計，以趙括取代廉頗為將。這位“勇敢”的趙國人，上任後便改守為攻，在長平主動引兵出擊，結果被秦軍包圍。在突圍時趙括被秦軍射殺不說，投降的 40 餘萬趙兵，也全為秦將白起坑殺。一將功成固然萬骨枯，但一將功不成，枯骨只有更多。光是長平之戰，趙國被坑就有 40 萬人。這樣看來，戰國時代，全中國人口應達千萬。那比戰國時代早些的春秋時代，人口很可能也有千萬。因在春秋戰國時期，中國戰事頻繁，你看一坑殺就是 40 萬，因此在那個時期，中國人口說不定還是遞減呢！在 1 千萬全中國人口中，男子應少於半數 500 萬。因可憐的男人，勞苦擔重擔，常得上戰場，而古來征戰幾人回？所以人口中應女多於男。不過就假設男子有 500 萬人吧！佔當時全中國男子總數 500 萬分之 1 的孔子，兩千五百多年後，其後裔總人數佔全國的 891 分之 1。較平均提昇了 5,612 (500 萬除以 891) 倍。以子孫之繁殖能力論英雄，孔子說不定是他同時期男子的第一名。

你一定沒想到我要告訴你的是這件事。你學了這麼多年數學，可能沒想到數學有這個用途。在中國，數學自孔子時代就被重視。史記孔子世家中記載，孔子弟子"蓋三千焉，身通六藝者七十有二人"。六藝是古代教育學生的六種科目，指禮、樂、射、御、書、數。在國中幾何學裡，都會提到畢氏定理。畢達哥拉斯 (Pythagoras)，是古希臘時代著名的哲學家、數學家及音樂理論家。他的時期約為西元前 580 至 500 年，與孔子的時代相當。畢達哥拉斯的弟子不知多少人。孔子門生，不只要學詩書禮樂，還要學數學。弟子中，可是至少有 72 人數學不錯呢！

司馬遷作史記，對人物分本記，世家及列傳。世家只限世襲王侯，孔子在世時，可沒有封王。司馬遷卻眼光獨到，將孔子列進世家。如今孔氏子孫，揚眉吐氣，成為世界真正第一世家。

附註：以上是以 200 萬皆為男後裔計。超過 200 萬，可能是 250 萬，也可能接近 300 萬。如果最新版的孔子世家譜中，共有 250 萬人，則現存之孔子後裔，依前述計算，將有 185 萬人；若以 300 萬人計，則現存之孔子後裔，將有 224 萬人。佔全國人口比例分別為 703 分之 1，及 580 分之 1。

另外，假設這最新版的孔子世家譜中，是將現存的三代孔子男女後裔皆列入，則分別對 200 萬、250 萬，及 300 萬後裔等三種情況，可求出（仍是藉助計算機）現存三代後裔，男女總人數分別為 105 萬、133 萬，及 161 萬。則所佔全國

人口的比例會下降，分別約 1238 分之 1，977 分之 1，及 807 分之 1，仍然非常可觀。 (97.03.17)

假統計之名

南方壺

學校教務處最近提出一個「於碩士班筆試時針對 300 位碩士班考生進行問卷調查，調查結果分析」。

本來一項調查，從問卷設計、取樣，以及分析，每一環節都要很謹慎，否則不是浪費精力，得到一些沒有價值的結果，就是印證了馬克吐溫所說的：

有三種謊言：謊言、可惡的謊言，及統計。

統計居然被當做比可惡的謊言更可惡的謊言？但這當然不能怪無辜的統計，而是要怪運用統計去當謊言者。

由該結果分析，似乎這次的問卷中共有 6 道題目，其中第二題是：

「請問您覺得考試科目安排幾科最能考出實力？」結果是一科(17)，兩科(161)，三科(115)，四科(20)，五科(1)。

括號中的數字應為人數。由於人數加起來為 314，猜想可以複選。每一題還附上圓形圖，圓形圖的目的是讓人了解支持各選項所佔的比例。但當可以複選時，這種比例的意義究竟為何，就不是很清楚了。另外，有一題是「請問您報考一所

大學碩士班時所考量的因素，依照優先順序，以 1,2, 3, 4, 5 加以標示。」然後統計出

第一順位：

系所特色（師資）(138)，考試科目 (77)，學校環境與設施(65)，錄取率(22)，學校所在位置(27)，國立大學、學校的觀感、聲譽(3)。

第二順位：

系所特色（師資）(59)，考試科目 (61)，…，國立大學，距離(2)。

…

第五順位：

系所特色（師資）(18)，考試科目 (29)，…，學校所在位置(122)。

第六順位：

錄取率(12)，學校所在位置(1)，名額太少，考試日期沒相衝(10)。

不知道列出各順位各選項的填寫人數多寡有何意義？這些統計，都讓人難以理解執行的目的。不過最可議的還是前面所提的第二題，問「考幾科最能考出實力」。對這種問題，居然是用問卷調查，還是問學生！那要不要問學生

您覺得收多少學費學習效果最佳？

或

　　您覺得每科當多少百分比的學生是最好的老師？

學校如果想減少考試科目，以減輕招生負擔，或增加報考人數（此二者可能是想減少考試科目的真正原因），不論用什麼方式決定都好，就是不宜用問學生的方式。況且問學生，問他考試科目幾科他最願意來報考，都還有道理。但假道德之名，問他「考幾科最能考出實力」，這樣的問題，就令人嘆息了。

我們可以"以父之名"（In the name of the father, 1993，英國演員丹尼爾戴路易斯主演），也可以"以統計之名"。但"假統計之名"，就不好了。(97.05.09)

科普著作目錄

1. 黃文璋(2003). 隨機思考論, 324 頁. 華泰文化事業股份有限公司, 台北市.

2. 黃文璋(1999). 數學欣賞, 351 頁. 華泰文化事業股份有限公司, 台北市.

3. 黃文璋(2010). 談高中數學裡的交叉分析. 高中數學電子報第 45 期 (2010 年 4 月 27 日).

4. 黃文璋(2010). 機率應用不易. 數學傳播季刊, 34(1): 14-28.

5. 黃文璋(2009). 統計思維. 數學傳播季刊, 33(4):30-46.

6. 黃文璋(2007). 統計裡的估計. 數學傳播季刊, 31(2):3-20.

7. 黃文璋(2007). 統計裡的關係. 數學傳播季刊, 31(1):49-67.

8. 黃文璋(2007). 從賠率到機率. 科學發展月刊, 411 期 (2007 年 3 月號): 66-71.

9. 黃文璋(2006). 統計裡的信賴. 數學傳播季刊, 30(4):48-61.

10. 黃文璋(2006). 決策的誤差. 數學傳播季刊, 30(3):66-79.

11. 黃文璋(2006). 莎士比亞新詩真偽之鑑定. 數學奧林匹克與數學文化, 第 1 卷第 1 期:1-8. 哈爾濱工業大學出版社.

12. 黃文璋(2005). 統計顯著性. 數學傳播季刊, 29(4):29-38.

13. 黃文璋(2005). 應隨機以恆周. 科學發展月刊, 394 期 (2005 年 10 月號): 68-73.

14. 黃文璋(2005). 從數學統計談預測. 科學月刊, 36(7):553.

15. 黃文璋(2005). 瘋狂大樂透. 數學傳播季刊, 29(1):32-50.

16. 黃文璋(2004). 統計學裡無罪推定的精神. 科學發展月刊, 383 期(2004 年 11 月號): 68-73.

17. 黃文璋(2004). 時運、命運與改運. Net and Books 網路與書, 第 13 期: 64-69.

18. 黃文璋(2004). 隨機與密碼. 數學傳播季刊, 28(2):3-17.

19. 黃文璋(2004). 隨機法則. 數學新天地, 第 8 期(2004 年 6 月號):7-14.

20. 黃文璋(2003). 我拿青春賭明天. 人本教育札記, 164 期(2003 年 2 月號):16-19.

21. 黃文璋(2002). 賭國風雲. 數學傳播季刊, 26(3):45-58.

22. 黃文璋(2002). 挑戰機率. 誠品好讀月刊, 21 期(2002 年 5 月號):46-47.

23. 黃文璋(2001). 和光同塵（上）,(下). 數學傳播季刊, 25(1):68-76, 25(2):88-94.

24. 黃文璋(2000). 瞻前顧後. 統計薪傳, 1(1):83-99.

25. 黃文璋(2000). 數學與思考. 惠普人文科技講座-經典演說系列論文集, 165-198. 國立中山大學共同教育委員會.

26. 黃文璋(1999). 純屬巧合. 數學傳播季刊, 23(4):6-21.

27. 黃文璋(1998). 統計與棒球. 中國統計通訊, 9(8):19-28.

28. 黃文璋(1997). 數學與諾貝爾獎. 數學傳播季刊, 21(4):18-24.

29. 黃文璋(1997). 完全數與梅仙尼質數. 數學傳播季刊, 21(3):14-30.

30. 黃文璋(1992). 布朗運動簡介. 數學傳播季刊, 16(4):29-33.

31. 黃文璋(1992). 順序統計量性質. 數學傳播季刊, 16(4):11-21.

32. 黃文璋(1992). 更新過程具有 Markov 性質之刻劃. 中國統計學報, 30:111-116.

33. 黃文璋(1987). 波松過程的一些性質. 數學傳播季刊, 11(1):13-19.

34. 黃文璋(1987). 統計專輯卷首語. 科學月刊, 18(5):326.

35. 黃文璋(1986). 工業統計在國內之發展. 中國統計學報, 24(5):1-10.

知易行難

南方壺

在考高中及考大學，作文所佔的份量均不小，因此中學生不得不在乎作文。或者，更明確地說，在乎作文成績。大家知道，我們的學生孜孜不倦地唸書，大都僅是為了應付各種大小入學考試。我有時跟學生說，要有志向，但考上研究所不是志向。在孟子盡心上篇，孟子曰"君子有三樂，而王天下不與存焉。"同樣的道理，雖不同的階段，人們為不同的目標而努力，但並非每件目標，均宜拿來當志向。準備入學考，或公職考試等，都不過是試圖通過某道門。過了那道門，該做的事才等著你，其實尚未完成什麼工作。因此豈可以通過這類門當志向？只是沒有入學考，學生常就不知該為什麼努力。甚至少了入學考的鞭策，尚有讀書動機的學生就很少。尚還覺得能寫出通順文章，是必備能力的，也不會太多。

有位某大學語文與創作系的教授，最近為文指出，她在演講時，常有學生要求她"用簡單、速成的方法傳授得高分的作文祕笈"。有回她跟學生討論出"動機自然"、"心意誠懇"，和"手法創新"等三點作文拿高分的要訣。獲得要訣，可含笑而退了嗎？沒有。隨即便有學生提問"怎樣才能寫出那樣的文章？"

要知有時即使知道成功祕笈，也不一定能做的到。像在金庸的射鵰英雄傳中，陳玄風與梅超風夫婦，從師父黃藥師處，盜得九陰真經的下半部。至於上半部經中紮根基，練內

功的秘訣，則絲毫不知。結果梅超風由於修習內功，無人指點，導致走火入魔，落得半身不遂。另外，也可能領略有誤。如梅超風不知練功正法，見到下卷文中說道“五指發勁，無堅不破，摧敵首腦，如穿腐土”，她不知“摧敵首腦”，乃是攻敵要害之意，還道是以五指去插入敵人的頭蓋。於是到處收集骷髏頭。而且，就算祕笈表面看來淺顯，如前面所提，動機自然，心意誠懇，及手法創新，意思再清楚不過，卻可能仍有不知該如何達成的苦惱。此正深度，雖然人盡皆知談吐要有深度，但胡適早就說了，深度這種東西，是沒辦法講的，只能自己去找。如果你有，就有，沒有，就是沒有，但是可以培養。在巨流河一書中，齊邦媛也曾說，文學上最重要的是“格局、情趣及深度”，只是這些都難以用言語來詮釋。所以，追求成功秘訣無妨，但到一個地步，就沒什麼好問了。要問，就是問自己。

在金庸的倚天屠龍記中，有底下一段：

某一日在山間閒遊，仰望浮雲，俯視流水，張君寶若有所悟，在洞中苦思七日七夜，猛地裏豁然貫通，領悟了武功中以柔克剛的至理，忍不住仰天長笑。這一番大笑，竟笑出了一位承先啟後、繼往開來的大宗師。他以自悟的拳理、道家沖虛圓通之道，和九陽真經中所載的內功相發明，創出了輝映後世、照耀千古的武當一派武功。後來北遊寶雞，見到三峰挺秀，卓立雲海，於武學又有所悟，乃自號三丰，那便是中國武學史上不世出的奇人張三丰。

只是要到處閒遊容易，要猛地裏豁然貫通，可就不易了。但張君寶並非只靠閒遊，他也是下過功夫的。在論語衛靈公篇，孔子說：

> 吾嘗終日不食，終夜不寢，以思，無益，不如學也。

張君寶豁然貫通，可以是猛地裏，但卻不是憑空的。上述所引倚天屠龍記文字，是緊接在下句之後：

> 他得覺遠傳授甚久，於這部九陽真經已記了十之五六，十餘年間竟然內力大進，其後多讀道藏，於道家練氣之術更深有心得。

若沒有那十餘年間的苦功，浮雲將只是浮雲，流水將只是流水，可無法讓你若有所悟。

在論語為政篇，孔子說：

> 學而不思則罔，思而不學則殆。

罔就是迷惘，殆即危而不安。孔子以為學與思要兼具，不能光學而不思，也不能光思而不學。這與金庸描述張君寶創出一派武功的過程，可說如出一轍。

所以，怎樣寫好作文，或一般的“如何…”，以及嚴肅些的“研究論文寫作建議” 等，這類大哉問的答案，聽聽即可，不需視為葵花寶典。想在某方面有所提昇，有所突破，還是要仰賴自我的學與思。那是否有志者事竟成？或人皆可以為堯舜？也沒那麼容易。最終便如胡適講的，如果你有這種能力，那就有；若沒有，就是沒有，無法強求。靠明師指導，靠自我努力，是可能把天賦誘發出來。若能達到天賦的

極大值，就謝天謝地了。不要不知足，還嚮往什麼有為者亦若是。

學期中，有某單位找我在七月中旬，給一談科普寫作的演講。後來看到他們的海報，知道此乃一為期兩天，主題是“尋找科普接班人”的研習營。兩天中共有八場演講，當然我只需給一場。聽眾相信都是對科普寫作有興趣者。雖個人經驗有限，但既然答應了，只好野人獻曝，給出一些我以為的原則。講後，若有聽眾問“怎樣才能寫出那樣的文章？”我將告訴他，動筆就是。(99.7.2)

有位某大學語文與創作系的教授，最近為文指出，她在演講時，常有學生要求她“用簡單、速成的方法傳授得高分的作文祕笈”。有回她跟學生討論出“動機自然”、“心意誠懇”，和“手法創新”等三點作文拿高分的要訣。獲得要訣，可含笑而退了嗎？沒有。隨即便有學生提問“怎樣才能寫出那樣的文章？”

要知有時即使知道成功祕笈，也不一定能做的到。像在金庸的射鵰英雄傳中，陳玄風與梅超風夫婦，從師父黃藥師處，盜得九陰真經的下半部。至於上半部經中紮根基，練內功的秘訣，則絲毫不知。結果梅超風由於修習內功，無人指點，導致走火入魔，落得半身不遂。另外，也可能領略有誤。如梅超風不知練功正法，見到下卷文中說道“五指發勁，無堅不破，摧敵首腦，如穿腐土”，她不知“摧敵首腦”，乃是攻敵要害之意，還道是以五指去插入敵人的頭蓋。於是到處收集骷髏頭。而且，就算祕笈表面看來淺顯，如前面所提，

動機自然，心意誠懇，及手法創新，意思再清楚不過，卻可能仍有不知該如何達成的苦惱。此正深度，雖然人盡皆知談吐要有深度，但胡適早就說了，深度這種東西，是沒辦法講的，只能自己去找。如果你有，就有，沒有，就是沒有，但是可以培養。在巨流河一書中，齊邦媛也曾說，文學上最重要的是“格局、情趣及深度”，只是這些都難以用言語來詮釋。所以，追求成功秘訣無妨，但到一個地步，就沒什麼好問了。要問，就是問自己。

所以，怎樣寫好作文，或一般的“如何…”，以及嚴肅些的“研究論文寫作建議”等，這類大哉問的答案，聽聽即可，不需視為葵花寶典。想在某方面有所提昇，有所突破，還是要仰賴自我的學與思。那是否有志者事竟成？或人皆可以為堯舜？也沒那麼容易。最終便如胡適講的，如果你有這種能力，那就有；若沒有，就是沒有，無法強求。靠明師指導，靠自我努力，是可能把天賦誘發出來。若能達到天賦的極大值，就謝天謝地了。不要不知足，還嚮往什麼有為者亦若是。

學期中，有某單位找我在七月中旬，給一談科普寫作的演講。後來看到他們的海報，知道此乃一為期兩天，主題是“尋找科普接班人”的研習營。兩天中共有八場演講，當然我只需給一場。聽眾相信都是對科普寫作有興趣者。雖個人經驗有限，但既然答應了，只好野人獻曝，給出一些我以為的原則。講後，若有聽眾問“怎樣才能寫出那樣的文章？”我將告訴他，動筆就是。 (99.7.2)

蘇轍：上樞密韓太尉書

轍生好為文，思之至深，以為文者氣之所形。然文不可以學而能，氣可以養而致。孟子曰“我善養吾浩然之氣。”今觀其文章，寬厚宏博，充乎天地之間，稱其氣之小大。太史公行天下，周覽四海名山大川，與燕、趙間豪俊交遊；故其文疏蕩，頗有奇氣。此二子者，豈嘗執筆學為如此之文哉？其氣充乎其中，而溢乎貌，動乎其言，而見乎其文，而不自知也。…

開始動筆⇨勤動筆

⇨學然後知不足

謝謝各位！