認識機率

黃文璋

國立高雄大學
應用數學系，統計學研究所

統計科學營
2009年11月14日

1.何謂機率

取自網路

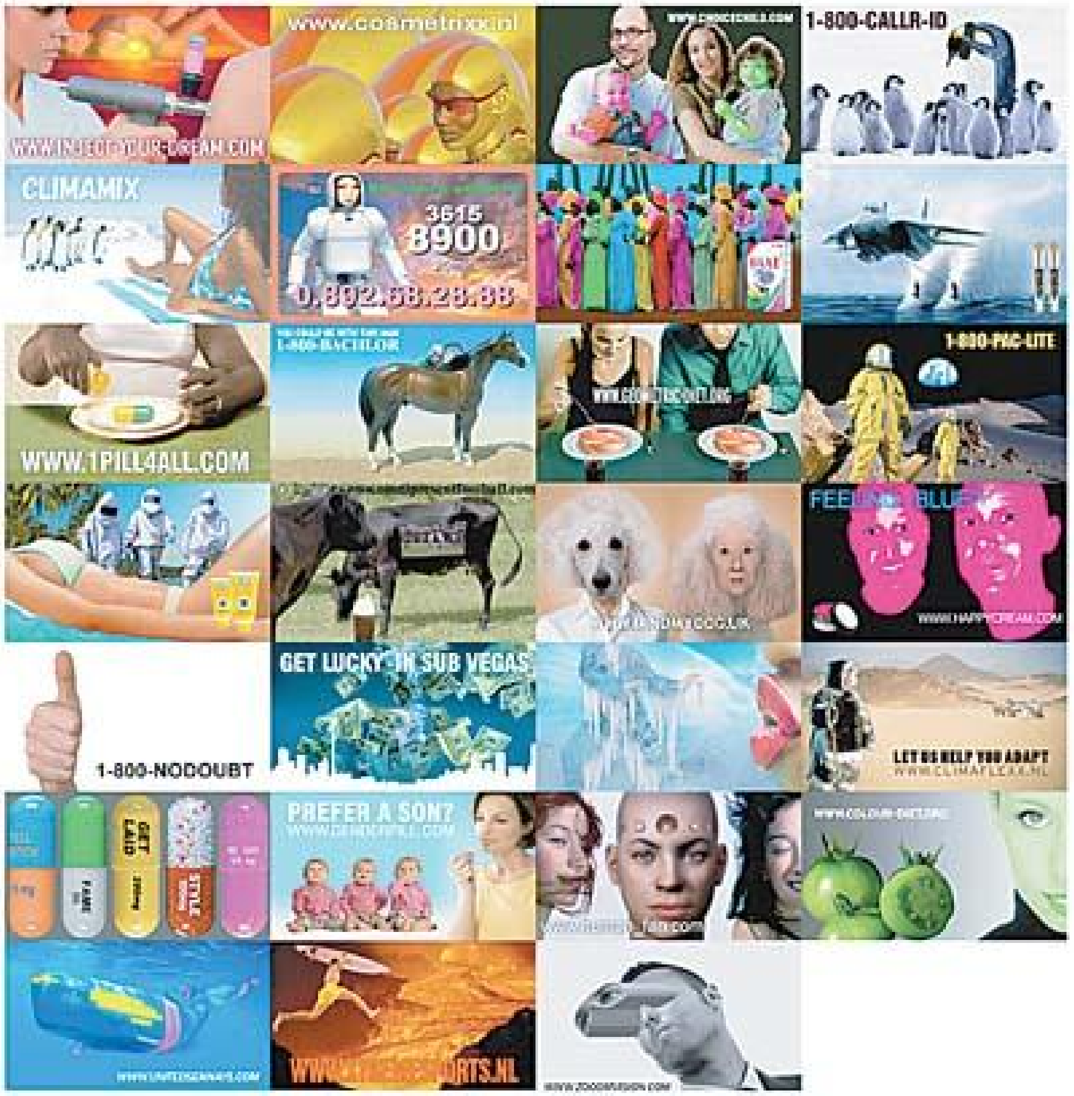
機率是統計上騙人的東西，許多事情要重複做100次才有機率可言。懷孕不可能100次，每次懷孕生雙胞胎機率是1/89，但單次懷孕生雙胞胎機率若不是0%，就是100%。就好像問我，50元銅幣丟到地上一次，是蘭花機率有多少？事實上，50元銅幣丟到地上，不是總統府，就是蘭花。如果丟到地上100次，那麼機率就會接近50%。如果丟到地上1次，蘭花的機率，若不是0%，就是100%。

機率與統計關係密切。

統計又是什麼？

PRADA

OBVIOUS CLASSICS #1



上課啦 T恤圖案古怪趣味 嘲弄人類恐懼及欲望

PRADA春夏搞起統計學文化

藝術家跨界替時尚品牌設計的限量T恤，往往就是最能表達穿著者個性的搶眼之作。春夏PRADA新推出一系列統計學文化T恤，就算搞不懂藝術家口中什麼統計學和美術的關係，但至少知道這些企鵝、藥丸、機器人圖案真的可愛到不行，透明密封袋包裝也是古怪又趣味。

其實，統計學文化來自名建築師Rem Koolhaas等人組成的團體AMO，他們將統計數據美學作為創作材料，將有趣的統計數字混合各種的圖片，替PRADA創作出Obvious Classic這些圖案T恤，嘲弄人類的恐懼及欲望，共有27款，每件6千元。

(中國時報96年4月27日 徐亦橋)


GET LAID
1-800-CALLR-ID
WWW.UNITEDSEAWAYS.COM
LET US HELP YOU ADAPT
WWW.CLIMAFLEXX.NL

馬克吐溫(1907)：

There are three kinds of lies: lies, damned lies, and statistics.

(有三種謊言: 謊言, 可惡的謊言, 及統計)

- 統計的內涵似乎不易令人掌握。
- 什麼是很有
  - 統計頭腦？
  - 統計細胞？
  - 統計素養？

- 1987年，是印度傳奇數學家拉曼紐揚(Srinivasa Ramanujan, 1887-1920)的百年誕辰。
- 有一系列的紀念活動。
- 當代著名統計學者，出生於印度的勞氏(C. Radhakrishna Rao, 1920-)，也應邀做了三場演講。

◆之後，印度統計學研究所(Indian Statistical Institute)基於勞氏的演講稿，於1989年，為他出版了統計與真理一書，1997年發行第二版。

在第一版的序文中，勞氏提到：

- 學生時代，我主修數學—一種從給定前提下演繹結果的邏輯。
(the logic of deducing consequences from giving premises)

- 後來我唸統計學—一種從經驗中學習的合理過程，及從給定的結果驗證前提的邏輯。
(a rational approach to learning from experience and the logic of identifying the premises given the consequences)

◆我已認識到數學及統計，在人類為提昇自然知識，及有效管理日常事務，所做的一切努力中，佔有重要性。

我相信：

- 在最終的分析中，所有知識皆為歷史。
- 在抽象的意義下，所有科學皆為數學。
- 在理性的世界裡，所有判斷皆為統計。

- 近年來，鑒於統計學的重要性，高中數學裡，逐漸加進統計的題材。
- 95學年開始的"普通高級中學數學課程綱要"中，新增的信賴區間與信心水準，卻帶給師生不小困擾。
- 此新加入的統計題材，由於需取樣，得到數據，使機率論裡隨機性的特質顯現出來。

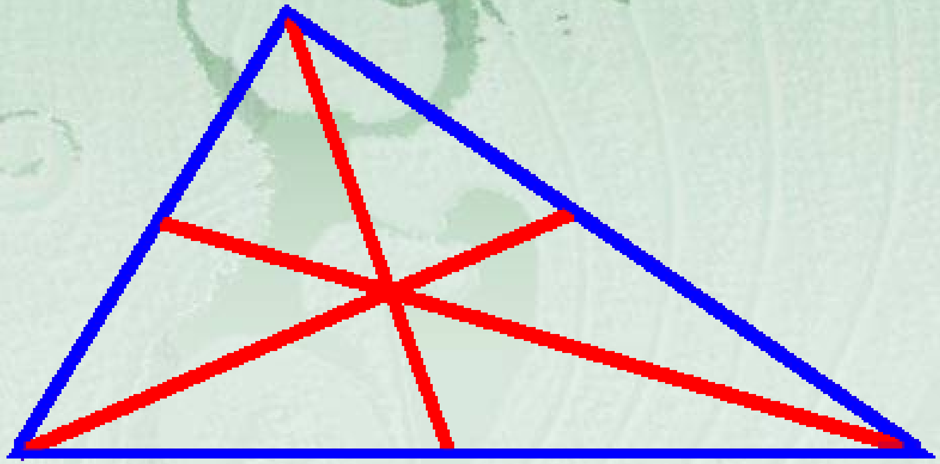
◆雖有人認為機率與統計，“這類數學所需的前置準備不多”，因此提前教沒問題。

◆但隨機性的概念，在理解層次上，其實並不是那麼容易能掌握。

◆大學裡統計比微積分難教、難學。

宇宙的運轉，有必然性及隨機性。

數學中有很多必然性。



三角形重心、外心、垂心三點共線。

幾何原本(2,300年前)中有許多這類的結果。

◆隨機性：

- ◆銅板落地那一面朝上？
- ◆氣象局預測莫拉克颱風降雨集中於北部地區。

- 對必然性的探討不論在天文、物理、化學或數學，歷史悠久，且成效不錯。
- 科學家樂意挑戰必然性的問題。

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \quad ,$$
$$5^2 + 12^2 = 13^2 \quad ,$$
$$7^2 + 24^2 = 25^2 \quad ,$$
$$9^2 + 40^2 = 41^2 \quad ,$$
$$\vdots$$
$$x^2 + y^2 = z^2 \quad ,$$

有無限多組整數解。找到一組就有無限組：

$$6^2 + 8^2 = 10^2,\ 9^2 + 12^2 = 15^2,\ \cdots \quad 。$$

◆費馬(Pierre de Fermat, 1601-1665)，職業律師，業餘研究數學。

◆死後他兒子在其筆記本上發現底下一段話：

$$x^3 + y^3 = z^3 \quad ,$$
$$x^4 + y^4 = z^4 \quad ,$$
$$\vdots$$

都沒有正整數解，我可以證明它，但這個地方太小寫不下。

- 約寫於1637年。即

$$x^n + y^n = z^n, n \geq 3 \text{ ，}$$

x, y, z皆為正整數，無解。這就是著名的

費馬最後定理。

- 數學中少數敘述簡單的大難題。
- 經過三百多年許多數學家的挑戰，1994年被美國普林斯頓大學數學教授Andrew J. Wiles 證出，證明有200頁。

◆歐幾里得的幾何原本：

6, 28, 496, 8, 128等皆是完全數。

$$6 = 1+2+3 = 2\cdot 3 = 2^1\cdot(2^2-1)$$ ，

$$28 = 1+2+4+7+14 = 4\cdot 7 = 2^2\cdot(2^3-1)$$ ，

$$496 = 1+2+4+8+16+31+62+124+248 = 16\cdot 31 = 2^4\cdot(2^5-1)$$ ，

$$8{,}128 = 64\cdot 127 = 2^6\cdot(2^7-1)$$ 。

- 偶完全數可以決定：

$$2^{n-1}(2^n - 1),$$

其中 $2^n - 1$ 為質數(梅仙尼質數)。

- 是否有奇完全數？至今未知。
- 完全數(Perfect number)很稀少，至今共知47個。

- 1996年起，世界性的GIMPS組織尋找梅仙尼質數。自第35至第47個都是他們找到。
- The Great Internet Mersenne Prime Search

  http://www.mersenne.org/prime.htm

- 2008年8月23日找到目前最大的第45個：

$$2^{43,112,609}-1,$$

有

12,978,189位。

- 1兆才13位。這才是天文數字！
- 此數印出要多少頁？

- A4紙一頁可容4,000位，共需

$$\frac{12,978,189}{4,000} \sim 3244.5$$

$$\Rightarrow 3,245\text{頁}。$$

- 對隨機性的了解則很侷限：
  - 明天會不會下雨？
  - 颱風走向？
  - 下次地震是何時？

- 信賴區間是奈曼(Jerzy Neyman, 1894-1981)於1934年演講中首度提出。
- 演講結束後，大會主席包雷(Arthur Lyon Bowley, 1869-1957)於致詞中提到：

  我不很確定此信心不是一信心戲法。
  (I am not all sure that the "confidence" is not a "confidence trick")。

- 在95%信賴區間中，
  - 95%究竟是指什麼？
  - 是機率嗎？
  - 如果是，是什麼的機率？

- 統計裡有各種方法，但因處理隨機現象，少有

倚天不出，誰與爭鋒

的方法。

近年來中學數學重視統計

- 在高中數學98課綱，附錄3.3“常態分布，信賴區間與信心水準的解讀” 中說：

  高中程度的統計推論只做隨機變數期望值的估計，它的背後理論是中央極限定理。要介紹中央極限定理，就需引入常態分布。此部分僅做通識性的介紹，以活動方式建立學生對於中央極限定理的直觀。對一固定的信心水準，給出信賴區間公式，再讓學生以亂數表模擬或實驗投擲正面出現為p的銅板n次，代入信賴區間公式，以說明信心水準的意涵；並以此解讀，何以大多數學生所得的信賴區間都會涵蓋p？

- 這段解讀中問題不少。
- 何以信賴區間的概念不易理解？

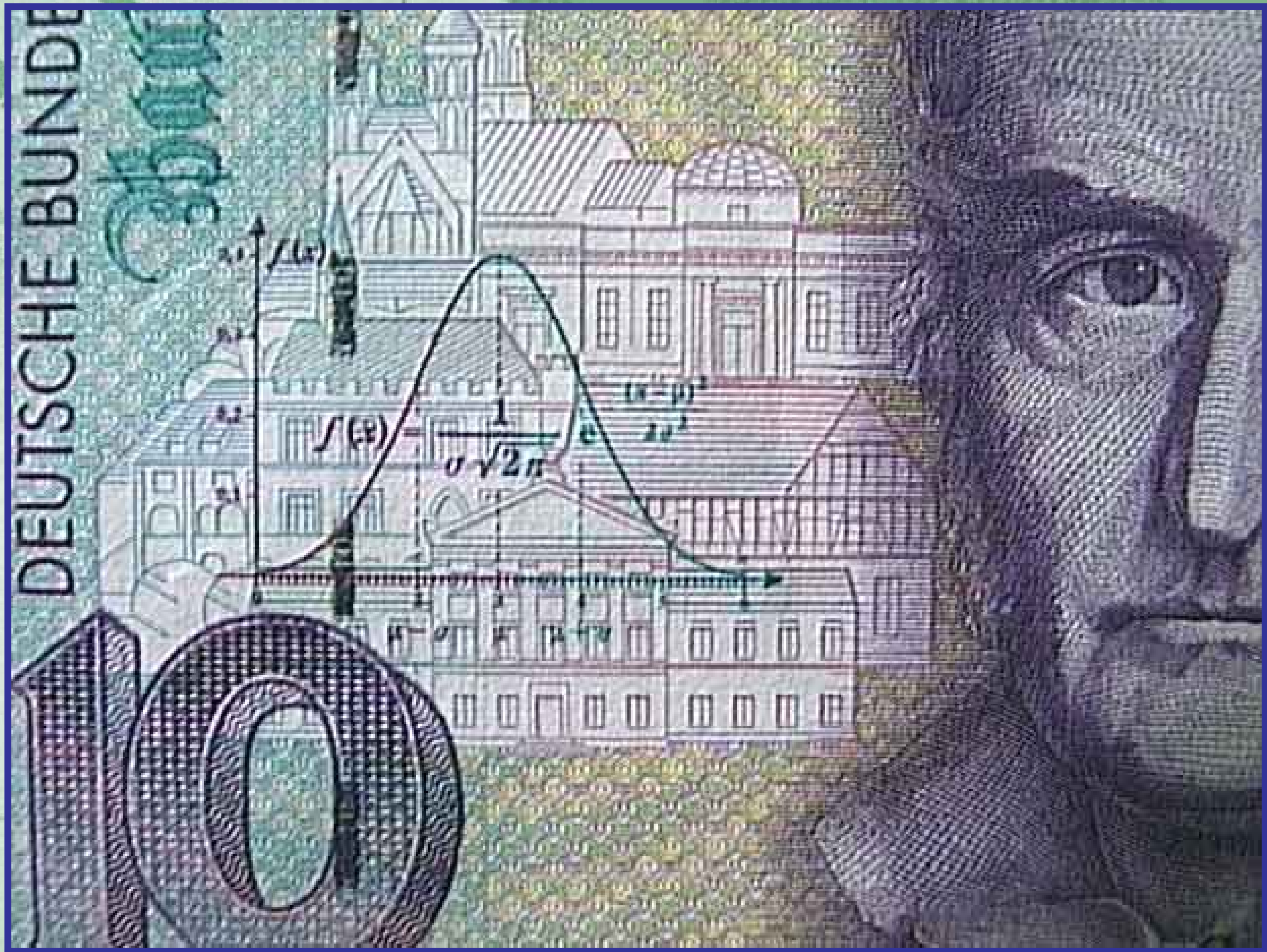
⇒ 未能正確了解機率涵意！

機率究竟是深不可測，或僅是

庶民數學？

若輕忽機率的深度，則僅是提早教機率統計，對國民善用統計，並無幫助。


GS1527893K8
DEUTSCHE BUNDESBANK
10
ZEHN DEUTSCHE MARK
GS1527893K8


DEUTSCHE BUNDE
10

2.機率的意義

◆古典機率，基本假設是相同可能性。適用於擲銅板、骰子、玩撲克牌，…。

◆例. 投擲一公正的銅板10次，觀測所得正面數。

問：樣本空間為何？

◆2009年7月底8月初，老虎伍茲(Tiger Woods)，參加別克公開賽。第一輪打完，落後領先者多達8桿，排名95。

◆首次連續2場比賽提前被淘汰？

- 打完前3輪後，伍茲躍居首位。
- 這時大家看法丕變，一致認為這座冠軍盃，幾乎可說是他的囊中物了。
- 因過去的紀錄，伍茲如能帶著54洞領先進入決賽圈，戰績35勝1敗。

他贏了沒有？

- 以相對頻率來解釋機率。
- 在沒有更多資訊下，常被認為一客觀的辦法。

- 某君看上一女孩，驚為天人，覺得這是他今生的新娘。
- 評估後信心滿滿，自認追上的機會有8成：

主觀機率！

- 上述三種常見對機率的解釋，大抵就是人們評估事件發生可能性之大小的幾種思維。
- 雖針對不同的情況，但常能交互著運用。

- 此三種對機率的解釋，已涵蓋不少實際生活中的情況，數學家當然不會在此止步。
- 他們喜歡抽象化，及一般化。

- 以公理化的方式，來引進機率！
- 有一非空的集合，稱做樣本空間。
- 樣本空間的某些子集，是我們有興趣的，這就是一個個的事件。
- 所有事件也構成一集合。
- 最後定出一機率函數，即對每一事件，給一介於0,1間的值，為該事件之機率。
- 樣本空間、事件的集合，及機率函數，三者便構成機率空間。

◆公理化後，機率論便快速地發展，並成為數學中一重要的領域。

◆這歸功於俄國的科莫果洛夫(Andrey Nikolaevich Kolmogorov, 1903-1987)，於1933年出版的小書機率論的基礎：

機率論作為數學學科，可以而且應該從公理開始發展，就如同幾何、代數一樣。

3.何處是機率天地

- 有法國牛頓之稱的拉普拉斯(Pierre Simon, Marquis de Laplace, 1749-1827)曾說：

  這門源自考慮賭博中的機運之科學，必將成為人類知識中最重要的一部分，生活中最重要的問題中的大部分，都將只是機率的問題。

- 隨機的經驗源遠流長。
- 舊約聖經利未記第十六章：

為那兩隻羊拈鬮，一鬮歸與耶和華，
一鬮歸與阿撒瀉勒。

- 民數記第二十六章，耶和華曉諭摩西：

還要拈鬮分地。

- 在新約聖經，耶穌被釘死在十字架上後：

兵丁以拈鬮來分他的裏衣。

◆機率是針對隨機現象。

◆有些事雖非隨機，如

胎兒性別、考前猜題、拿在背後的水果，…，

◆惠子對莊子說：

子非魚，安知魚之樂？

◆但莊子可說：

魚快樂之機率為…。

但對已命好題目的老師，

去判斷那一題會考出的機率，

並無意義。

- 投擲銅板那一面朝上？是否隨機？
- 一切按照神的旨意在進行？

4.解釋機率

- 投擲一骰子，點數1出現機率為0.1，是什麼意思？

- 數學系畢業生：

假設投擲n次，點數1出現a次，則相對頻率a / n與0.1之差的絕對值，會大於一給定正數(不管它多小)之機率，將隨著n的趨近至無限大，而趨近至0。即

$$n \to \infty \text{時，} \left| \frac{a}{n} - 0.1 \right| \to 0 \text{。}$$

◆大數法則：

重複觀測，事件出現的相對頻率，會機率收斂至事件發生的機率。

疑惑

- 無限大是什麼？
- 什麼是趨近至無限大？
- 用機率來解釋機率？

- 事件出現的相對頻率，當觀測數夠大，必接近事件發生的機率？
- 事件只要機率為正，便都可能發生 $\Rightarrow$ 不論觀測數再大，都不能排除很偏頗的事件發生。

- 統計學家跳出來，可以做一檢定，檢定點數1出現的機率是否真為0.1。
- 在點數1出現機率為0.1之假設下，觀測到的結果，若屬不尋常，便推翻原假設。
- 什麼是尋常？不尋常？

朱雀橋邊野草花，烏衣巷口夕陽斜，

舊時王謝堂前燕，飛入尋常百姓家。

唐 劉禹錫

烏衣巷

◆不尋常指發生的機率很小。

◆若觀測到不尋常的結果，則當初的假設就不宜接受。

◆在隨機的世界，究竟何者為真，常屬未知。

◆我們往往無法證明那件事是真實的。

◆都是假設，就看你接受那一個。

◆假設一

我願意為你赴湯蹈火。

◆假設二

我愛你，
愛著你，
就像大鼠愛大米。

◆假設三

我用我的生命愛你，

不讓尖銳的世界傷害你。

不懂花言巧語的人，

我愛你，

往往來不及證明。

做個假設檢定！

5.信賴區間

- 以一區間來估計參數，並給出此區間會涵蓋該參數之機率。
- 此即區間估計，所得的區間，稱為信賴區間。

- 估計銅板出現正面之機率*p*。
- 取樣前，信賴區間為一隨機區間。
- 取樣後，得到一固定區間。
- *p*會屬於該區間的機率，將不是1便是0，而不再是*p*了。

◆打擊手揮棒前，可以說打出安打之機率為0.341。

◆打完不是安打就非安打，0.341已派不上用場了。

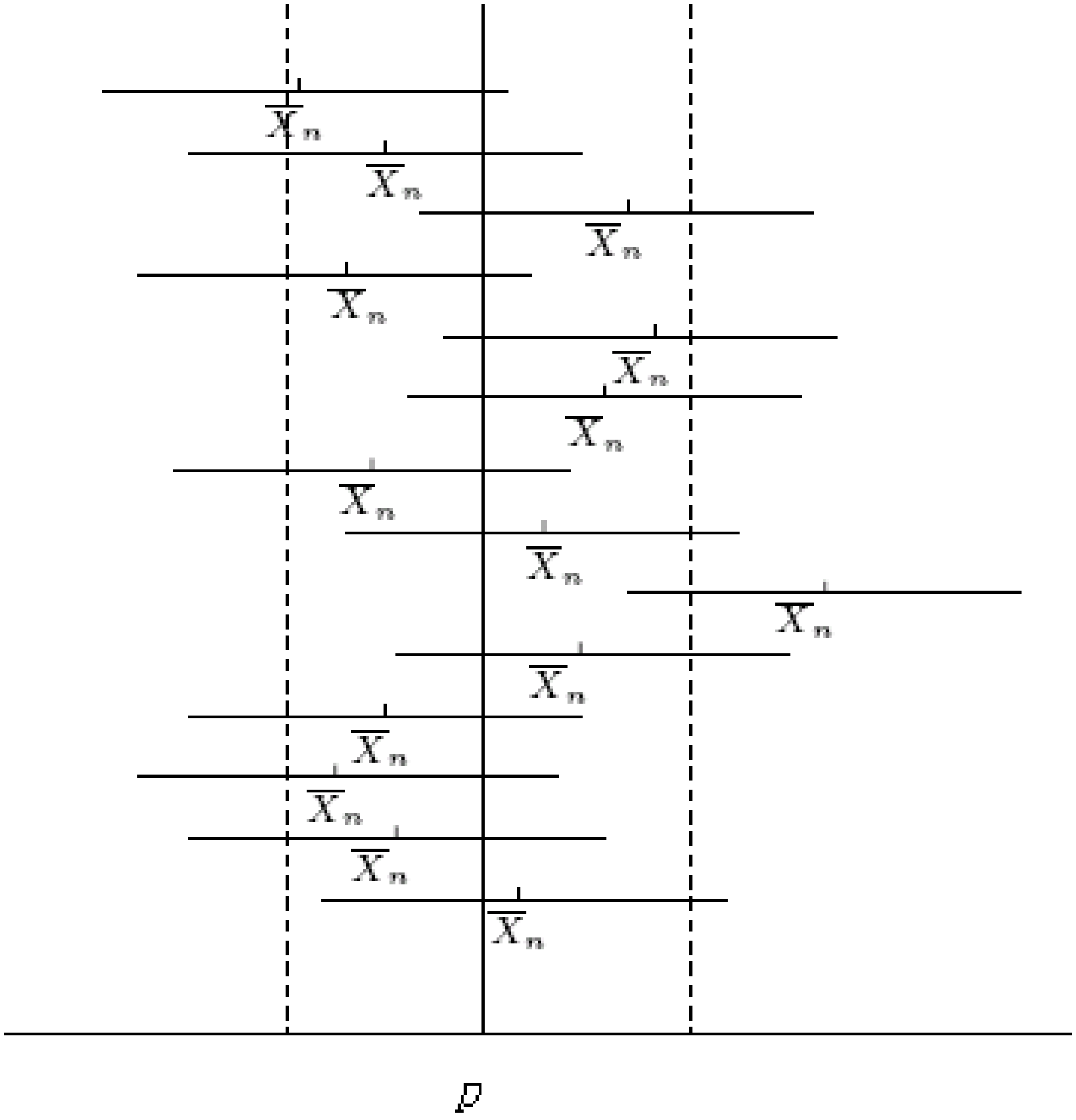
◆張無忌練成九陽真經的神功後，輕易鑽過洞穴，朱九齡卻被岩石卡住：

這小子比我高大，他既能過去，我也必能過去，為什麼我會擠在這裡。當真豈有此理！

◆一旦發生，就不論機率大小，豈有此理又奈何？

- 課綱中說，可以亂數表模擬出現正面機率為*p*的銅板*n*次，以求得信賴區間。
- *p*乃事先設定，模擬所得之一固定區間，*p*有沒有落在其間，一看便知，如何能說該區間涵蓋*p*之機率為0.95？

- 那95%有何用？
- 0.95是一機率值，而機率值從來就不是只看一次的實驗結果。
- 大約可以這麼說，如果反覆實驗，而得到很多信賴區間，其中會包含p的信賴區間數，約佔全部區間數的95%。


$\overline{X}_n$
$\overline{X}_n$
$\overline{X}_n$
$\overline{X}_n$
$\overline{X}_n$
$\overline{X}_n$
$\overline{X}_n$
$\overline{X}_n$
$\overline{X}_n$
$\overline{X}_n$
$\overline{X}_n$
$\overline{X}_n$
$\overline{X}_n$
$\overline{X}_n$

- 0.95的意義，乃如同對機率的解釋。
- 但對同一個p，如果全班40人，所得到40個95%信賴區間，其中包含p的個數未超過85%也不要太驚訝。
- 此機率約為0.01388。
- 雖不太大，但只要班級數夠多，便不難發生。

- 98課綱說：

  大多數學生所得的信賴區間都會涵蓋p，

- 缺乏隨機的概念。

6.情境解讀

◆機率與我們生活息息相關。若能善用機率，將有助於在隨機世界中，更精準的做決策。

◆但往往機率應用不易，得到的機率值，常被認為是錯的。

◆而且還眾說紛紜，各提出不同的機率值。

◆原因何在？

- 數學課程中，會遇到所謂應用題。
- 寫出數學式子後，就是解數學了。
- 這時便可拋開原先那段冗長的敘述。
- 但在機率裡，看似簡單的情境，因解讀不同，會導致南轅北轍的結論。


A
J
Jim Sturgess
Kate Bosworth
Laurence Fishburne
Kevin Spacey
21
FIVE STUDENTS WHO
CHANGED THE GAME FOREVER.
SPRING 2008

◆在決勝21點中，

有3扇門，其中1扇門後有汽車，另兩扇門後為山羊。你選擇第1扇門後，主持人打開第2扇，見到山羊。問你這時該不該換第3扇門？有位學生答

Yes, because my chance of getting the car will increase from 33.33% to 66.67% by switching from door 1 to door 2.

◆正確的講法應該是：

若主持人事先知道汽車在那扇門後，則他會打開1扇門後是山羊的門，假設是第2扇。

這時若換選第3扇門，則得到汽車的機率，由1/3增加為2/3。

若主持人事先不知汽車在那1扇門後，只是隨機地自第2及第3扇門中，挑一扇打開，且剛好門後是山羊，則便不用換，因換與不換，得到汽車的機率，皆為1/2。

◆ 但隱含做一假設。即若第2、3扇門後皆為山羊，則隨機地打開第2或第3扇門。

◆ 可以有更一般的假設。當第2或第3扇門後皆是山羊，主持人分別以 q 及 $1-q$ 的機率，打開第2或第3扇門。則換選第3扇門，得到汽車的機率成為

$$\frac{1}{1+q}\text{。}$$

- 此機率會受主持人是如何打開第2扇門的影響！
- 由於對 $0 \le q \le 1$ ，

$$\frac{1}{1+q} > \frac{1}{3},$$

所以換，仍是較好的選擇。

◆再看一例。

一對夫妻剛搬進某社區，只有兩個小孩，並不知性別。

某日社區管理員，見到此家之媽媽，帶著家中一小孩在玩耍。

若該小孩是女孩，求兩小孩皆為女孩之機率。

- 如何將

見到此家之媽媽，帶著家中一女孩，

轉化為適當機率空間中的事件？

- 究竟如何帶小孩出門？
- 該事件並不等同於

此家至少有一女孩！

- 本問題之詳細討論，可參考黃文璋(2009a)一文之例8。

- 另一常出現的例子：

  平面上有一單位圓，隨機地畫一條弦，求弦長大於此圓內接等邊三角形之邊長機率。

- 如何隨機畫弦？
- 由1至n的n個正整數中，隨機地取一數？
- 自區間[0,1]中隨機地取一數？

- 在處理機率問題時，情境要定義清楚。
- 即機率空間要明確給出，否則將導致各說各話。
- 有時情境較簡單，如

投擲一公正骰子，求點數大於4之機率。

- 當對情境有疑義時，就要如莊子在秋水篇講的，

  請循其本，

  把機率空間調出來。

- 有如政治或社會上，遇到有重大爭議時，就要祭出憲法，並由大法官解釋。

- 機率中一些獨特的概念，如條件機率，獨立性，及隨機取樣等，也是應用機率時，得謹慎留意的。

7. 結語

- 顯通寺：五臺山現存最早最古及最大的寺院。
- 山西五臺山是文殊菩薩演教和居住的地方，所以五臺山的寺院，都以供奉文殊菩薩為主。大文殊殿為顯通寺的第二進殿宇。殿外有幅對聯：

德相非空非有應隨機以恆周，

法身無去無來住寂光而不動。

- 將隨機融入思考中：

  邏輯思考、隨機思考、…。

- 不能以數學的方式來想機率與統計：
  - 視機率0.6，0.4為二數字，而0.6 > 0.4？
  - 95%的信賴區間，指實驗100次有95次值得信賴？
- 事件的機率會變，因情況、新資訊而改變。
- 機率值因情境不同，可有不同涵意。

- 做決策時要算算機率、期望值、變異數等，依統計方法找到最佳策略。

- 最佳策略（在要求的條件下）就是最佳的。除非有意外，結果會令人滿意。只是

隨機世界裡永遠有意外，

豈有此理之事也不少。

心想機率，但不要過度迷戀！

- 依賴統計做決策是科學的，但並非就可高枕無憂：
  - 萬物有常，世事多變！
  - 少算易敗，多算少敗。
  - 不爭一時，但爭千秋！
  - 不挑戰機率，與機率為友！

- 在隨機世界裡
  - 必然性使人們願意事先好好準備，
  - 隨機性使未來充滿著盼望與不確定性。
- 因此

困境時等待隨機性，

順境時想要必然性。

- 光有必然性的世界，毫無變異

  ⇒對未來失去盼望，少了努力的動機。

  伊甸園終究得離開，桃花源再也找不到。

- 光有隨機性的世界，只靠運氣

  ⇒太多不確定，令人不想積極認真。


大文殊殿


大文殊殿
德相非空非有應隨機以恆周

法身無去無來　住寂光而不動

德相非空非有　應隨機以恆周

謝謝各位！

附註

◆1. 42取6的樂透彩，每簽一注，至少中一碼之機率為

$$1 - \frac{\binom{36}{6}}{\binom{42}{6}} = 1 - \frac{1,947,792}{5,245,786} \sim 0.629 \ 。$$

- 2. 取樣前，每一區間包含p之機率為0.95。故總共包含p之區間數X，有二項分佈，參數為40, 0.95。因此

$$P(X \le 34) = \sum_{i=0}^{34} \binom{40}{i} 0.95^{i} 0.05^{40-i} \sim 0.01388$$ 。

◆3. 在汽車與山羊問題，你先選了第1扇門。當第2及第3扇門後皆是山羊，假設主持人分別以q及$1-q$的機率，打開第2或第3扇門，其中 $0 \le q \le 1$。底下求，在給定主持人打開第2扇門，且門後是山羊之下，你更換選擇，會得到汽車之機率。

令樣本空間為

$$\Omega = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}，$$

其中(1,2)表第1扇門後有汽車，且主持人打開第2扇門，餘類推。

◆事件的集合F，取為包含Ω之所有子集之集合。

◆令機率函數P滿足

$$P(\{(1,2)\}) = \frac{q}{3}，P(\{(1,3)\}) = \frac{1-q}{3}，$$

$$P(\{(2,2)\}) = 0，P(\{(2,3)\}) = \frac{1}{3}，$$

$$P(\{(3,2)\}) = \frac{1}{3}，P(\{(3,3)\}) = 0，$$

$P(\{(1,2)\})=q/3$，是因汽車在第1扇門後之機率為1/3，且主持人有q的機率打開第2扇門，兩機率相乘即得$q/3$；

$P(\{(2,2)\})=0$，是因若汽車在第2扇門後，主持人必定打開第3扇門，…。

主持人打開第2扇門事件為

$$A=\{(1,2),(2,2),(3,2)\}，$$

其機率為

$$\frac{q}{3}+0+\frac{1}{3}=\frac{1+q}{3}。$$

更換第3扇門，會得到汽車之事件為$B=\{(3,2)\}$，其機率為1/3。則

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{1/3}{(1+q)/3}=\frac{1}{1+q}。$$

若q=1/2，就是原先的情況，此時$P(B|A)=2/3$。

若q=0，則$P(B|A)=1$，

若q=1，則$P(B|A)=1/2$。

此二種情況的意義是什麼？

對應的$P(B|A)$為何是1及1/2？

參考文獻

◆1. 黃文璋(2003a)。機率論。華泰文化事業股份有限公司，台北。

◆2. 黃文璋(2003b)。隨機思考論。華泰文化事業股份有限公司，台北。

◆3. 黃文璋(2005a)。應隨機以恆周。科學發展月刊，394期(2005年10月號)：68-73。

◆4. 黃文璋(2005b)。統計顯著性。數學傳播季刊，29(4)：29-38。

- 5. 黃文璋(2006)。統計裡的信賴。數學傳播季刊，30(4)：48-61。
- 6. 黃文璋(2007)。統計裡的估計。數學傳播季刊。31(2)：3-20。
- 7. 黃文璋(2009a)。機率應用不易。數學傳播季刊，已接受。
- 8. 黃文璋(2009b)。統計思維。數學傳播季刊，已接受。

- 例.

設一班有40位同學，給定一p。

每位同學各自以亂數表，模擬投擲銅板，各得一銅板出現正面機率p之95%信賴區間。

則全班所得的40個信賴區間，共有幾個會涵蓋p？

- 解.

會涵蓋p的區間數以X表之。

取樣前，每一信賴區間有0.95之機率會涵蓋p。

40個信賴區間，有幾個涵蓋p，相當於獨立地做某實驗40次，每次成功機率皆為0.95，求成功幾次。

$\Rightarrow X$有二項分佈，參數為40, 0.95。

- 由表1，40個95%信賴區間中，至少有4個(即$X \leqq 36$)不涵蓋p之機率約為0.13815。

- 假設某校高二有25個班，每班設有40人。

  若每班皆做此模擬實驗，則全年級全班所得信賴區間，至少有4個不涵蓋p之班級數，約有B(25, 0.13815)分佈。

- 平均約$25 \times 0.13815 \sim 3.45375$（班）

- 假設全台高二共有2,500班(每班仍設為40人)，每班都做此實驗。

$$P(X \leqq 33) \sim 0.00339$$

$$2{,}500 \times 0.00339 \sim 8.475(\text{班})$$

$\Rightarrow$ 全台平均約有8個班，全班所得信賴區間，至少有7(＝40-33)個不涵蓋p。這幾班會認為大多數同學所得的信賴區間會涵蓋p？

p之90%的信賴區間？

- 由表1，對B(40, 0.90)分佈，

$$P(X\leqq 32)\sim 0.04190。$$

- 故一校之全年級(設有25班)，約有

$$25\times 0.04190\sim 1.0475(班)，$$

至少有8個信賴區間沒有涵蓋p。
全台約104班。98課綱說：

大多數同學所得的信賴區間會涵蓋p，

顯然並不恰當。

表 1.

B (40, 0.95)及 B (40, 0.90)分佈之一些機率值

B (40, 0.95)分佈

X	F(x)
40	1.00000
39	0.87149
38	0.60094
37	0.32326
36	0.13815
35	0.04803
34	0.01388
33	0.00339
32	0.00071
31	0.00013
30	0.00002

B (40, 0.90)分佈

X	F(x)
40	1.00000
39	0.98522
38	0.91953
37	0.77719
36	0.57687
35	0.37098
34	0.20627
33	0.09952
32	0.04190
31	0.01550
30	0.00506