

從必然到隨機

黃文璋

國立高雄大學
應用數學系・統計學研究所

九十六年五月十日

1. 必然性與隨機性

□ 宇宙的運轉有必然性及隨機性。

◇ 必然性：

天體運轉，科學中的某些現象，...

睽違121.5年 金星凌日 6月8日給你好看

□每243年會出現4次，間隔：

8年 — 105.5年 — 8年 — 121.5年。

下次再出現：

2012年6月6日。

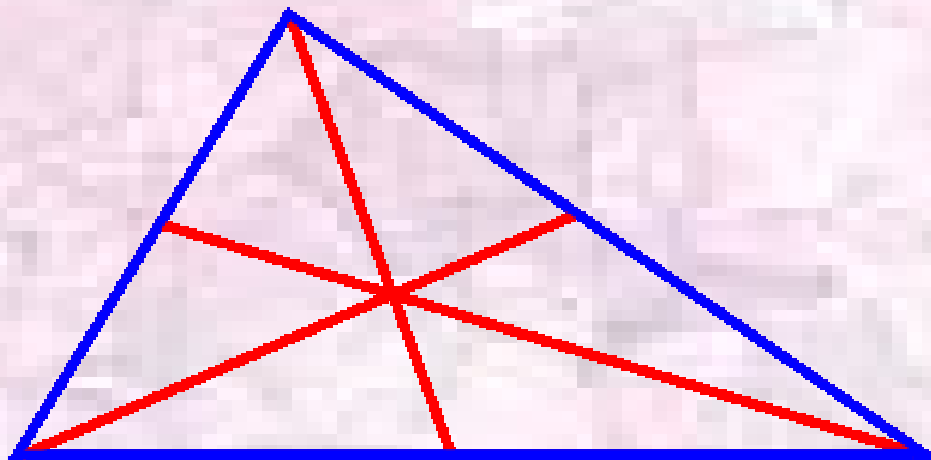


93年6月9日聯合報



高度 h 給定，落地時間 t 可求出

數學中有很多必然性。



三角形重心、外心、垂心三點共線。

幾何原本(2,300年前)中有許多這類的結果。

◇隨機性：

* 銅板落地那一面朝上？

* 中颱妮妲可能轉向 侵台機率降低。

- 對必然性的探討不論在天文、物理、化學或數學，歷史悠久，且成效不錯。
- 科學家樂意挑戰必然性的問題。

$$\begin{aligned}3^2 + 4^2 &= 5^2, \\5^2 + 12^2 &= 13^2, \\7^2 + 24^2 &= 25^2, \\9^2 + 40^2 &= 41^2, \\&\vdots \\x^2 + y^2 &= z^2\end{aligned}$$

有無限多組整數解。找到一組就有無限組：

$$6^2 + 8^2 = 10^2, 9^2 + 12^2 = 15^2, \dots。$$

□ 費馬(Pierre de Fermat, 1601-1665)，職業律師，業餘研究數學。

□ 死後他兒子在其筆記本上發現底下一段話：

$$x^3 + y^3 = z^3,$$

$$x^4 + y^4 = z^4,$$

⋮

都沒有正整數解，我可以證明它，但這個地方太小寫不下。

□約寫於1637年。即

$$x^n + y^n = z^n, n \geq 3,$$

x, y, z 皆為正整數，無解。這就是著名的
費馬最後定理。

□數學中少數敘述簡單的大難題。

□經過三百多年許多數學家的挑戰，1994
年被美國普林斯頓大學數學教授Andrew
J. Wiles 證出，證明有200頁。

□ 歐幾里得的幾何原本：

6, 28, 496, 8,128等皆是完全數。

□

$$6 = 1 + 2 + 3 = 2 \cdot 3 = 2^1 \cdot (2^2 - 1) ,$$

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 4 \cdot 7 = 2^2 \cdot (2^3 - 1) ,$$

$$\begin{aligned} 496 &= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 \\ &= 16 \cdot 31 = 2^4 \cdot (2^5 - 1) , \end{aligned}$$

$$8,128 = 64 \cdot 127 = 2^6 \cdot (2^7 - 1) \circ$$

□ 偶完全數可以決定：

$$2^{n-1}(2^n - 1),$$

其中 $2^n - 1$ 為質數(梅仙尼質數)。

□ 是否有奇完全數？至今未知。

□ 完全數(Perfect number)很稀少，至今共知44個。

□ 1996年起，世界性的GIMPS組織在找梅仙尼質數。自第35至第44個都是他們找到。

□ The Great Internet Mersenne Prime Search
<http://www.mersenne.org/prime.htm>

□ 2006年9月4日找到第44個：

$$2^{32,582,657} - 1,$$

有

9,808,358位。

□ 1兆才13位。這才是天文數字！

□ 此數印出要多少頁？

◇A4紙一頁可容4,000位，共需

$$\frac{9,808,358}{4,000} = 2452.0895$$

⇒ 2,453 頁。

□ 對隨機性的了解則很侷限：

◇ 明天會不會下雨？

◇ 颱風走向？

◇ 下次地震是何時？

2. 處處有機率

- 隨機的經驗源遠流長。
- 舊約聖經利未記第十六章：
為那兩隻羊拈鬮，一鬮歸與耶和華，
一鬮歸與阿撒瀉勒。
- 民數記第二十六章，耶和華曉諭摩西：
還要拈鬮分地。

- 在新約聖經，耶穌被釘死在十字架上
後：兵丁以拈鬮來分他的裏衣。



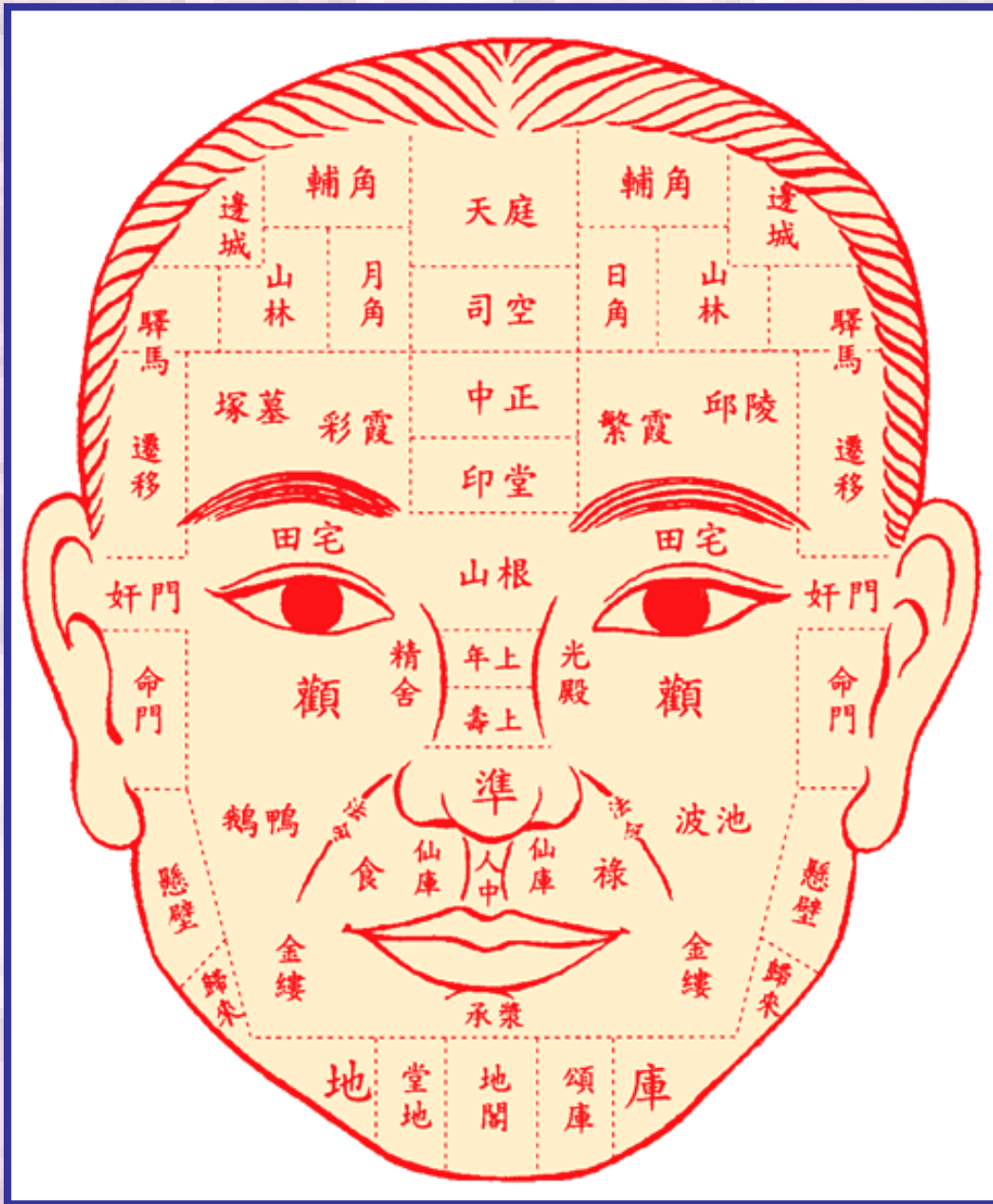
- 對隨機性的探討開始很晚，機率與統計的萌芽都遲至十七世紀。
- 初期僅是算算排列組合及收集資料，而同時期數學其他領域，已發展得很深入了。

機率發展三個階段

1. 解決投擲撲克牌、骰子等實際問題。
2. 建立抽象系統。
3. 1933年，Kolmogorov以公理化的方式建立機率論的數學體系。

自此，機率成為數學之一主要領域。

- 現代統計學的發展始自十九世紀末。
- 今日它已成為作決策之一主要的科學依據。
- 算命，由星座看個性，心理分析：
統計的工作。



- 數學雖然博大精深，日常生活中所用到的，大致不會讓人迷惑：
算總和、平均、利息、報稅、...

- 比較難的數學，一般人多半不敢輕易觸及，認為那是專家的工作。
 - ◇ 買車時，30萬貸款零利率，現金買便宜1.5萬，你選那一種？

□ 信用卡刷卡回饋：

消費每30元換1點，7000點則可換一「造型雙層垃圾桶」。

◇ 自付額：200點 + 643元。

⇒ 垃圾桶 \approx 662元。

◇ 花21萬元送一個662元的垃圾桶很稀奇？

□ 百貨公司如果打九五折很可能不太誘人：

$210,000 \times 0.05 \Rightarrow$ 便宜10,500元！

□ 數學的其它用途？

美國物理學家用數學 證明吸血鬼不存在

萬聖節快到了，不少人會化妝成吸血鬼。美國有一個物理學家，用物理和數學，證明吸血鬼和僵屍不存在。

美國中佛羅里達大學教授艾夫希米奧說，西方的傳說是，如果吸血鬼吸了一個人的血，那個被吸血的人，也會變成吸血鬼；那麼設定一個時間點，例如從1600年1月1日開始算，當時全世界的人口，有五億三千七百萬，而一個吸血鬼，就算一個月只吸一個人的血好了，那麼到1602年7月，全世界都應該只剩吸血鬼，沒有人了；而且，這還是用現在的出生率與死亡率來算的，如果依當時的出生率和死亡率來算的話，全世界的人口會消失得更快。

2006年10月27日 中廣新聞網

- 數學中的名詞，往往意義較清楚：
因數、倍數。
- 統計裡，諸如機率、獨立、期望值、變異數、百分之九十五的信心水準、抽樣誤差等，都是很難解釋清楚的概念。
- 這些名詞比極限、微分、積分還難理解。
- 投擲一公正的骰子，點數之期望值

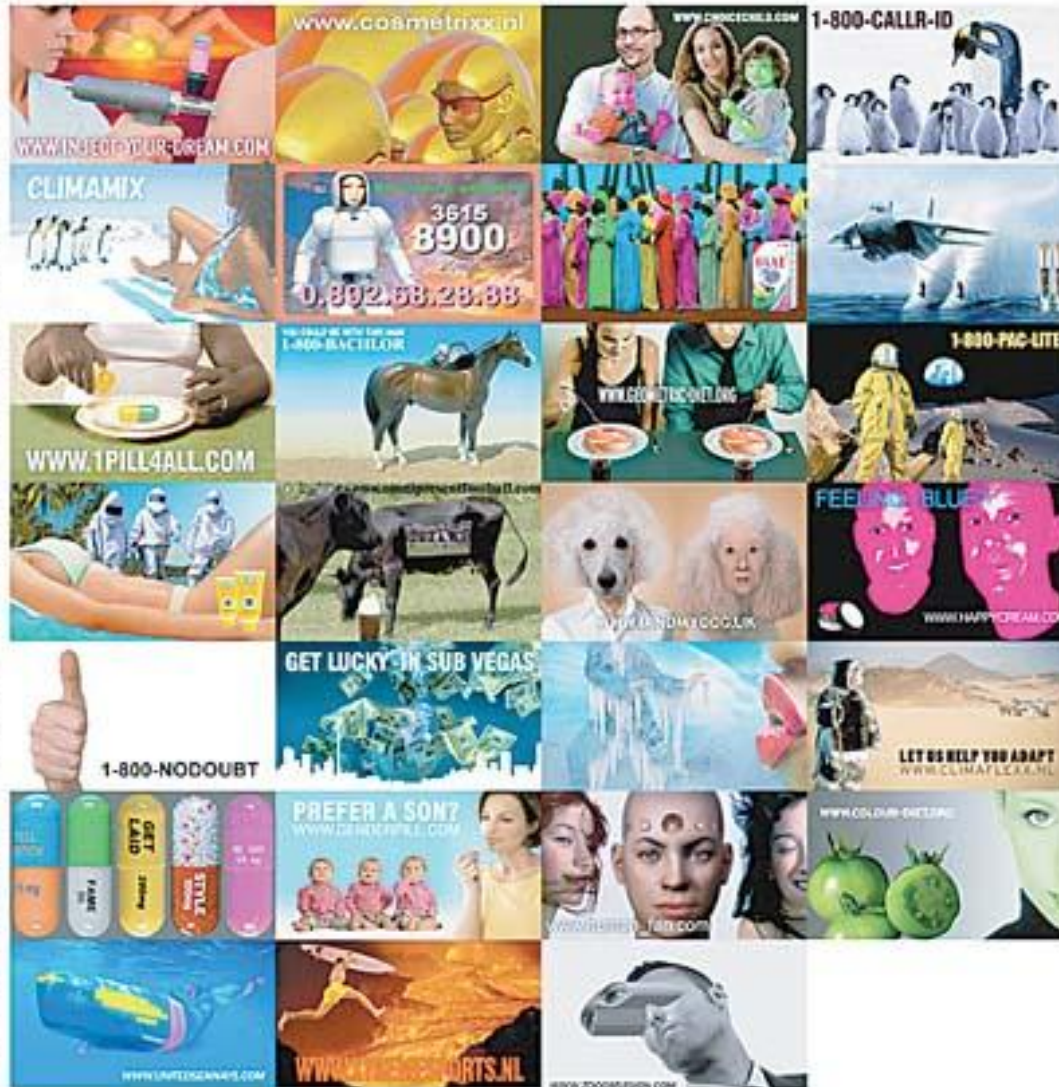
$$\frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = 3.5。$$

期望得到3.5。

統計是什麼？

PRADA

OBVIOUS CLASSICS #1



上課啦 T恤圖案古怪趣味 嘲弄人類恐懼及欲望

PRADA春夏搞起統計學文化

藝術家跨界替時尚品牌設計的限量T恤，往往就是最能表達穿著者個性的搶眼之作。春夏PRADA新推出一系列「統計學文化」T恤，就算搞不懂藝術家口中什麼統計學和美術的關係，但至少知道這些企鵝、藥丸、機器人圖案真的可愛到不行，透明密封袋包裝也是古怪又趣味。

其實，「統計學文化」來自名建築師 Rem Koolhaas 等人組成的團體AMO，他們將統計數據美學作為創作材料，將有趣的統計數字混合各種的圖片，替PRADA創作出Obvious Classic這些圖案T恤，嘲弄人類的恐懼及欲望，共有27款，每件6千元。

(中國時報96年4月27日 徐亦橋)



- 中學的機率與統計題材，擺在數學課程中。
98課程綱要草案，將機率，統計放第二冊。
- 一般人受多了必然性的訓練，對隨機性常也想以必然性處理。
- 隨機世界裡變異總是存在，由於須常與實際經驗相對照，機率與統計中的概念，往往不易正確掌握。

□ 常有意無意的忽略變異性，或以為可降低變異：

中共若能降低對我敵意 減少不確定性

總統：戒急用忍就不是問題

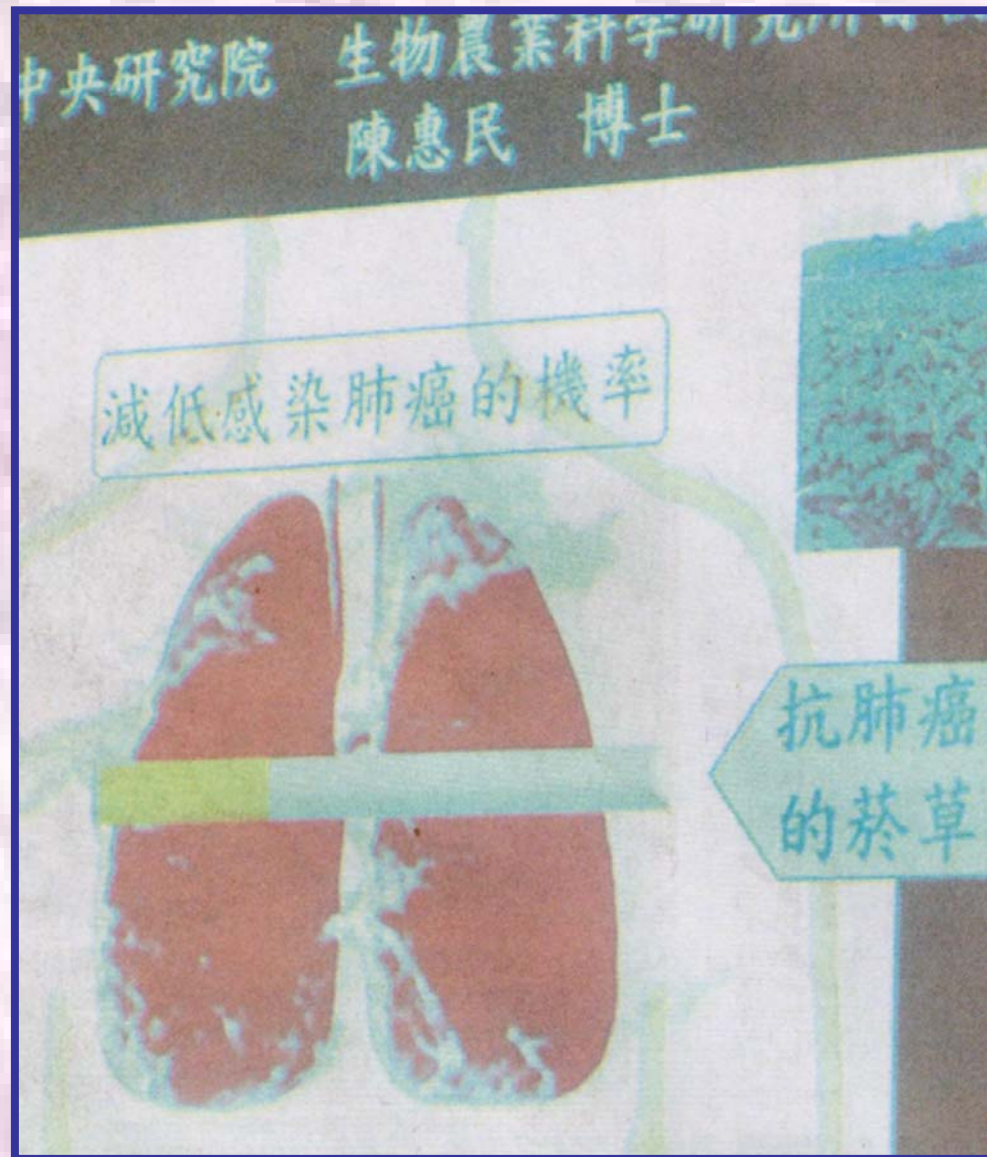
(87年9月9日中國時報第一版標題)

□ 追求樂透彩的明牌，相信民調，或不相信民調，都是以為變異能降低的心理。

一些新聞標題

- ❑ 服裝愈暴露罹患皮膚癌**機率**愈大。
- ❑ 氣泡飲料會增加罹患癌症的**機率**。
- ❑ 恐怖耶誕 全美警戒 遇襲**機率**與規模 911至今最高。
- ❑ 每天量體重，復胖**機率**小。
- ❑ 吸二手煙乳癌**機率**增68%，WHO促立法全面禁菸。
- ❑ 吃肉致癌的**機率**是抽煙1-2萬倍。

含糊的提到**機率**！



93年6月10日 中國時報

機率 = 隨便算算？

- 數學中的數字，一般人會謹慎處理。
- 對求機率值，就較隨意。
- 每個投票所多一票就贏了。

事實：

假設有10,000個投票所，每個投票所至少多一票之機率為0.999。則

$$\begin{aligned} & P(\text{每個投票所皆至少多一票}) \\ &= 0.999^{10,000} \approx \frac{4.517}{100,000} \approx \frac{1}{22,000}。 \end{aligned}$$

□ 民國九十二年春天，SARS疫情讓台灣陷入恐慌。台大有位骨科醫師，算出
走在街上感染SARS的致死機率
≈ 八十萬分之一
≈ 中樂透彩二獎的機率。

□ 八十萬分之一，是在假設
有1,000個感染SARS的患者沒有被隔離，
一個人走在街上一天接觸500人，
台灣約有兩千萬人，
致死率5%，
求出一個人
每天走在街上被感染SARS而死亡的機率。

算法：

街上任一人染有SARS之機率：

$$\frac{1,000}{20,000,000} = \frac{1}{20,000}。$$

P (一個人每天走在街上感染SARS致命)

$$= 0.05 \left(1 - \left(1 - \frac{1}{20,000} \right)^{500} \right)$$

$$\approx 1.234534878 \cdot 10^{-3} \approx \frac{1}{800}。$$

概算：

$$\frac{1,000}{20,000,000} \cdot 500 \cdot 0.05 = \frac{1}{800}。$$

- 依所給機率估算，台灣一天平均約有25人因 SARS 致死。
- 若依其假設計算，一天約有 25,000 人因 SARS 致死。
- 實際從4月26日~7月5日的71天，死亡84人。
- 八十萬分之一的機率值，在大樣本下，就不見得是一很小的機率值了。

雖樂意引用機率，但多半不正確！
對機率(probability)值之要求，
不像對數學中的數字那麼精確。

□ 在Carlsberg啤酒的廣告裡，通常都僅有一句廣告詞：

Probably the best beer in the world。

□ 字典對probably之解釋為：

most likely, presumably。

前者意義為“**很有可能**”，後者意義為“**也許**”。

□ 這句廣告詞並非那麼強烈，不論是說“**很有可能**”或“**也許**”是世界最好的啤酒，都隱含著也可能不是世界最好的。

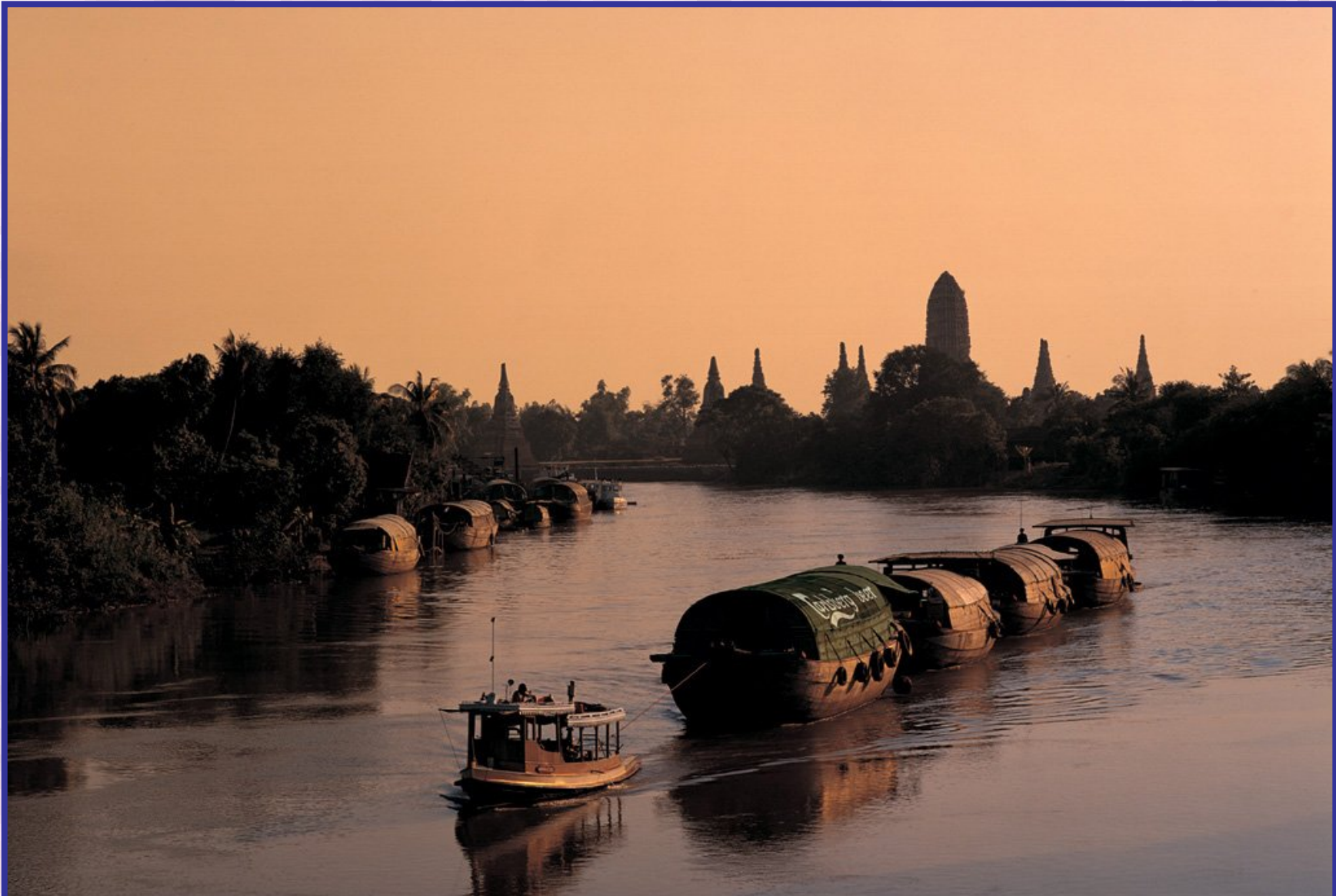


Our Beer
Probably the best beer in the world...

NOW! an ALL MALT beer

Enjoy the distinctive European full-bodied taste of Carlsberg All Malt Beer, the only one in the country. Available in 330ml bottles, cans, and draft.

PROBABLY THE BEST BEER IN THE WORLD.



Probably the best beer in the world.



Probably the best beer in the world.



Probably the best beer in the world.

3. 隨機的概念

□ 某高中數學課本於介紹數列的極限時，先舉幾個例子：

(1) 連續擲一粒公正的骰子 n 次，出現的點數依序是5, 4, 1, 6, 6, 3, 2, \dots ，這是一個沒有規則的數列。

(2) 無理數 $\pi = 3.14159 \dots$ ，把它的數字依序排列：3, 1, 4, 1, 5, 9, \dots ，這也是一個沒有規則的數列。

(3) 抽樣調查某種產品製造的良率，若抽出的產品是“良品”用1表示，是“不良品”用0表示，有一“抽樣的過程”是1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, …，這也是一個沒有規則的數列。

(4) 丟一個均勻硬幣，每一次都出現正面的機率依序是

$$\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \dots, \left(\frac{1}{2}\right)^n, \dots,$$

這是一個有規則的數列。

習慣常數數列，認為隨機數列沒有規則！

□ 我們常有下述講法：

◇ 每4年有一次閏年，

◇ 每19年有7次閏月，

◇ 哈雷慧星每76年接近地球一次。

□對機率的表示，遂也常採類似的方式：

◇一期買一張樂透彩券，五萬年可中頭獎。

◇每五名曾接受肺癌手術的病人，只有一人能存活五年。

◇和伊朗比十場會贏九場，但偏偏這是第十場。

□久之**機率與頻率混淆**，以為機率三分之一，就是每三次出現一次。變異的概念逐漸失去，而

將隨機變數常數化!

隨機法則

□ 投擲一銅板100次，若正面出現次數，不介於35與65間，大概便難以接受此為一公正的銅板：

對公正銅板，正面出現次數不在35與65間的機率才約0.002。

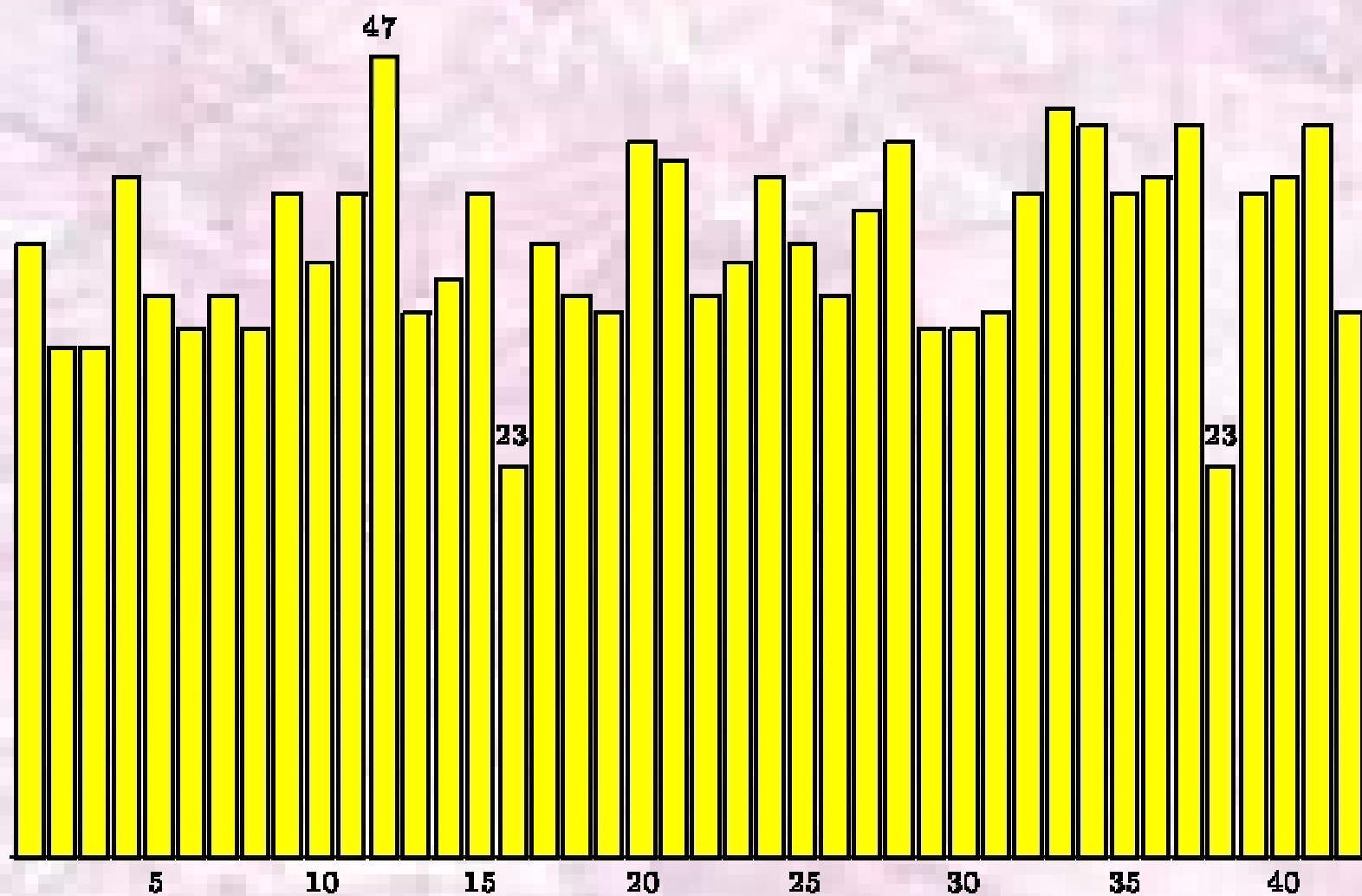
隨機世界裡有隨機法則。

□ 大數法則，中央極限定理。

□ 數學中的規則大家較熟悉，隨機中的規則，一般人不易弄明白。

□ 北銀彩券部表示，樂透彩每一次的開獎都是「獨立事件」，四十二個號碼出現的機率是一樣的。若以每周開獎二次來估算，經過五萬年，「四十二選六」所有的號碼組合（即五百二十四萬餘種）都會開出一次，每一號碼被開出的次數就會十分接近。

大數法則針對平均而非總和！



北銀樂透彩, 91.1.22 ~ 93.6.22, 共253期之頭獎號碼出現頻率

以Pearson χ^2 對頻率做適合度檢定, p -值 ≈ 0.6255

□人本教育札記，民國九十二年二月號，特別企劃的主題：

從賭博的機率現象談數學教育，

其中有一篇

機率的一體兩面-既偶然又規律。

根據數學預測的估計值告訴我們，擲骰子一萬次，將出現1,667個一點，出現比率大約為百分之16.9。之後，又有數學家做實驗，當骰子擲超過十萬次之後，出現一點的次數大約比估計值多出五百次，但百分比只差百分之0.5，所以我們可以推論，擲骰子的次數越多，就越接近數學的預測，這就是所謂隨機的規律。

上段中之數據大都是錯的！

$$\text{標準差} = \sqrt{100,000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \doteq 117.85。$$

統計推論引起的迷思

- 數學中很多時候在證明。
- 對於隨機現象，在有限的樣本下，通常無法證明真偽：
 - ◇ 銅板公正？
 - ◇ 明天降雨機率為0.7？
 - ◇ 樂透彩頭獎號碼之出現符合隨機性？
 - ◇ 泡在懷孕女性尿液中的大麥種子會提前發芽？

- 由於變異的存在，統計的推論
 - ◇ 允許犯錯，
 - ◇ 可能每次都不一樣。

- 常要處理關於人的問題，而人與銅板大不相同。

- 造成的後果：
 - ◇ 有人以為統計工作可以輕率地執行，
 - ◇ 有人不相信統計，
 - ◇ 有人過度相信統計。

歸根究柢是不了解隨機！

未能善解小機率的含義

□ 統計檢定裡第一型錯誤機率 $\alpha = 0.10, 0.05, 0.01$ 等。

小機率 \Leftrightarrow 幾乎不會發生的事件？

□ 曾母會相信曾參殺人，乃因小機率事件發生，而動搖原先所相信者。

小機率事件屢屢發生

- 某公司員工一萬人，年終摸彩，頭獎一名，中獎比投擲銅板連得13個正面還難，但每年一定有人中頭獎：

$$\frac{1}{2^{13}} = \frac{1}{8,192} > \frac{1}{10,000}。$$

□ 若有人能正確說對20杯奶茶是先放牛奶還是先放茶，我們可能會相信他有分辨能力：

$$2^{20}=1,048,576,$$

對台灣每人測試約有23人可全說對。

□ 95年10月23日新聞：
澳洲婦生下黑白雙胞胎，機率僅百萬分之一。







□ 美國已發生幾件兩次中樂透彩頭獎。

□ 90年12月，京華城開幕抽獎，有人中7部車：

$$\text{機率} = \frac{1}{10,000}。$$

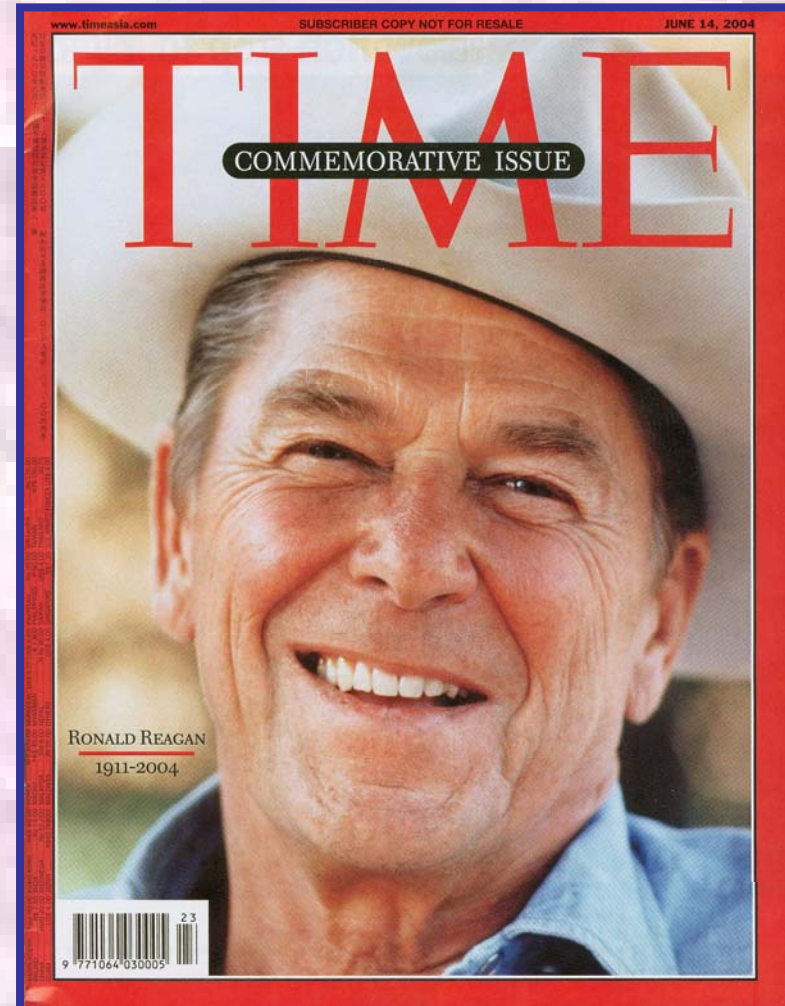
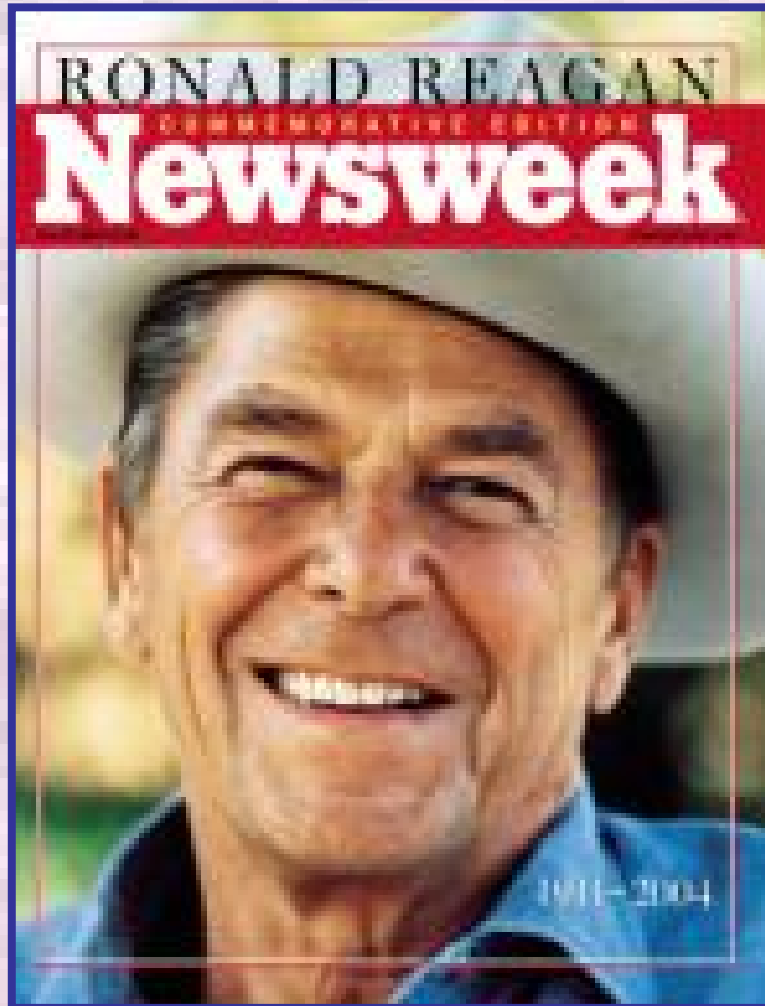
□ 一家庭中4人生日相同是否可能？

任4人生日同一天之機率

$$= \frac{1}{365^3} = \frac{1}{48,627,125}。$$

世界人口超過65億：

只要樣本數夠大，任何聳人聽聞的事，
都可能發生！



英雄所見略同？

- 美國前總統雷根93年6月5日去世，時代雜誌及新聞周刊，臨時改換雷根照片為封面。
- 這兩家雜誌社擁有的雷根照片據稱有上百萬張，却在短時間內選了一模一樣的一張。
- 偶然與巧合天天在發生。

France

Kanouch Film presents

A Film By Claude Lelouch

Chance or Coincidence

Starring

Alessandra Martines

Pierre Arditi

Marc Hologne

TARTAN VIDEO



小機率事件怎麼常發生？

□ 在Lewis Carroll 所著的愛麗思夢遊仙境 (Alice in Wonderland) 中：

Alice laughed .“There is no use trying,” she said :

“One can't believe **impossible things**.”

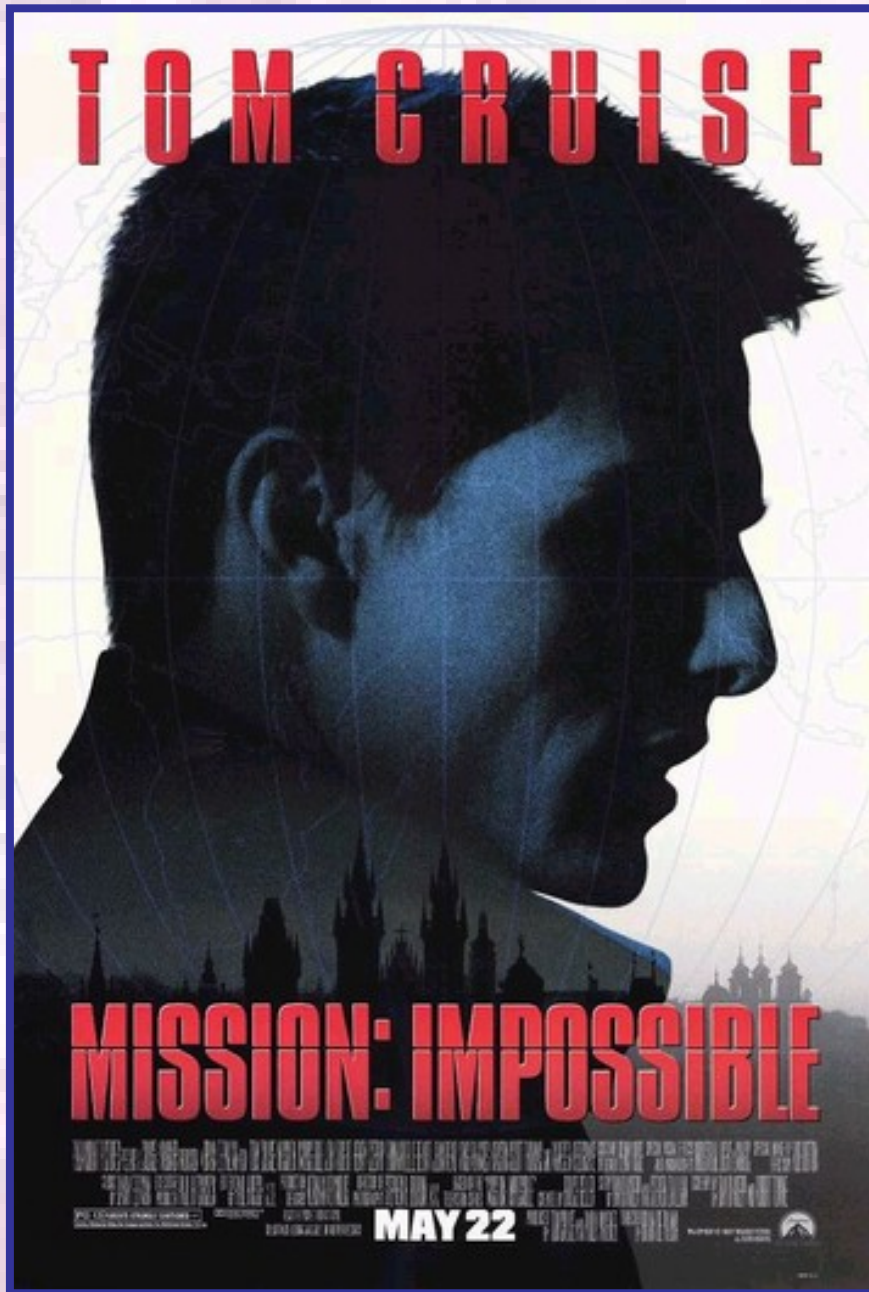
“I daresay you haven't had much practice,” said the Queen.

“When I was your age, I always did it for half-an-hour a day. Why, sometimes I've believed as many as six **impossible things** before breakfast.”



□有些我們以為不可能的事，發生機率並沒有想像的低。世事留意皆文章：
早餐前便可發現6件不可能的事。

在隨機世界裡，不可能的事是可能發生的！



4. 應隨機以恆周

□在三國演義裡，周瑜死後，魯肅推薦龐統給孫權。孫權問龐統：

公平生所學，以何為主？

龐統：

不必拘執，隨機應變。

□孫權認為龐統

狂士也，用之何益？

□在金庸的飛狐外傳中，苗人鳳自況：

生平不愛事先籌畫，

因為預料的事兒多半作不了準，

寧可隨機應變。

□ 隨機應變：

隨事機之變化而靈活應付。

□ 飛狐外傳：

那“遊身八卦掌”一出手就是連續不斷的四八三十二招，王釗英越打越是焦躁，卻連手指尖也碰不到胡斐身上。

趙半山看得暗自嘆息：

這人徒學父藝，只知墨守成法，臨敵時不能隨機應變，另創新意，看來王維揚是後繼無人了。

□在倚天屠龍記中，張三丰傳張無忌太極劍法。張無忌

忘記了一小半，
忘記了一大半，
還有三招沒忘記，
忘得乾乾淨淨。

張三丰道：

不壞，不壞！忘得真快，
你這就請八臂神劍指教吧！

□ 三國演義第二十一回，曹操對劉備說：

今天下英雄，惟使君與操耳。

劉備驚嚇得筷子、湯匙落於地。幸好巧妙掩飾過去。後人有詩讚曰：

勉從虎穴暫趨身，
說破英雄驚殺人。
巧借聞雷來掩飾，
隨機應變信如神。

□顯通寺:五臺山現存最早最古及最大的寺院。

山西五臺山是文殊菩薩演教和居住的地方，所以五臺山的寺院，都以供奉文殊菩薩為主。大文殊殿為顯通寺的第二進殿宇。殿外有幅對聯：

德相非空非有應隨機以恆周，

法身無去無來住寂光而不動。



1. 將隨機融入思考中：
邏輯思考、隨機思考、...。
2. 不能以數學的方式來想機率與統計：
 - ◇ 視機率0.6，0.4為二數字，而 $0.6 > 0.4$ ？
 - ◇ 95%的信賴區間，指實驗100次有95次值得信賴？
3. 事件的機率會變，因情況、新資訊而改變。
4. 機率值因情境不同，可有不同含意。

5. 做決策時要算算機率、期望值、變異數等，
依統計方法找到**最佳策略**。

6. 最佳策略（在要求的條件下）就是最佳的。
除非有意外，結果會令人滿意。只是

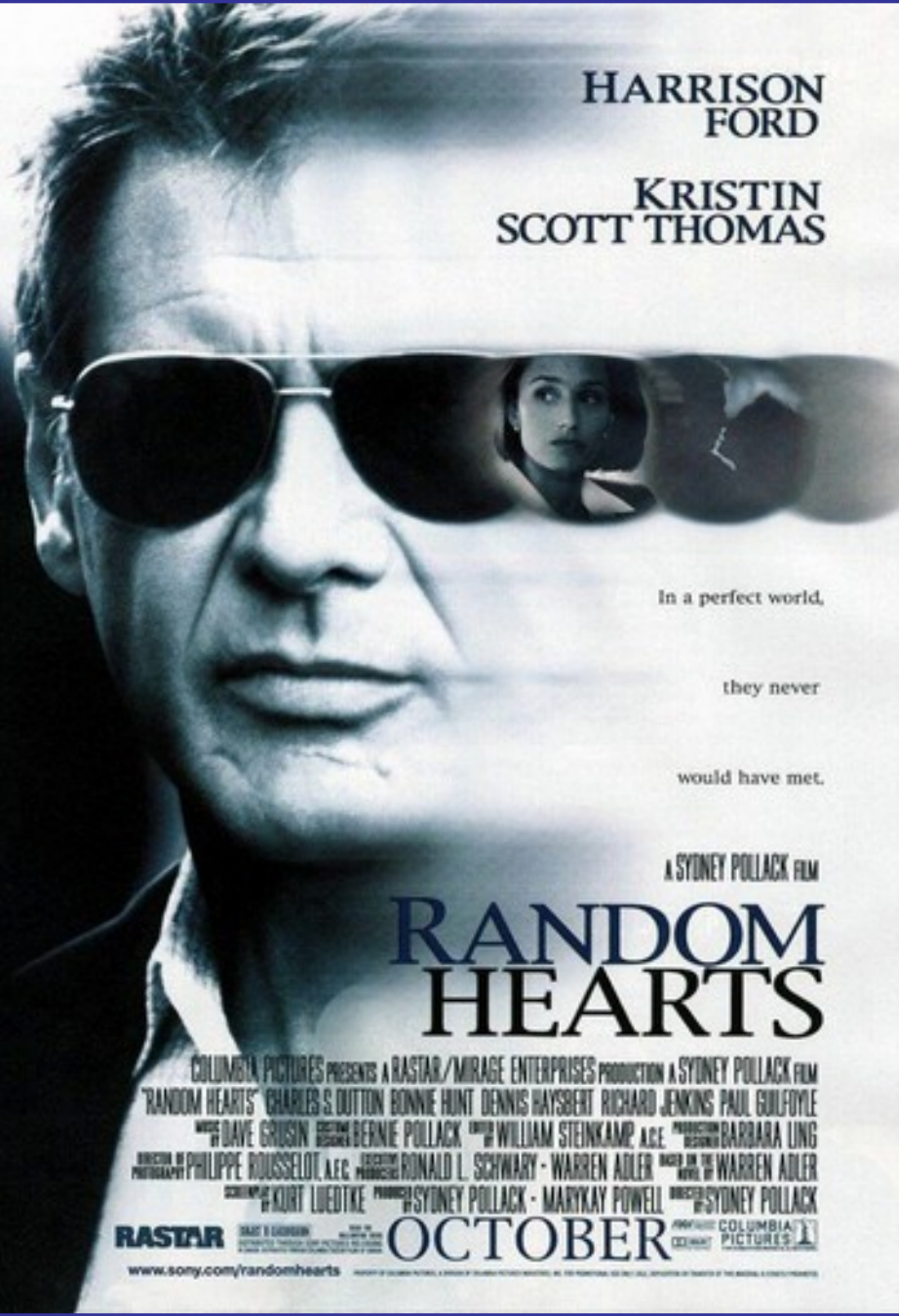
隨機世界裡永遠有意外，
豈有此理之事也不少。

心想機率，但不要過度迷戀！



HARRISON
FORD

KRISTIN
SCOTT THOMAS



In a perfect world,

they never

would have met.

a SYDNEY POLLACK FILM

RANDOM HEARTS

COLUMBIA PICTURES presents a RASTAR/MIRAGE ENTERPRISES production a SYDNEY POLLACK FILM
"RANDOM HEARTS" CHARLES S. DUTTON BONNIE HUNT DENNIS HAYSBERT RICHARD JENKINS PAUL GULFOYLE
MUSIC BY DAVE GRUSIN COSTUME DESIGNER BERNIE POLLACK EDITOR WILLIAM STEINKAMP, A.C.E. PRODUCTION DESIGNER BARBARA LING
DIRECTOR OF PHOTOGRAPHY PHILIPPE ROUSSELOT, A.C.E. EXECUTIVE PRODUCERS RONALD L. SCHWARY - WARREN ADLER PRODUCED BY WARREN ADLER
SCREENPLAY BY KURT LUEDTKE PRODUCED BY SYDNEY POLLACK - MARYKAY POWELL DIRECTED BY SYDNEY POLLACK

RASTAR

DAVID W. GARDNER
EXECUTIVE PRODUCER

WARREN ADLER
PRODUCED BY

OCTOBER

PRESENTS
COLUMBIA PICTURES

www.sony.com/randomhearts

PROPERTY OF COLUMBIA PICTURES, A DIVISION OF SONY PICTURES ENTERTAINMENT, INC. ALL RIGHTS RESERVED. © 2001 SONY PICTURES ENTERTAINMENT, INC. ALL RIGHTS RESERVED. TRADEMARKS OF THE ABOVE ENTERTAINMENT COMPANIES.

7. 依賴統計做決策是科學的，但並非就可高枕無憂：

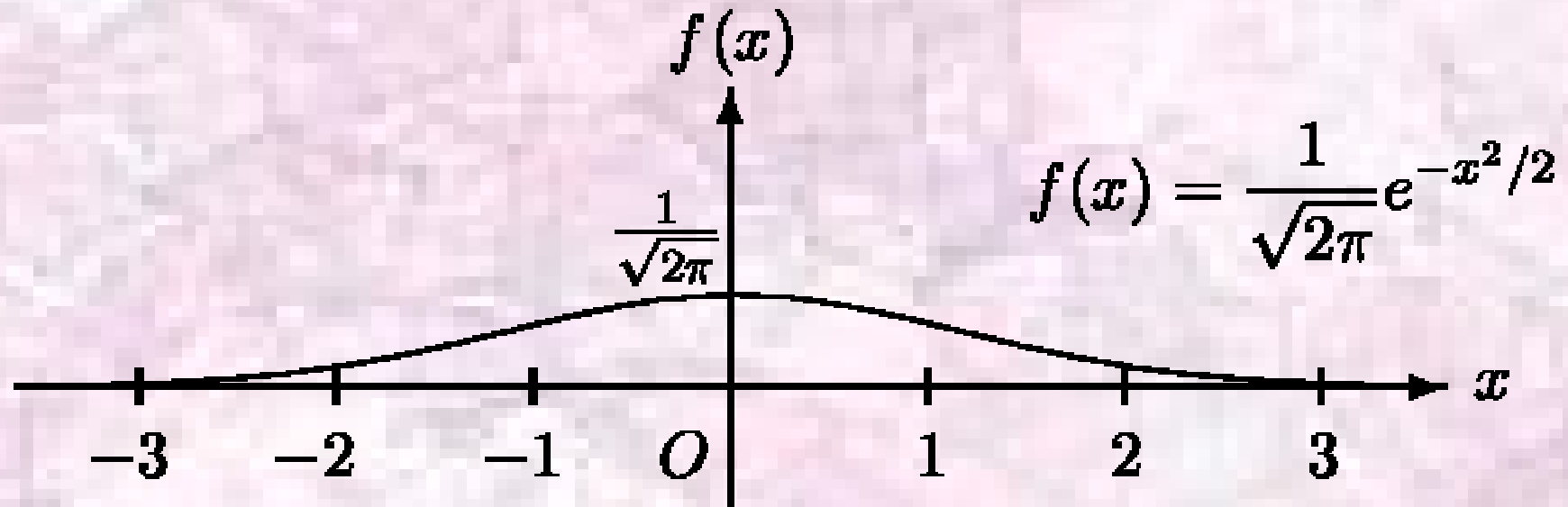
◇ 萬物有常，世事多變！

◇ 少算易敗，多算少敗。

◇ 不爭一時，但爭千秋！

◇ 不挑戰機率，不與天為敵！
相信機率，與天為友！

常態與非常態

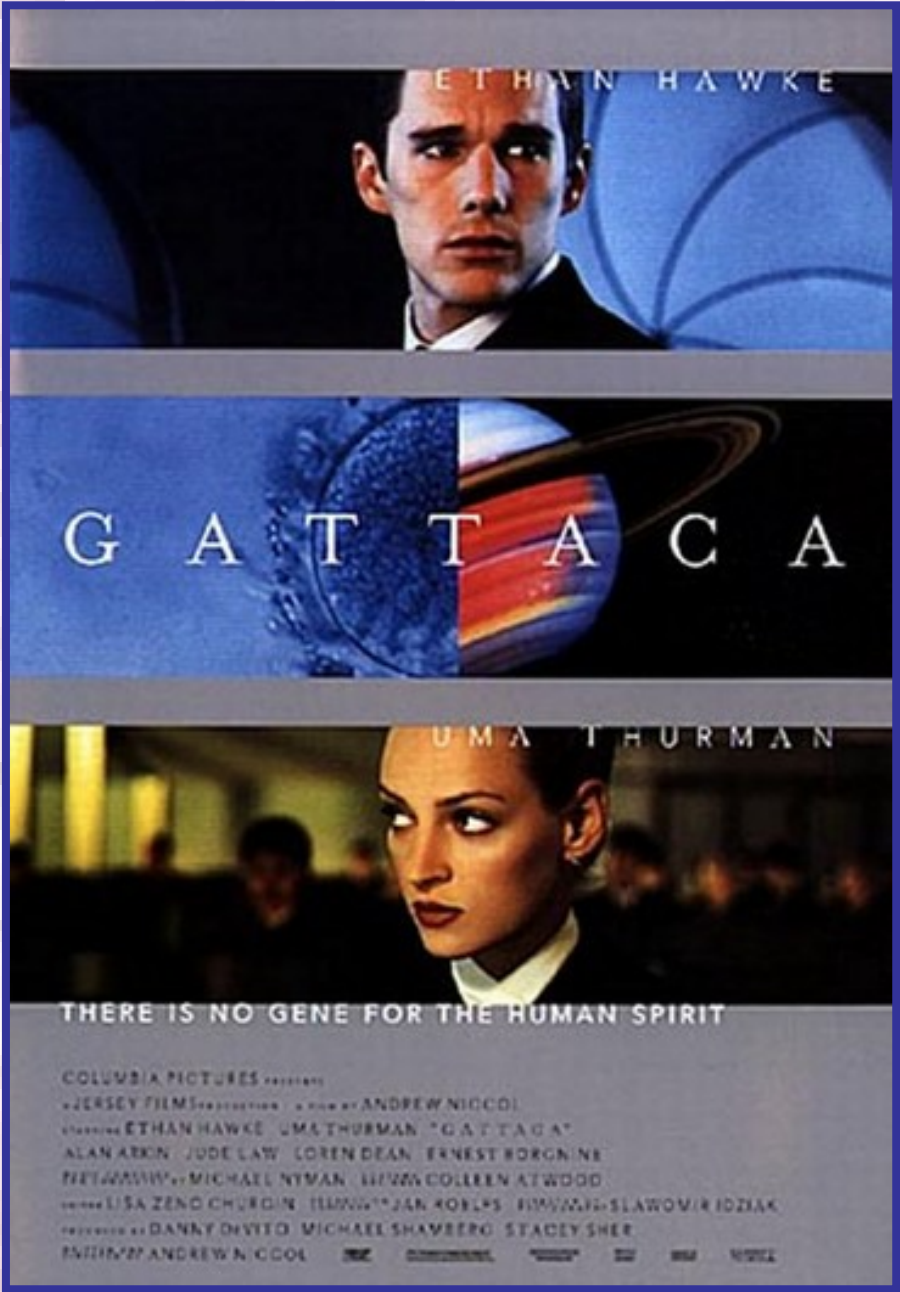


GS1527893K8

Deutsche Bundesbank
Karlheinz Haaf
Präsident vom 1. Juni
1999 bis 31. Mai 2002



ZEHN DEUTSCHE MARK



□ 在隨機世界裡

◇ 必然性使人們願意事先好好準備，

◇ 隨機性使未來充滿著盼望與不確定性。

□ 因此

困境時等待隨機性，
順境時想要必然性。

□ 光有必然性的世界，毫無變異

⇒ 對未來失去盼望，少了努力的動機。

◇ 伊甸園終究得離開，桃花源再也找不到。

□ 光有隨機性的世界，只靠運氣

⇒ 太多不確定，令人不想積極認真。

◇ 拉斯維加、大西洋城畢竟無法流連忘返。





德相非空非有
應隨機以恆周



法身無去無來
住寂光而不動

峨眉山金頂

謝謝各位！

□ 在金庸的倚天屠龍記，朱長齡心想：

這小子比我高大，

他既能過去，

我也必能過去。

為什麼我竟會擠在這裡？

當真豈有此理！

