樂透彩開出號碼與簽注之隨機性檢定

研究生：吳信宏 撰

指導教授：黃文璋

國立高雄大學統計學研究所

九十四年七月

目錄

1.前言.....1
2.樂透彩頭獎號碼隨機性之檢定.....2
3.樂透彩迷簽注之隨機性.....8
4.熵.....9
5.結論.....15
參考文獻.....23

Testing of the Randomness of the Lottery Winning Numbers and the Signed Lottery

Advisor: Dr. Wen-Jang Huang
Institude of Statistics
National University of Kaohsiung

Student: Hsin-Hung Wu
Institute of Statistics
National University of Kaohsiung

ABSTRACT

In this work, we examine whether the lottery winning numbers(select 6 numbers from the first 42 integers or select 6 numbers from the first 49 integers, denoted by 6/42 and 6/49, respectively)of Taipei Fubon Bank lotto games are random. We also analyze the randomness of the lottery players according to the number of winning people each time, but also examine whether the randomization ability for the lottery players is different or not as the number of games cumulates. On the other hand, use the maximum entropy method to estimate the probability of each ticket of both 6/42 and 6/49 lottery being chosen by players. Follow the result of estimating by maximum entropy method, we also estimate the probability of one single number being chosen by players in both games. Finally, we discuss the habit of lottery players while they are choosing the lottery numbers.

Keywords: Lottery game, randomness, Pearson's Chi-square test, Kolmogorov-Smirnov test, maximum entropy, Wilcoxon and Mann-Whitney test.

樂透彩開出號碼與簽注之隨機性檢定

指導教授：黃文璋博士
國立高雄大學統計學研究所

學生：吳信宏
國立高雄大學統計學研究所

摘　要

台北富邦銀行發行的42取6小樂透已正式邁入歷史，共發行了314期；而在93年1月增加發行49取6的大樂透，至今也開出百餘期。在此對這兩種樂透彩之開獎號碼，是否符合隨機性作檢定，並由大小樂透彩每期相對中獎人數，分析彩迷簽注之隨機性，及隨機性是否隨著期數增加而有所不同。此外，彩迷所購買的大小樂透彩券號碼組合的機率分佈，也是我們感興趣的。我們將以最大亂度法，估計大小樂透彩熱門、冷門的號碼組合，並估計出單一號碼會被挑中的機率分布。我們也對彩迷對彩券號碼的選擇習性做探討。

關鍵字：樂透彩，隨機性，皮爾生卡方檢定，*Kolmogorov-Smirnov*檢定，最大亂度，*Wilcoxon and Mann-Whitney*檢定。

1. 前言

樂透彩在許多國家已經發行多年，台灣亦於民國91年1月22日起，由台北銀行(94年1月1日台北銀行與富邦銀行正式合併為台北富邦銀行，以下簡稱北銀)開始發行，北銀的樂透彩是42取6；而自民國93年1月5日始發行的大樂透則是49取6。為了與大樂透區別，我們把42取6的樂透彩稱為小樂透。

註1：自民國94年1月25日起，小樂透改為38取6，本文所討論之小樂透指42取6。

小樂透每週開獎兩次，每期開出6碼及1特別號。6碼全中為頭獎，中5碼及特別號為貳獎，中5碼為參獎，中4碼為肆獎，中3碼為普獎。每期以當期總銷售金額之56%(每注賣50元)為總獎金。普獎獎金(每注200元)分配完後，將剩餘的獎金依38%、12%、15%、35%的比例，分到頭獎、貳獎、參獎、肆獎。且此四個獎項，是由所有中該獎的號碼之擁有者，均分該獎之獎金。若某期某一獎項無人獲得(普獎除外)，則該獎獎金移至下期同一獎項，最多累積5期。若某獎連續5期無人獲獎，則累積之獎金併入次期之總獎金中。各獎中獎機率如表1所示：

表1　小樂透彩各獎中獎機率

頭獎	貳獎	參獎	肆獎	普獎
$\frac{1}{5245786}$	$\frac{6}{5245786}$	$\frac{210}{5245786}$	$\frac{9450}{5245786}$	$\frac{142800}{5245786}$

大樂透每週開獎兩次，每期亦開出6碼及1特別號。6碼全中為頭獎，中5碼及特別號為貳獎，中5碼為參獎，中4碼及特別號為肆獎，中4碼為伍獎，中3碼及特別號為陸獎，中3碼為普獎。每期以當期總銷售金額之57%(每注賣50元)為總獎金。陸獎及普獎採固定獎金方式分配，陸獎每注獎金為新台幣1,000元，普獎每注獎金為新台幣400元。頭獎至伍獎每注獎金為總獎金扣除陸獎、普獎之總額後，將剩餘的獎金依56%、9%、10%、5%、20%的比例分配。此五個獎項，亦是由所有中該獎的號碼之擁有者，均分該獎之獎金。另除固定獎金之獎項(陸獎及普獎)外，各獎項開獎後若無人獲得該獎，其獎金將累積納入次期各該獎項。而當頭獎獎金連續8期無人獲得時，其累積之獎金將併入次期之總獎金中。在某種極端的情形之下，因熱門號碼開出致使陸獎及普獎超乎異常之多，因而使陸獎及普獎獎金合計逾總獎金之50%時，陸獎仍依原固定金額分配，普獎獎額則改為：依當期總獎金之50%扣除陸獎獎金總額後，由中普獎者均分(計算至元)。其餘各獎(頭、貳、參、肆、伍獎)仍由剩餘之當期總獎金之50%依原分配比率分配之。各獎中獎機率如表2所示：

表2　大樂透彩各獎中獎機率

頭獎	貳獎	參獎	肆獎	伍獎	陸獎	普獎
$\frac{1}{13983816}$	$\frac{6}{13983816}$	$\frac{252}{13983816}$	$\frac{630}{13983816}$	$\frac{12915}{13983816}$	$\frac{17220}{13983816}$	$\frac{229600}{13983816}$

樂透彩發行三年多，帶動了全台灣樂透彩迷的投注狂潮。我們取自民國91年1月22日至民國94年1月21日止的小樂透開獎號碼共314期；以及自民國93年1月5日至民國94年4月28日止的大樂透開獎號碼共138期，台灣人口以兩千三百萬人計算，依銷售量計，全台平均每位民眾購買小樂透約花7200元、大樂透約花2325元。樂透彩發行自今，產生不少令彩迷們嘖嘖稱奇的開獎現象。如小樂透開始發行時，39這個號碼連續5期(第3期至第7期)開出，即造成彩迷們廣大的討論，甚至質疑起開獎的公正性。94年4月4日第132期大樂透彩頭獎開出的29號，破除了連續56期沒開的魔咒。當時地下簽注因為29號遲遲未開出，造成一股瘋狂的29熱，每一彩迷的簽注幾乎都會有29號這熱門號碼。此外，第132期頭獎號碼中的15號，也連續22期未開出，是大樂透開始發售以來第3長時間未開出的號碼；而94年4月14日開出的18號，則是連續23期未開出，為第2長時間未開出的號碼。大樂透發行138期以來，出現過4次連續5期、兩次連續6期頭獎無人獲得的現象。這些現象，皆引起了彩迷們對開獎公平性的質疑。

2. 樂透彩頭獎號碼隨機性之檢定

開獎是否具有公平性？換句話說，樂透彩頭獎號碼的開出是否具有隨機性？這是大家所關心的。在黃文璋等(2002)一文，曾對至民國91年6月14日止，已開出的42期開獎號碼，檢定其隨機性，結果顯示開獎號碼皆能通過隨機性的檢定。而黃文璋及洪宛頻(2003)一文，以小樂透第1-144期的開獎號碼檢驗其隨機性，亦能通過檢定。

在前述研究經過兩年後，42取6的小樂透開獎已經結束共314期，且又增加發行大樂透共百餘期。在本文裡，以小樂透314期、大樂透138期，再度對其開獎號碼做隨機性檢定。

我們以皮爾生卡方(Person χ^2)分別對號碼出現頻率、偶數個數、號碼和、最小間距、總間距數、連號、反轉數、最大間距、頭獎號碼除以3至9的餘數個數、3至9的倍數個數等對開獎號碼做隨機性檢定。其中針對各號碼出現頻率之檢定，如黃文璋等(2002)所指出，由於6個頭獎號碼的產生，屬於取後不放回的隨機取樣，各號碼的出現次數不獨立，所以多項分佈在此不適用，也因此傳統的卡方檢定不能用，故採用Joe(1993)發展出的檢定法。我們的目標是：在“H_0：開獎號碼具有隨機性”之下，若能通過更多的檢定，便愈有信心接受開獎號碼具隨機性。

附錄1針對上述$Q_1 \sim Q_8$(即號碼出現頻率,$\cdots$,最大間距等8種)、除上3至9的餘數個數、3至9的倍數個數等10個統計量，分別對小樂透1至314期，大樂透1至138期開獎號碼檢

定其隨機性。在型顯著水準α=0.05之下，發現除了小樂透的總間距數Q_5外，均能輕易地通過隨機性檢定。而其Q_5相對應的p值為0.085，雖然也能通過檢定，但與黃文璋等(2002)檢驗1到42期、黃文璋及洪宛頻(2003)檢驗1到144期開獎號碼之總間距數檢定相比，p值明顯偏小。仔細觀察前後3次對於總間距數的檢定可發現，前兩次各間距數出現之次數和期望次數相差無幾，然而當我們檢驗小樂透1到314期時，可看出間距4和間距5的出現次數明顯與其期望次數有較大的差異，導致我們會得到較大的卡方值，所以相對應的p值就會較小。

由我們檢定得到的結果可知，北銀開出的頭獎號碼尚稱隨機。然而這幾年來坊間、網路上充斥著許多計算明牌的方法，諸如拖牌、推牌、公式牌、姊妹牌等等，無奇不有。一旦遇到特殊事件或節日，各式各樣的推測更層出不窮，如地震牌、生日牌等。因此希望透過我們對開獎號碼隨機性的檢定，可一一破除這些不合理的迷信。

北銀曾在93年10月22日公布小樂透億萬富翁中獎選號方式。99位樂透億萬富翁中，有58位是電腦選號，41位是自選號碼。電腦選號與自選號碼下注中頭獎比例大約是6比4，也就是說，自行簽注的號碼，包括所謂的明牌，並不見得能較電腦選號來的容易得獎。此外，北銀也首度公布樂透億萬富翁下注中獎時間，多集中在開獎當天下午5點到7點投注，佔99位樂透億萬富翁的31%，這似乎與坊間樂透彩迷認為愈接近開獎時間，下注愈容易中獎的傳聞相符。其實這個說法也可由機率的角度來得到合理的解釋：當某時段的銷售量激增，相對地該時段售出的號碼，占銷售總數較大的比例，也就自然有較大的機會中獎。

在黃文璋等(2002)曾給出在小樂透底下，偶數個數、號碼和、最小間距、總間距數及連號等檢定方法的機率分佈，而當時並未發行大樂透。因此底下我們給出一些在大樂透底下，各檢定方法之機率分佈。

偶數個數

在49取6的大樂透，6碼中偶數個數W的機率分布為：

$$P(W=i)=\frac{C_i^{24}C_{6-i}^{25}}{C_6^{49}}, i=0,1,\cdots,6，$$

表3給出$P(W=i)$。令

$$Q_2=\sum_{i=0}^{6}\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}。\tag{1}$$

在H_0之下，Q_2有近似χ_6^2的分佈。

表3　大樂透$W=i$之機率

i	0	1	2	3	4	5	6
大樂透	0.01266	0.09119	0.24967	0.33290	0.22796	0.07599	0.00963

號碼和

針對頭獎6個號碼之和S做檢定。大樂透中S從21到279。在H_0之下，表4給出大樂透S落在7個機率大致相等區間的機率。令

$$Q_3 = \sum_{i=1}^{7} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} 。 \tag{2}$$

在H_0之下，Q_3有近似χ^2_6分佈，其中O_i為區間 之觀測頻率，$E_i = Np_i$為期望頻率，其中N為開獎期數，p_i為S落在區間i之機率。

表4　大樂透S落在各區間之機率

區間	[21,114)	[114,131)	[131,144)	[144,157)	[157,170)	[170,187)	[187,279]
大樂透	0.13661	0.14399	0.14279	0.15322	0.14279	0.14399	0.13661

最小間距

所謂最小間距(smallest spacing，又稱minimum gap，簡寫為MG)，是指一組號碼經過排序後，相鄰號碼間距中的最小值。例如，若有號碼(3, 6, 17, 35, 39, 42)，則$MG = 3$。在n取r的樂透彩，可推導出(見Henze,1995)其機率分佈為

$$P(MG = l) = \frac{C_r^{n-(l-1)(r-1)} C_r^{n-l(r-1)}}{C_r^n}, l = 1, \cdots, [\frac{n-1}{r-1}] ,$$

其中[.]表最大整數函數。表5列出大樂透$MG = l$之機率。令

$$Q_4 = \sum_{i=1}^{9} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} 。 \tag{3}$$

在H_0之下，Q_4有近似χ^2_8分佈。

表5　大樂透$MG = l$之機率

l	1	2	3	4	5	6
$P(MG = l)$	0.4952	0.2715	0.1371	0.0622	0.0243	0.007685
l	7	8	9			
$P(MG = l)$	0.001725	0.000209	0.000006			

總間距數

在大多數國家裡，簽注號碼時，等差級數往往為彩民們所偏好，此總間距數便為1。如(5, 10, 15, 20, 25, 30)之總間距數為1，而(10, 17, 23, 25, 32, 37)之總間距數為4。Henze(1997)給出在n取r的樂透彩的機率分佈為

$$P(D=1)=(C_r^n)^{-1}[\frac{n-1}{r-1}](n-\frac{r-1}{2}([\frac{n-1}{r-1}]+1))，$$

$$P(D=i)=(C_r^n)^{-1}\sum_{\substack{\alpha_1,\cdots,\alpha_i\geq 1,\\ \alpha_1+\cdots+\alpha_i=r-1}}\frac{(r-1)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_i!}\sum_{1\leq k_1<\cdots<k_i}(n-\sum_{j=1}^{i}\alpha_j k_j)^+, i=2,3,\cdots,r-1，$$

其中$x^+=max(x,0)$。表6給出大樂透$D=i$之機率。令

$$Q_5=\sum_{i=1}^{5}\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}\text{。} \tag{4}$$

在H_0之下，Q_5有近似χ_4^2分佈。

表6　大樂透$D=i$之機率

i	1	2	3	4	5
大樂透	0.000015	0.003117	0.080366	0.429691	0.486812

連號

令111111表無連號，21111表恰有一組二連號，餘類推。表7給出大樂透各情況(共11種)之機率。令

$$Q_6=\sum_{i=1}^{11}\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}\text{。} \tag{5}$$

在H_0之下，Q_6有近似χ_{10}^2分佈。

表7　大樂透連號情形之機率

情況	111111	21111	2211	222	3111	321
大樂透	0.50288	0.38982	0.05926	0.00099	0.03838	0.00552
情況	33	411	42	51	6	
大樂透	0.00006	0.00297	0.00015	0.00013	0.000005	

反轉數

考慮一序列變數$X_1, X_2, \cdots, X_k$，若$i < j$，$X_i > X_j$時，則稱具有一個反轉(inversion)。分別計算$\{X_i\}$所相對應的反轉個數$I_i = \sum_{i<j}^{k} I_{\{X_i > X_j\}}, i = 1, 2, \cdots, k-1$，其中$I$是一個指標函數，當$i < j$，$X_i > X_j$時，$I_{\{X_i > X_j\}} = 1$，否則為0。接著再把這些$\{X_i\}$所相對應的反轉個數做加總；即$T = \sum_{i=1}^{k-1} I_i$ 。則反轉數T為散佈在集合$\{0, 1, 2, \cdots, C_2^k\}$上的一個隨機變數。其機率分佈為：

$$P(T=t) = \begin{cases} \dfrac{1}{k!}\sum_{j=0}^{t} I_{k-1,j} & , 0 \le t \le k-1 \text{，} \\ \dfrac{1}{k!}\{\sum_{j=0}^{t} I_{k-1,j} - \sum_{j=0}^{t-k} I_{k-1,j}\} & , k-1 < t \le C_2^{k-1} \text{，} \\ \dfrac{1}{k!}\sum_{j=t-(k-1)}^{C_2^{k-1}} I_{k-1,j} & , C_2^{k-1} < t \le C_2^k \text{。} \end{cases}$$

其中$I_{k,T}$表示每一列的行數為k、反轉數為T的個數。表8給出台灣大小樂透彩($k = 6$)對應之機率。令

$$Q_7 = \sum_{i=0}^{15} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \text{。} \tag{6}$$

在H_0之下，Q_7有近似χ^2_{15}分佈。

表8　反轉數之機率

反轉數	0	1	2	3	4	5	6	7
機率	0.0014	0.0069	0.0194	0.0403	0.0681	0.0986	0.1250	0.1403
反轉數	8	9	10	11	12	13	14	15
機率	0.1403	0.1250	0.0986	0.0681	0.0403	0.0194	0.0069	0.0014

最大間距

最大間距(largest spacing，又稱 maximum gap)，以L表之。 也就是號碼經排序後，兩相鄰號碼間距中的最大值。Henze (1995)給出在n取r的樂透彩，$L=k$之機率分佈為

$$P(L=k)=(C_r^n)^{-1}\sum_{i=1}^{r-1}(-1)^{i-1}C_i^{r-1}[(C_r^{n-i(k-1)})^+-(C_r^{n-ik})^+], k=1,\cdots,n-r+1。$$

表9給出大樂透所對應$L=k$之機率，對大部分的k，其機率均很小。令

$$Q_8=\sum_{i=1}^{n-r+1}\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}。 \tag{7}$$

在H_0之下，Q_8有近似χ^2_{n-r}分佈。

表9　大樂透$L=k$之機率

k	1	2	3	4	5	6	7	8
機率	0.000003	0.000092	0.000583	0.002000	0.004925	0.009918	0.017339	0.027241
k	9	10	11	12	13	14	15	16
機率	0.039247	0.052405	0.065106	0.07323	0.081415	0.082836	0.080095	0.074301
k	17	18	19	20	21	22	23	24
機率	0.066732	0.058401	0.050057	0.042191	0.035086	0.028861	0.023520	0.018997
k	25	26	27	28	29	30	31	32
機率	0.015198	0.012031	0.009416	0.007276	0.005544	0.004158	0.003064	0.002213
k	33	34	35	36	37	38	39	40
機率	0.001562	0.001074	0.000716	0.000460	0.000283	0.000165	0.000090	0.000045
k	41	42	43	44				
機率	0.000020	0.000007	0.000002	0.000001				

令

$$Q_9 = \sum_{i=1}^{n-r+1} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} 。 \tag{8}$$

在H_0之下，Q_9有近似χ^2_{n-r}分佈。

頭獎號碼分別除以3至9的餘數個數與3至9的倍數個數

考慮N取6(大樂透N=49，小樂透N=42)的樂透彩，每期頭獎號碼除上3至9的餘數個數，以及每期頭獎號碼6碼中3至9的倍數個數。以一組頭獎號碼(8,11,16,21,23,41)為例，在餘數方面：如以3分別除該組號碼，得餘數為0的有1個，餘數為1的有1個，餘數為2的有4個，而在看完所有期數(大樂透138期，小樂透314期)的頭獎號碼，便對除上3的餘數個數做一卡方檢定，以此類推。在倍數方面：該組號碼中，3的倍數只有1個，也在看完所有期數的頭獎號碼後，如同對頭獎號碼6碼中偶數個數一般，做一卡方檢定，以此類推。其餘數和倍數個數的機率分佈可由簡單的機率運算得知，在此不予贅述。

3. 樂透彩迷簽注之隨機性

樂透彩彩迷簽注之隨機性，也是我們所想探討的問題。假設某期銷售N注彩券，令X_i表示該期i獎以上之中獎注數，$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$。此處將小樂透普獎視為伍獎、大樂透普獎視為柒獎，再令p_i表i獎以上之中獎機率。則若是隨機選號的話，如前

$$Z_i = \frac{X_i - Np_i}{\sqrt{Np_i(1-p_i)}} \approx N(0,1), i = 2, 3, 4, 5, 6, 7，$$

此趨近應很精準。至於X_1則以$P(\lambda_1)$分佈當作近似，$\lambda_1 = Np_1$，λ_1即為期望中頭獎注數。

$|Z_i|$值介於-3與3之間機率應約為0.9974，至於$|Z_i|$值較大，例如$|Z_i| > 10$的可能性應是微乎其微。故$|Z_i|$值愈大，表實際中獎注數與期望中獎注數之差愈大，即表示說彩迷簽注愈不隨機。在黃文璋及洪宛頻(2003)一文中，為了解樂透彩迷簽注之隨機性，是否隨著期數增加而提高，曾對小樂透前144期的中獎注數分成四組，利用 Wilcoxon and Mann-Whitney 檢定(簡稱WMW檢定)的方法，對任兩組間的$|Z_i|$值的大小，檢定H_0 :兩組間沒有差異，vs. H_a :兩組間有差異。時至今日，42取6之小樂透已發行完畢共314期，北銀也增加發行大樂透(我們取前138期)，分別將其分成4組，再度以WMW法檢定之。附錄2給出大小樂透的檢定結果。

由檢定結果可看出：在顯著水準α=0.05之下，大樂透的第三組(69 $\sim$ 103期)分別對上

第二組(35 ∼ 68期)和第四組(103 ∼ 138期)，當中$|Z_3|$以後所有$|Z_i|$值檢定結果所對應的p值皆小於0.05，即拒絕H_0:兩組間沒有差異；若取顯著水準α=0.1時，第一組(1 ∼ 34期)對上第二組(36 ∼ 68期)除了$|Z_2|$、$|Z_4|$檢定結果之p值外，其餘皆小於0.1，即拒絕H_0，故我們相信這幾組之間彩迷簽注之隨機性是有差異的。至於在小樂透方面，由檢定結果之p值，尚無充分證據做出小樂透彩彩迷簽注之隨機性有顯著改變之結論。

由WMW檢定結果可知，大樂透彩迷簽注之隨機性，似乎隨著期數增加而有所不同。為更了解彩迷簽注之隨機性是否有所改變，考慮由U_x(X這組樣本大過Y那組樣本之總次數)及U_y(Y這組樣本大過X那組樣本之總次數)值的大小關係，來找出各組$|Z_i|$值之間勝出比例的大小排名。例如當我們說第一組$|Z_i|$ >第二組$|Z_i|$，即代表第一組的$|Z_i|$值有較大的比例比第二組的$|Z_i|$值大，換句話說，即第一組的隨機性會比第二組來的差。經由這樣的比較，大致有

大樂透：第三組隨機性<第一組隨機性<第四組隨機性<第二組隨機性。

對$i = 3, 4, 5, 6, 7$分別來看，各組$|Z_i|$值有

第三組$|Z_i|$ >第一組$|Z_i|$ >第四組$|Z_i|$ >第二組$|Z_i|$。

對於$|Z_2|$則有

第一組$|Z_i|$ >第三組$|Z_i|$ >第四組$|Z_i|$ >第二組$|Z_i|$。

由上所知，大樂透彩迷簽注之隨機性在第1期到第68期有逐漸提高的趨勢，但自69期到103期彩迷簽注之隨機性降到最低，而後自104期到138期，彩迷簽注之隨機性又稍稍提高了一點。

4. 熵(Entropy)

北銀發行樂透彩至今三年多，已發行完畢的小樂透共售出33億1200萬餘注，大樂透售出10億8千多萬注(取至94年4月28日止)。由於北銀僅公佈每期各獎的中獎人數，因此無法直接得知彩迷購買的彩券號碼組合為何，然而彩迷們所購買彩券號碼組合的機率分佈，是我們感興趣的。因此底下我們將以『熵』的方法來估計彩迷們購買彩券號碼組合的分佈。

在熱力學上對熵有一簡短描述：「熵」是一個系統的亂度或不規律性的量度，一般來說，在我們所生活的世界中，所有系統的熵將會趨向於最大亂度(Maximum Entropy)。熵的應用可在物理上，例如利用熵可以估算出天然氣分子的能量分佈。在統計應用上，

於Jaynes(1983)一書中提到最大亂度：即在有限資訊下，要去估計一整體的機率分佈$P(t)$，那就必須以有限資訊當中的已知限制式(constraints)，對

$$S = -\sum_t P(t)\log(P(t)) \tag{9}$$

求出最大值。針對大小樂透在僅知各獎中獎人數的條件下，我們想分別以最大亂度估計大樂透共13,983,816組、小樂透共5,245,786組號碼組合被彩迷購買的機率分佈。

首先，我們以t表示一組號碼組合，含6個號碼，為了方便起見，在此不考慮特別號。$P(t)$表彩迷會購買t這組號碼的機率，即為我們想以最大亂度估計的機率，以n表某期開出的頭獎號碼，且令

$$\Delta_r(t,n) = \begin{cases} 1, t\text{跟}n\text{相比較，共有}r\text{個號碼相同，} \\ 0,\text{其他。} \end{cases} \tag{10}$$

當頭獎號碼n開出後，中r個號碼的期望比例為$f_r(n)$：

$$f_r(n) = \sum_t \Delta_r(t,n)P(t)\text{。} \tag{11}$$

在北銀公佈的中獎資料中，我們考慮$r = 3, 4, 5$這三種情形。在大樂透方面，因為不考慮特別號，故中3個號碼及特別號的陸獎我們視為中3個號碼，因此普獎併陸獎的中獎期望比例為$r = 3$的情形；中4個號碼及特別號的肆獎視為中4個號碼，故肆獎併伍獎的中獎期望比例為$r = 4$的情形；又中頭獎的人數並不會太多，因此也視為中5個號碼，這對整個估計並未有太大的影響，而中5個號碼及特別號的貳獎也視為中5個號碼，所以頭獎、貳獎、參獎中獎期望比例均視同$r = 5$的情形。在小樂透方面，普獎的中獎期望比例為$r = 3$的情形；肆獎的中獎期望比例為$r = 4$的情形；而頭獎、貳獎、參獎也和大樂透一樣，其中獎期望比例合併視為$r = 5$的情形。

如上所述，當開出w期頭獎號碼，針對不同期的頭獎號碼n：$n_1, n_2, \ldots, n_w$，會得到中了r個號碼的注數，$r = 3, 4, 5$，再除上當期總銷售注數後，分別將其代入(11)式中的$f_r(n)$，可得$3w$個$P(t)$的方程式，即為求第(9)式S的極大值所需要的限制式。再以Lagrange法求出$P(t)$的估計值。Stern(1989)證出在上述條件底下得到的$P(t)$為：

$$\hat{P}(t) = \frac{1}{Z}\exp\{\sum_{j,r}\lambda_r^j\Delta_r(t,n_j)\}\text{，} \tag{12}$$

其中，

$$Z = \sum_t \exp\{\sum_{j,r}\lambda_r^j\Delta_r(t,n_j)\}\text{。} \tag{13}$$

為了解出所有的λ_r^j，我們把第(12)式的$\hat{P}(t)$代回第(11)式的$P(t)$。對開出的w期頭獎號碼來說，我們便得到$3w$個λ_r^j的非線性方程式：

$$f_r(n_j) = \frac{1}{Z}\sum_t\{\Delta_r(t,n_j)\exp[\sum_{j,r}\lambda_r^j\Delta_r(t,n_j)]\}\text{。} \tag{14}$$

在Cox et al.(1998a)一文中，曾針對英國113期樂透彩頭獎號碼(49取6)以最大亂度估出英國樂透彩迷號碼簽注的機率分佈，他們以牛頓法去疊代解出λ_r^j值。而同年Cox et al.(1998b)再提出以牛頓法疊代，輔以電腦平行運算(Parallel Computation Method)的方式解出λ_r^j。本文針對北銀所發行的大小樂透，以Cox et al.(1998b)提出的平行運算法，去解出所有λ_r^j，得到所有$P(t)$估計值。

首先，(14)式可改寫為：

$$\tilde{G}_r^j = \sum_t \{[\Delta_r(t,n_j) - f_r(n_j)] \exp[\sum_{j,r} \lambda_r^j \Delta_r(t,n_j)]\} = 0，\tag{15}$$

進而得到

$$J_{rs}^{ji} = \frac{\partial \tilde{G}_r^j}{\partial \lambda_s^i} = \sum_t \Delta_s(t,n_i)\{[\Delta_r(t,n_j) - f_r(n_j)] \exp[\sum_{j,r} \lambda_r^j \Delta_r(t,n_j)]\}。\tag{16}$$

最後再以下式疊代，每一次疊代會更新λ_s^i值，直到收斂為止：

$$\lambda_s^i(new) = \lambda_s^i(old) - (J_{rs}^{ji})^{-1} \tilde{G}_r^j。\tag{17}$$

Cox et al.(1998b)一文中，λ_s^i經由5-8次疊代即收斂。在此我們分別對大小樂透任選出100組號碼組合，來觀察其收斂情形。發現λ_s^i多在5-7次疊代便收斂，因此我們直接考慮8次疊代。

我們經由最大亂度估計出來的大樂透13,983,816組號碼組合被購買的機率分佈，明顯可看出並非每一組號碼被購買的機率皆相等。如果每一號碼組合被購買的機率均相等，即為$\frac{1}{13,983,816} = 7.15 \times 10^{-8}$。而在我們所估計出來的各組號碼被購買的機率分佈中，會被購買的機率最大的一組號碼是$(6,16,18,24,33,48)$，對應的機率為6.51×10^{-7}。而最不受彩迷所青睞的一組號碼則是$(14,34,40,44,47,49)$，對應的機率為5.11×10^{-9}。此外，對應的機率在小數點後第11位四捨五入為7.15×10^{-8}的號碼組合則共有13859組。表11給出經由最大亂度估計出來，最冷門及最熱門的各10組號碼，並針對大樂透前138期的單期平均銷售注數7,826,432注，所計算出這20組號碼單期平均被購買的注數。由表11可知，一些較熱門的號碼組合平均一期賣出約5注，而較冷門的號碼組合大約$20 \sim 25$期才會賣出1注。

表11　大樂透估計最冷門及最熱門的10組號碼

彩券號碼	估計購買注數	彩券號碼	估計購買注數
14 34 40 44 47 49	0.04	6 16 25 30 32 42	4.69
4 14 30 44 47 49	0.04	6 12 16 25 35 42	4.73
14 34 37 43 44 47	0.07	6 12 16 28 32 48	4.78
14 30 34 44 45 49	0.11	6 16 24 28 42 48	4.82
4 14 34 40 44 47	0.11	6 16 18 22 33 48	4.82
1 4 14 34 37 49	0.18	6 12 16 22 25 42	4.88
4 14 26 31 46 49	0.20	6 9 16 22 33 48	4.93
4 10 14 26 35 47	0.23	6 12 16 22 33 42	5.03
4 14 32 37 44 47	0.23	6 16 18 31 33 48	5.05
4 14 32 35 39 49	0.25	6 16 18 24 33 48	5.09

而小樂透方面，會被購買的機率最大的一組號碼是$(9, 12, 16, 22, 28, 36)$，所對應的機率是1.61×10^{-6}。而最不受彩迷所喜愛的一組號碼則是$(2, 15, 19, 23, 34, 41)$，所對應的機率是1.27×10^{-8}。此外，對應的機率在小數點後第10位四捨五入為1.91×10^{-7}號碼組合共有7356組。表12給出經由最大亂度法估計出來，最冷門及最熱門的各10組號碼，並針對小樂透314期的單期平均銷售注數10,547,995注，所計算出這20組號碼單期平均被購買的注數。由表12可知，較熱門的號碼組合平均一期賣出約17注，而較冷門的號碼組合則大約$6 \sim 8$期才會賣出1注。

表12　小樂透估計最冷門及最熱門的10組號碼

彩券號碼	估計購買注數	彩券號碼	估計購買注數
2 15 19 23 34 41	0.13	7 16 22 26 32 36	17.00
2 15 21 27 34 41	0.13	7 12 17 25 28 33	17.01
2 19 21 23 34 41	0.14	7 12 14 25 28 30	17.01
1 10 19 21 31 41	0.14	9 12 26 28 30 36	17.01
1 6 17 24 32 42	0.14	8 11 12 28 30 36	17.02
2 3 15 21 37 42	0.15	9 12 14 28 30 33	17.02
1 9 19 24 32 42	0.15	9 12 16 22 30 33	17.03
3 19 23 28 38 41	0.15	7 12 16 25 30 36	17.03
2 12 19 23 31 40	0.15	7 12 16 28 30 36	17.08
2 7 18 23 38 40	0.16	9 12 16 22 28 36	17.09

此外，我們亦想知道號碼k，$k = 1, \cdots, N$(大樂透$N = 49$，小樂透$N = 42$)會被彩迷所挑

中的機率為何。在這裡我們的估計方法是：考慮$\binom{N}{6}$組號碼組合中，包含號碼k的所有組合，將其所對應的機率值相加得到a_k值，則$p_k = \frac{a_k}{\sum_{k=1}^{N} a_k}$即為我們對號碼$k$的估計值。附錄3中，圖(1)、圖(2)分別為大、小樂透各號碼所對應的估計機率分佈圖。

在Cox et al.(1998a)以及何淮中等(2004)文中提到，彩迷有傾向選購小於31的投注號碼的情形，兩文皆將此解釋為可能是受到出生日期的影響，彩迷在挑選號碼時，往往不自覺會以自己或親朋好友的生日，當作選購彩券號碼的依據，因此出現這樣子的一個機率分佈。為驗證彩迷在選購號碼時，是否有偏向小於31的傾向，我們分別把大樂透號碼$1 \sim 49$分成$1 \sim 31$、$32 \sim 49$兩組，小樂透號碼$1 \sim 42$分成$1 \sim 31$、$32 \sim 42$兩組，以WMW檢定法，在"H_0 :兩組間沒有差異" v.s "H_a :$1 \sim 31$間的號碼被購買之機率較大"下，檢定其被購買的機率是否有差異。表13為我們的檢定結果，在顯著水準$\alpha = 0.05$下，對大樂透來說，其檢定結果之p值為0.0001，故我們拒絕H_0；小樂透其檢定結果之p值為0.0114，我們亦拒絕H_0。所以不論大小樂透，我們的檢定結果大致支持$1 \sim 31$間的號碼被購買之機率較大。

表13　大小樂透以號碼31為界，分兩組檢定該組號碼被購買機率的大小

H_0 :兩組沒有差異，H_a：$1 \sim 31$間的號碼被購買之機率較大。

	大樂透	小樂透
U_x	455	250
U_y	103	91
p值	0.0001	0.0114

此外，在大樂透方面，16是大樂透彩彩迷最喜愛投注的號碼，12則是小樂透彩彩迷最喜愛的號碼；而44是大樂透最不受青睞的號碼，小樂透最不受歡迎的號碼則是40。觀察兩種樂透彩所估計出的結果可發現：大樂透自號碼43(除號碼48外)、小樂透自號碼40以後的號碼相對應被選購的機率皆較低。此外，我們所做的WMW檢定也支持$1 \sim 31$間的號碼被挑選機率較大，因此可看出台灣彩迷在投注的時候，和Cox et al.(1998a)所提到的英國彩迷一樣，確實也較不喜歡挑選太大的號碼。

最後，為了想知道最大亂度的估計是否準確，我們模擬了10取6的樂透彩頭獎號碼共30期，並收集了高雄大學統計學研究所共23位學生，每人每期1注共30期的投注號碼，以最大亂度去估計。同時分別計算出10取6共210組號碼、號碼$1 \sim 10$眞正被挑選的實際頻率。

表15、16分別列出在這23位學生投注的號碼當中，最熱門及最冷門的各20組號碼組合所對應的實際頻率值，以及用最大亂度估計所得到的對應機率值。此外，附錄3圖(3)、圖(4)分別給出210組號碼之實際頻率與估計機率折線圖，以及號碼1至10的實際頻率與估計機率折線圖，由圖形看起來約略有同樣的趨勢，為了更進一步判定估計是否準確，我們對210組號碼組合所對應之實際頻率的分佈F_1和估計機率的分佈G_1是否相同做檢定。

首先以 Kolmogorov-Smirnov 檢定(簡稱K-S檢定)的方法，對實際頻率的分佈F_1和估計機

率的分佈G_1，檢定H_0：F_1和G_1兩者間沒有差異，vs.，H_a:兩者間有差異。表14(a)是我們檢定的結果，其K-S值為0.1238，其對應的p值為0.0836，在顯著水準α=0.05下，支持實際頻率的分佈F_1和估計機率的分佈G_1沒有差異。事實上，由於p值=0.0836，所以只要α <0.0836，皆不拒絕H_0。我們再以WMW法檢定之，如表14(b)所示，其對應的p值為0.3222，在顯著水準α=0.05下，亦支持F_1和G_1沒有差異。我們也對號碼1至10，其實際頻率的分佈F_2和估計機率的分佈G_2，做相同的檢定，表14為我們的結果，亦支持F_2和G_2之間沒有差異。

經由此次模擬及檢定結果，我們相信以最大亂度估計大樂透13,983,816組、小樂透5,245,786組號碼組合被彩迷購買的機率，以及對各號碼被挑中的機率之估計，其結果尚稱準確。

表14　210組號碼組合、號碼1至10所對應之實際頻率和估計機率的分佈是否有差異之檢定

a.　K-S檢定

	210組號碼	號碼1至10
$K-S$值	0.1238	0.5000
p值	0.0836	0.1626

b.　WMW檢定

	210組號碼	號碼1至10
U_x	21476	66
U_y	22624	34
p值	0.3222	0.1132

表15　高雄大學統計學研究所23位學生簽注號碼之實際頻率與所估計出之最熱門的20組號碼

彩券號碼	實際頻率值	估計機率值	彩券號碼	實際頻率值	估計機率值
3 4 5 6 7 8	0.0333	0.0262	2 3 4 5 6 8	0.0159	0.0127
4 5 6 7 8 9	0.0304	0.0245	2 4 5 6 7 8	0.0145	0.0174
2 3 4 5 6 7	0.0275	0.0269	3 4 5 6 8 9	0.0145	0.0137
1 2 3 4 5 6	0.0261	0.0243	1 2 3 7 8 9	0.0130	0.0157
3 5 6 7 8 9	0.0188	0.0215	1 3 4 5 7 9	0.0130	0.0127
1 2 4 5 6 8	0.0174	0.0168	1 2 3 4 6 8	0.0116	0.0069
2 3 4 6 7 8	0.0174	0.0184	1 2 3 4 7 8	0.0116	0.0133
2 4 6 7 8 9	0.0174	0.0222	2 3 4 6 8 9	0.0116	0.0142
3 4 6 7 8 9	0.0174	0.0141	1 2 3 6 7 8	0.0101	0.0121
1 2 3 5 7 9	0.0159	0.0136	1 2 4 5 6 9	0.0101	0.0084

表16　高雄大學統計學研究所23位學生簽注號碼之實際頻率與所估計出之最冷門的20組號碼

彩券號碼	實際頻率值	估計機率值	彩券號碼	實際頻率值	估計機率值
1 2 6 7 8 10	0.0000	0.0011	1 4 6 7 8 10	0.0000	0.0008
1 2 6 7 9 10	0.0000	0.0035	2 4 5 6 8 10	0.0000	0.0020
1 2 6 8 9 10	0.0000	0.0014	2 3 4 6 7 10	0.0000	0.0008
1 3 4 7 9 10	0.0000	0.0008	2 4 5 8 9 10	0.0000	0.0008
1 3 4 8 9 10	0.0000	0.0017	2 3 5 6 8 10	0.0000	0.0007
2 4 5 6 7 10	0.0000	0.0012	1 6 7 8 9 10	0.0000	0.0007
1 3 5 6 9 10	0.0000	0.0014	1 3 5 6 7 10	0.0000	0.0007
1 3 5 8 9 10	0.0000	0.0023	2 3 5 6 7 10	0.0000	0.0007
1 4 5 6 7 10	0.0000	0.0013	3 4 5 7 8 10	0.0000	0.0006
1 4 5 8 9 10	0.0000	0.0010	1 2 5 7 9 10	0.0000	0.0006

5. 結論

在黃文璋(2002)一篇有關於樂透彩的文章中，有著這麼一句話：『在樂透世界裡，想跟機率拼的人，只要一個月便可贏得公益名。』文中以小樂透彩為例，一個月8期，每期總獎金為提撥當期銷售金額之56%，也就是說平均花100元能拿回來的錢之期望值為56元，若以10萬元去購買彩券，經過一個月的時間很有可能僅會剩下967元。這樣的結果雖然不是絕對，但其投資報酬率之低，顯然不是一項很好的投資，也恐怕是一般樂透彩迷所料想不到的，只不過多數彩迷仍懷抱著一個盼能「以小搏大、贏得頭彩」的美夢。

由於中獎的機率實在很小，每期僅有少部分彩迷能中獎，愈大獎項愈少人得。故彩迷一方面懷抱著美夢，一方面卻也同時對開獎機制的公正性存在著質疑。延續黃文璋等(2002)以及黃文璋及洪宛頻(2003)兩篇對台灣樂透彩的研究，我們再度對小樂透及大樂透做了開獎號碼的隨機性檢定。根據我們檢定的結果，大小樂透的開獎號碼均能通過隨機性檢定，因此目前為止，尚無證據顯示北銀的開獎機制不公正。

北銀發行樂透彩券是以公益之名而起，在總銷售金額扣除獎金支出、管銷費用後，其彩卷盈餘主要分配到國民年金、全民健保以及直轄市和各縣市政府作為地方福利與建設的輔助。又彩券經銷商之申請以身心障礙者、低收入單親家庭、原住民者為優先。這樣取之於民、用之於民，一則刺激民眾消費與投資，一則兼做造福弱勢團體等，發行樂透彩券對社會確實有著些許正面的貢獻。

雖然發行樂透彩本意是好的，但彩迷的賭性堅強，似乎有點扭曲了發行樂透彩的初衷。

在民國六、七零年代盛行的六合彩，早已培養出民眾追逐明牌的行為習慣。時下的樂透彩雖尚未見當年瘋狂追求明牌的情形，但每每頭獎上看數億時，彩迷的瘋狂簽注情形，實不遜於當年六合彩。我們以最大亂度估計出大樂透前138期、42取6的小樂透314期中幾組常被挑選的號碼組合，以及大樂透號碼1到49、小樂透號碼1到42會被挑選的機率分佈，大致可看出彩迷這三年來在彩券號碼選擇上的一些趨勢。是否真的有明牌？如前檢定所顯示的很可能是沒有。然而彩迷們追求心目中明牌的那種盲目，也許已可由我們得到的結果中窺知一二。

附錄1　a.小樂透

各號碼

E_i	Q_1	$d.f.$	p值
44.86	30.522	41	0.885

偶數個數	0	1	2	3	4	5	6	Q_2	d.f.	p值
O_i	6	21	73	100	90	21	3	7.287	5	0.200
E_i	3.25	25.58	75.23	105.88	75.23	25.58	3.25			

號碼和	[21,99)	[99,113)	[113,124)	[124,135)	[135,146)	[146,160)	[160,238)	Q_3	d.f.	p值
O_i	40	38	46	43	45	54	48	4.322	6	0.633
E_i	44.08	44.21	44.66	47.97	44.66	44.21	44.08			

最小間距	1	2	3	4	5	6	7	8	Q_4	d.f.	p值
O_i	171	88	36	16	3	0	0	0	0.298	3	0.960
E_i	174.84	84.91	36.52	13.25	3.72	0.69	0.05	0.00			

總間距數	1	2	3	4	5	Q_5	d.f.	p值
O_i	0	1	24	162	127	4.918	2	0.085
E_i	0.01	1.65	33.86	146.58	131.91			

連號	111111	21111	2211	3111	321	411	222	42	51	33	6	Q_6	d.f.	p值
O_i	143	133	22	13	3	0	0	0	0	0	0	1.342	3	0.719
E_i	139.16	130.46	23.72	15.81	2.79	1.39	0.46	0.08	0.08	0.04	0.02			

反轉數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
O_i	0	1	7	11	25	34	43	47	48	36
E_i	0.44	2.18	6.11	12.56	21.37	30.96	39.25	44.05	44.05	39.25

反轉數	10	11	12	13	14	15	Q_7	d.f.	p值
O_i	23	17	11	5	4	2	6.119	11	0.865
E_i	30.96	21.37	12.65	6.11	2.18	0.44			

最大間距	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
O_i	0	0	1	1	2	7	12	18	17	36
E_i	0.00	0.06	0.40	1.34	3.24	6.35	10.73	16.12	21.84	26.81
最大間距	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
O_i	20	37	34	23	22	23	18	11	4	8
E_i	29.89	30.61	29.22	26.42	22.92	19.26	15.79	12.70	10.07	7.88
最大間距	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
O_i	4	7	3	2	3	0	0	1	0	0
E_i	6.09	4.64	3.48	2.56	1.85	1.31	0.90	0.60	0.39	0.24
最大間距	31	32	33	34	35	36	37	Q_9	d.f.	p值
O_i	0	0	0	0	0	0	0	14.302	15	0.503
E_i	0.14	0.08	0.04	0.02	0.01	0.00	0.00			

除上3的餘數個數	0	1	2	Q	d.f.	p值
O_i	651	627	606	1.615	2	0.446
E_i	628	628	628			

除上4的餘數個數	0	1	2	3	Q	d.f.	p值
O_i	482	488	468	446	3.874	3	0.275
E_i	448.57	493.43	493.43	448.57			

除上5的餘數個數	0	1	2	3	4	Q	d.f.	p值
O_i	363	396	418	347	360	1.097	4	0.895
E_i	358.86	403.71	403.71	358.86	358.86			

除上6的餘數個數	0	1	2	3	4	5	Q	d.f.	p值
O_i	326	298	295	325	329	311	3.554	5	0.615
E_i	314.00	314.00	314.00	314.00	314.00	314.00			

除上7的餘數個數	0	1	2	3	4	5	6	Q	d.f.	p值
O_i	285	261	259	248	278	286	267	4.588	6	0.598
E_i	269.14	269.14	269.14	269.14	269.14	269.14	269.14			

除上8的餘數個數	0	1	2	3	4	5	6	7	Q	d.f.	p值
O_i	226	272	264	226	256	216	204	220	6.867	7	0.443
E_i	224.29	269.14	269.14	224.29	224.29	224.29	224.29	224.293			

除上9的餘數個數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	Q	d.f.	p值
O_i	183	232	206	241	223	223	227	172	177	3.461	8	0.902
E_i	179.43	224.29	224.29	224.29	224.29	224.29	224.29	179.43	179.43			

3的倍數個數	0	1	2	3	4	5	6	Q	d.f.	p值
O_i	17	72	120	84	18	3	0	6.572	4	0.160
E_i	22.55	82.36	111.53	71.38	22.65	3.36	0.18			
4的倍數個數	0	1	2	3	4	5	6	Q	d.f.	p值
O_i	46	113	107	37	11	0	0	5.559	4	0.235
E_i	54.24	120.54	96.86	35.63	6.23	0.48	0.01			
5的倍數個數	0	1	2	3	4	5	6	Q	d.f.	p值
O_i	89	119	80	21	4	1	0	5.085	4	0.279
E_i	80.85	133.25	77.72	20.06	2.35	0.11	0.00			
6的倍數個數	0	1	2	3	4	5	6	Q	d.f.	p值
O_i	91	135	74	13	1	0	0	1.483	3	0.686
E_i	97.16	136.02	65.82	13.71	1.25	0.04	0.00			
7的倍數個數	0	1	2	3	4	5	6	Q	d.f.	p值
O_i	104	150	47	11	2	0	0	5.220	3	0.156
E_i	116.59	135.39	52.89	8.55	0.57	0.01	0.00			
8的倍數個數	0	1	2	3	4	5		Q	d.f.	p值
O_i	138	134	34	8	0	0		2.897	3	0.408
E_i	139.16	130.46	39.53	4.65	0.20	0.00				
9的倍數個數	0	1	2	3	4			Q	d.f.	p值
O_i	165	119	27	2	1			0.083	2	0.959
E_i	165.25	120.18	26.51	2.02	0.04					

b.大樂透

各號碼

E_i	Q_1	$d.f.$	p值
16.90	39.536	48	0.803

偶數個數	0	1	2	3	4	5	6	Q_2	d.f.	p值
O_i	1	11	34	48	27	16	1	3.392	4	0.495
E_i	1.70	12.64	34.51	45.89	31.52	10.54	1.31			

號碼和	[21,114)	[114,131)	[131,144)	[144,157)	[157,170)	[170,187)	[187,279]	Q_3	d.f.	p值
O_i	20	19	21	14	24	19	21	3.824	6	0.700
E_i	18.85	19.87	19.71	21.14	19.17	19.87	18.85			

最小間距	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Q_4	d.f.	p值
O_i	72	41	12	10	3	0	0	0	0	3.065	3	0.382
E_i	51.50	28.24	14.26	6.47	2.53	0.80	0.18	0.02	0.00			

總間距數	1	2	3	4	5	Q_5	d.f.	p值
O_i	0	1	16	64	57	4.534	2	0.104
E_i	0.00	0.43	11.09	59.30	67.18			

連號	111111	21111	2211	3111	321	411	222	42	51	33	6	Q_6	d.f.	p值
O_i	66	55	7	6	3	0	0	1	0	0	0	2.229	3	0.526
E_i	69.40	53.80	8.18	5.30	0.76	0.41	0.14	0.02	0.01	0.01	0.00			

反轉數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
O_i	0	0	2	6	11	17	17	15	17	19
E_i	0.19	0.95	2.68	5.56	9.40	13.61	17.25	19.36	19.36	17.25
反轉數	10	11	12	13	14	15	Q_7	d.f.	p值	
O_i	8	18	5	3	0	0	13.163	9	0.155	
E_i	13.61	9.40	5.56	2.68	0.95	0.19				

最大間距	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
O_i	0	0	1	0	1	0	2	7	2	7
E_i	0.0004	0.01	0.08	0.28	0.68	1.37	2.39	3.75	5.42	7.23
最大間距	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
O_i	6	15	17	5	13	9	12	7	7	5
E_i	8.98	10.11	11.24	11.43	11.05	10.25	9.21	8.06	6.91	5.82
最大間距	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
O_i	6	5	1	2	1	0	2	1	1	0
E_i	4.84	3.98	3.25	2.62	2.10	1.66	1.30	1.00	0.77	0.57
最大間距	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
O_i	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
E_i	0.42	0.31	0.22	0.15	0.10	0.06	0.04	0.02	0.01	0.01
最大間距	41	42	43	44	Q_9	d.f.	p值			
O_i	0.00	0.00	0.00	0.00	14.281	14	0.429			
E_i	0.002	0.0007	0.0002	0.0001						

除上3的餘數個數	0	1	2	Q	d.f.	p值
O_i	262	306	260	1.879	2	0.391
E_i	270.37	287.27	270.37			

除上4的餘數個數	0	1	2	3	Q	d.f.	p值
O_i	193	216	224	195	3.052	3	0.384
E_i	202.78	219.67	202.78	202.78			

除上5的餘數個數	0	1	2	3	4	Q	d.f.	p值
O_i	155	193	166	159	155	5.269	4	0.261
E_i	152.08	168.98	168.98	168.98	168.98			

除上6的餘數個數	0	1	2	3	4	5	Q	d.f.	p值
O_i	140	160	131	122	146	129	3.148	5	0.677
E_i	135.18	152.08	135.18	135.18	135.18	135.18			

除上7的餘數個數	0	1	2	3	4	5	6	Q	d.f.	p值
O_i	116	115	113	127	117	117	123	1.229	6	0.975
E_i	118.29	118.29	118.29	118.29	118.29	118.29	118.29			

除上8的餘數個數	0	1	2	3	4	5	6	7	Q	d.f.	p值
O_i	85	119	106	97	108	97	118	98	6.509	7	0.482
E_i	101.39	118.29	101.39	101.39	101.39	101.39	101.39	101.39			

除上9的餘數個數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	Q	d.f.	p值
O_i	75	101	100	104	109	84	83	96	76	4.175	8	0.841
E_i	84.49	101.39	101.39	101.39	101.39	84.49	84.49	84.49	84.49			

3的倍數個數	0	1	2	3	4	5	6	Q	d.f.	p值
O_i	14	33	54	29	6	2	0	2.889	4	0.577
E_i	10.93	37.47	48.46	30.15	9.48	1.42	0.08			
4的倍數個數	0	1	2	3	4	5	6	Q	d.f.	p值
O_i	25	53	41	18	1	0	0	0.416	3	0.937
E_i	22.94	51.62	43.02	16.87	3.25	0.29	0.01			
5的倍數個數	0	1	2	3	4	5	6	Q	d.f.	p值
O_i	31	65	38	4	0	0	0	1.988	2	0.370
E_i	37.88	58.44	32.47	8.18	0.97	0.05	0.00			
6的倍數個數	0	1	2	3	4	5	6	Q	d.f.	p值
O_i	45	55	30	7	1	0	0	0.800	3	0.849
E_i	44.37	59.16	27.98	5.89	0.57	0.02	0.00			
7的倍數個數	0	1	2	3	4	5	6	Q	d.f.	p值
O_i	52	61	21	3	1	0	0	0.307	2	0.858
E_i	51.77	58.76	23.20	3.97	0.30	0.01	0.00			
8的倍數個數	0	1	2	3	4	5	6	Q	d.f.	p值
O_i	69	54	14	1	0	0	0	3.089	2	0.213
E_i	60.16	57.00	18.27	2.44	0.13	0.00	0.00			
9的倍數個數	0	1	2	3	4	5		Q	d.f.	p值
O_i	74	54	9	1	0	0		1.804	2	0.406
E_i	69.66	53.59	13.40	1.31	0.05	0.00				

附錄2

a.小樂透1-314期分四組檢定各組間之$|Z_i|$值大小

H_0 :兩組沒有差異，H_a：兩組間有差異。

$1 \sim 78$ vs. $79 \sim 156$

	$\|Z_2\|$	$\|Z_3\|$	$\|Z_4\|$	$\|Z_5\|$
U_x	2461	2919	2977	3050
U_y	3623	3165	3107	3034
p值	0.0197	0.3314	0.4089	0.4887

$79 \sim 156$ vs. $157 \sim 234$

	$\|Z_2\|$	$\|Z_3\|$	$\|Z_4\|$	$\|Z_5\|$
U_x	3369	2842	2905	2899
U_y	2715	3242	3179	3185
p值	0.1232	0.2392	0.3136	0.3061

$157 \sim 234$ vs. $235 \sim 314$

	$\|Z_2\|$	$\|Z_3\|$	$\|Z_4\|$	$\|Z_5\|$
U_x	3309	3026	3053	3188
U_y	2931	3214	3187	3052
p值	0.2555	0.3719	0.4079	0.4065

$1 \sim 78$ vs. $157 \sim 234$

	$\|Z_2\|$	$\|Z_3\|$	$\|Z_4\|$	$\|Z_5\|$
U_x	2664	2812	2949	2971
U_y	3420	3272	3135	3113
p值	0.0902	0.2075	0.3708	0.4007

$1 \sim 78$ vs. $235 \sim 314$

	$\|Z_2\|$	$\|Z_3\|$	$\|Z_4\|$	$\|Z_5\|$
U_x	2841	2937	3076	3190
U_y	3399	3303	3164	3050
p值	0.1660	0.2622	0.4392	0.4038

$79 \sim 156$ vs. $235 \sim 314$

	$\|Z_2\|$	$\|Z_3\|$	$\|Z_4\|$	$\|Z_5\|$
U_x	3613	2796	2873	2938
U_y	2627	3444	3367	3302
p值	0.0432	0.0576	0.1952	0.2634

b.大樂透1-138期分四組檢定各組間之$|Z_i|$值大小

H_0 :兩組沒有差異，H_a :兩組有差異。

1 ∼ 34 vs. 35 ∼ 68

	$\|Z_2\|$	$\|Z_3\|$	$\|Z_4\|$	$\|Z_5\|$	$\|Z_6\|$	$\|Z_7\|$
U_x	664	712	661	706	709	724
U_y	292	444	495	450	447	432
p值	0.1457	0.0501	0.1543	0.0582	0.0541	0.0367

35 ∼ 68 vs. 69 ∼ 102

	$\|Z_2\|$	$\|Z_3\|$	$\|Z_4\|$	$\|Z_5\|$	$\|Z_6\|$	$\|Z_7\|$
U_x	523	338	400	324	376	345
U_y	633	818	756	832	780	811
p值	0.2500	0.0016	0.0145	0.0009	0.0066	0.0021

69 ∼ 102 vs. 103 ∼ 138

	$\|Z_2\|$	$\|Z_3\|$	$\|Z_4\|$	$\|Z_5\|$	$\|Z_6\|$	$\|Z_7\|$
U_x	633	827	744	825	759	804
U_y	591	397	480	399	465	420
p值	0.2515	0.0016	0.0242	0.0017	0.0158	0.0037

1 ∼ 34 vs. 69 ∼ 102

	$\|Z_2\|$	$\|Z_3\|$	$\|Z_4\|$	$\|Z_5\|$	$\|Z_6\|$	$\|Z_7\|$
U_x	592	496	533	525	572	544
U_y	564	660	623	631	584	612
p值	0.4318	0.1573	0.2905	0.2578	0.4707	0.3383

1 ∼ 34 vs. 103 ∼ 138

	$\|Z_2\|$	$\|Z_3\|$	$\|Z_4\|$	$\|Z_5\|$	$\|Z_6\|$	$\|Z_7\|$
U_x	667	699	673	711	705	716
U_y	557	525	551	513	519	508
p值	0.1425	0.0742	0.1272	0.0563	0.0648	0.0510

35 ∼ 68 vs. 103 ∼ 138

	$\|Z_2\|$	$\|Z_3\|$	$\|Z_4\|$	$\|Z_5\|$	$\|Z_6\|$	$\|Z_7\|$
U_x	567	558	564	542	567	539
U_y	657	666	660	682	657	685
p值	0.4471	0.4045	0.4328	0.3317	0.4471	0.3186

附錄3

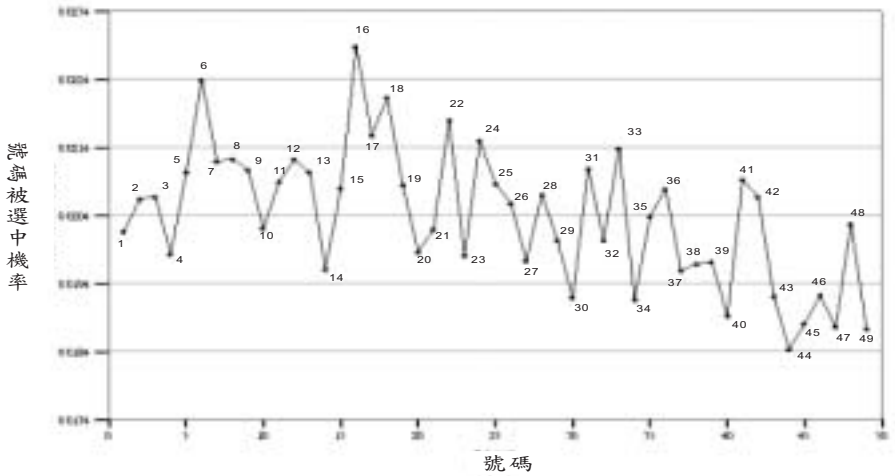

圖1：前138期大樂透彩估計出的號碼被挑選之機率分佈圖

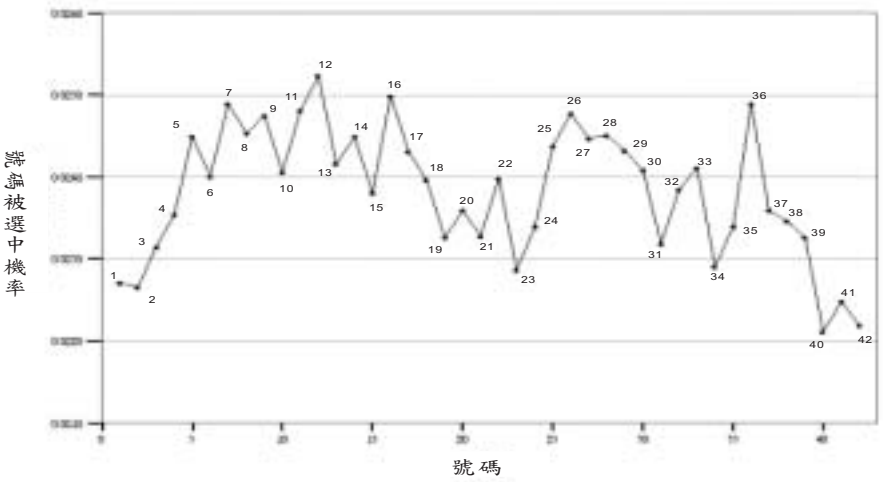

圖2：前314期小樂透彩估計出的號碼被挑選之機率分佈圖

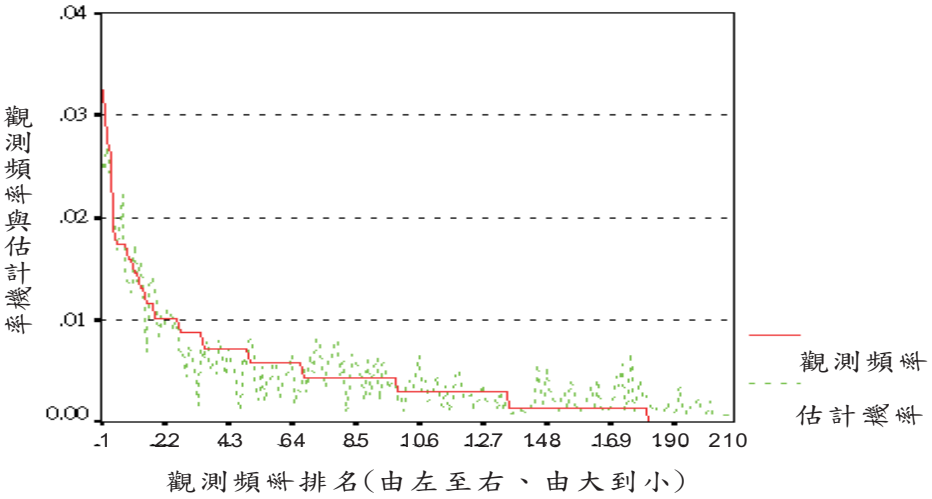

圖3：210組號碼組合之實際頻率與估計機率折線圖

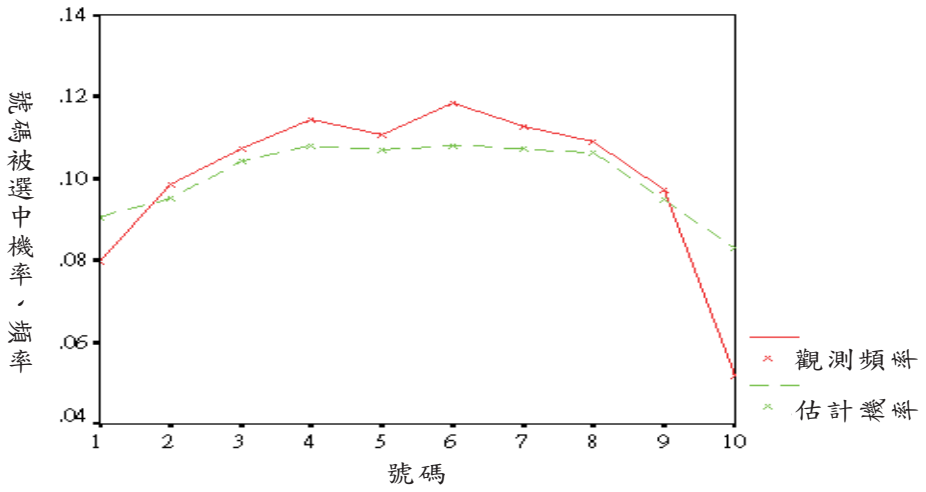

圖4：號碼1至10之實際頻率與估計機率折線圖

參考文獻

何淮中、林修葳、李世欽 (2004)。Does the Behavior of Lottery Players Consist Gambler's Fallacy?–Evidence from Taiwan Lotto Market.

黃文璋、洪宛頻、羅夢娜 (2002)。樂透彩開出號碼隨機性之檢定。中國統計學報 **40**，249-273。

黃文璋 (2002)。挑戰機率。誠品好讀月刊21期(2002年5月號)，46-47。

黃文璋、洪宛頻 (2003)。簽注之隨機性探討。中國統計學報 **41**。475-492。

Cox, S. J., Daniell, G. J., and Nicole, D. A. (1998a). Using maximum entropy to double one's expected winning in the UK national lottery. *The Statistician* **47**,629-641.

——-(1998b). Maximum entropy, parallel computation and lotteries. *Proc. International Conference on Parallel and Distributed Processing Techniques and Application* (PDPTA '98). 1252-1258.

Henze, N. (1995). The distribution of spaces on lottery tickets. *The Fibonacci Quarterly* **33**,426-431.

——- (1997). A statistical and probabilistic analysis of popular lottery tickets. *Statistica Neerlandica* **51**, 155-163.

Jaynes, E. T. (1983). *Papers on Probability. Statistics and Statistical Physics*(ed. R. D. Rosenkrantz). Dordrecht: Reidel. ISBN 9027714487

Joe, H. (1993). Tests of uniformity for sets of lotto numbers. *Statistics and Probability Letters* **16**, 181-188.

Stern, H. and Cover, T. M. (1989). Maximum entropy and the lottery. *Journal of American Statistical Association* **84**, 980-985.