再論汽車與山羊問題

黃文璋

國立高雄大學應用數學系、統計學研究所

著名的“汽車與山羊問題”(Car-Goat Problem)，曾出現於電影“決勝21點”(英文片名為“21”，2008年出品)中。在一門數學課裡，老師問學生：

> 有三扇門，其中一扇門後有汽車，另兩扇門後皆為山羊。當你選定一扇門，主持人打開另兩扇門中的一門，發現門後是山羊，問你要不要更改選擇。更改與否，乃基於得到汽車的機率是否會變大。

大部分的學生有如下想法。原先有三門，每門後有汽車的機率皆為 1/3，如今打開一無汽車的門，只剩二門，其後會有汽車的機率仍應相同，即皆為 1/2，因此不必更改。有一位學生卻獨排眾議，認為該更改，因得到汽車的機率，將由1/3增為2/3。老師覺得此生很聰明，對他刮目相看。

機率值會變，是機率的特性。一事件發生的可能性，常隨知道某事件發生(即給新的資訊)而變，這就是所謂條件機率。若不會改變，則新事件與原事件，便稱為獨立了。歷來汽車與山羊問題已有很多人討論了，有時還以不同的情境出現，如選美或釋放囚犯等。但其中仍有一些值得探討處。為了便於討論，三門分別以 a，b，c 表之，且假設你選 a 門，

而主持人打開 b 門。電影裡沒講，視之為當然的細節是，主持人事先知道汽車在那一門後，且若 b，c 二門後有一為汽車，則他必打開有山羊的那門；而若 b，c 二門後皆為山羊，則他隨機(即各以 1/2 的機率)打開其中一門。

對那些一直心存疑惑者，有人以如下方式來說明。在主持人開門前，汽車會在 b，c 二門之一後面的機率為 2/3。現既知 b 門後不是汽車，則 c 門後，便獨自擁有那機率 2/3。簡截了當，有人便因此接受了。但有些人追根究底，當 b，c 二門後皆為山羊，而主持人並非依照前述方式，各以 1/2 的機率打開其中一門，那更改選擇，得到汽車的機率，仍為 2/3 嗎？如果不是，則 c 門後獨自擁有機率 2/3 之解釋，便又難以理解了。

假設當 b，c 二門後皆為山羊時，主持人以 p 的機率打開 b 門，以 $1-p$ 的機率打開 c 門，其中 p 介於 0 與 1 間。令 K 表主持人打開 b 門之事件，其機率以 $P(K)$表之；A，B，C 分別表汽車在 a，b，c 門後之事件，其機率分別以 $P(A)$，$P(B)$，$P(C)$表之；$P(K|A)$，$P(K|B)$，$P(K|C)$，分別表給定 A，B，C 之下，K 之條件機率。最後，令 $P(A|K)$，$P(B|K)$，$P(C|K)$ 分別表給定 K 之下，A，B，C 之條件機率，這是我們想求的。由假設 $P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$，且 $P(K|A) = p$，$P(K|B) = 0$，$P(K|C) = 1$。再利用貝氏定理(Bayes’ theorem)，便得

$$P(K) = P(K|A)P(A)+P(K|B)P(B)+P(K|C)P(C) = (1+p)/3。$$

現經由條件機率的定義，則有 $P(C\cap K) = P(K|C)\,P(C)=1/3$，

其中∩表交集。再度利用條件機率，即得

$$P(C|K) = P(C\cap K)/P(K) = 1/(1+p)。$$

因 p 介於 0 與 1 間，故 $P(C|K)$ 至少是 1/2。同理可得 $P(A|K) = p/(1+p)$。至於 $P(B\,|\,K)$當然為 0。可看出除非 $p = 1$，否則 $1/(1+p) > p/(1+p)$，因此更改選擇得到汽車的機率較大。附帶一提，在原始的汽車與山羊問題中 $p = 1/2$，代入 $1/(1+p)$中，果然得到 $P(C|K) = 2/3$。

換個情境，若主持人事先並不知道汽車在那一門後，只是分別以 p 及 $1\text{-}p$ 的機率，打開 b 及 c 門，則當打開的是 b 門，且剛好其後無汽車，此時便不需更改選擇。因更改與否，得到汽車的機率皆為 1/2。這部分就留給讀者自行推導。綜上討論，若不知主持人究竟是如何開門，則並無法求出上述那些相關的機率。這個“汽車與山羊問題”，其實不只是一有如機智問答的題目。