

統計可信嗎？

黃文璋

國立高雄大學統計學研究所

1 數據已死？

2016 年的美國總統大選，於美國時間 11 月 8 日舉行。結果揭曉後，很多媒體、民調機構，及選舉專家，個個灰頭土臉。因民調一路落後，不被看好的共和黨 (Republican Party) 候選人川普 (Donald Trump)，竟然擊敗民主黨 (Democratic Party) 候選人柯林頓 (Hillary Clinton)，當選第 58 屆美國總統。選舉大爆冷門，不但讓不喜歡川普的人難以接受，也讓統計遭池魚之殃。有些人就此認定真相大白，統計果然是比可惡的謊言還可惡的謊言：

There are three kinds of lies: lies, damned lies, and statistics.

這原本是 19 世紀，曾兩度擔任英國首相的迪斯雷利 (Benjamin Disraeli, 1804–1881) 所說。不過是自美國著名小說家馬克吐溫 (Mark Twain, 1835–1910)，在 1907 年的自傳裡引用後，才廣為流傳。

特立獨行，望之不似人君的川普，選前不斷拋出各種歧視言論，屢引起爭議，常連同黨的人都看不下去。愈臨近投票日，愈多擔心被拖累的共和黨要角，跟川普割袍斷義，總要為自己的政治生命著想。海納百川，有容乃大，選舉想獲勝，得吸收各族群的票，宜多方討好，面面俱到。從頭到尾走偏鋒，不在乎激怒人，導致眾叛親離，豈有當選可能？共和黨裡熟悉選情的專家，早早覺得選舉大勢已定，再無妙手可以回春，只能期待下次了。即使不落井下石，也多半作壁上觀。眾多放棄川普的“智者”，選後不禁落寞了。墨菲 (Mike Murphy, 1962–)，曾是共和黨多位重要政治人物

的策士，投票日當晚，票尚未開完，眼看柯林頓節節敗退，川普不斷攻城掠地，共和黨即將掌權，卻無絲毫喜悅。他在其推特 (Twitter) 上寫著：

I' ve believed in data for 30 years in politics and data died tonight. I could not have been more wrong about this election.

什麼大數據？什麼數據會說話？從今晚起，數據死了。

統計學教授，也算是這次選舉的受害者。機會教育，選舉結束，他們通常會跟學生說明，選舉過程中所用到的統計方法，也趁機讓學生了解，統計是現代做決策之一重要工具。只是這回不再意氣風發，因得解釋，到底那裡出了大差錯，使本次的統計預測，被抨擊的體無完膚。要讓沮喪不已的學生，重拾對統計之信心，真得煞費苦心。

統計究竟可信嗎？令人好奇。

2 預測不易

早上臨離開家前，遲疑一下，最近偶而會下雨，今天需要帶傘嗎？嗯！到門外看看天候。如何預測？慣有的作法是，抬頭望天，以過去相似天氣狀況的日子中，下雨的比率，當做今天下雨可能性的估計。若想可靠一點，則可查看氣象局的天氣預測。不論那種預測方式，大抵都是基於統計。但不要說我們個人的簡易預測，不時會犯錯，擁有很多儀器及專家的氣象局之預測，也常因不準確，而備受各方指責。事實上，丹麥的波耳 (Niels Bohr, 1885-1962)，早就說：

預測很難，尤其關於未來。

波耳是量子論泰斗，1922 年的諾貝爾物理獎得主。事後諸葛容易，很多人皆可分析的頭頭是道。至於事先，能斬釘截鐵預測的人就少了，多半會有所保留。對於隨機現象，預測有誤，向來難以避免，說不準其實是正

常的。但若不了解誤差之意義，常會因此不相信統計，甚至以為統計不過是謊言。

投擲一出現正面機率為 0.7 的銅板，要你預測出現正面或反面？正反面出現機率之比為 0.7:0.3，相當懸殊，二話不說，顯然要選正面。雖然是合理的選擇，但 10 次大約將錯 3 次，遠非萬無一失。如果改為投擲一出現正面機率為 0.6 的銅板呢？正面仍佔相當優勢，出現的機率比反面多了 0.2，顯然仍該預測會出現正面。但 10 次就是將錯 4 次左右。銅板不會作假，原本較不易出現的那面，也不會因受到激勵，士氣大振，而頻繁出現。雖如此穩定，但不管什麼專家都沒用，只要持續投擲，便難以每次皆預測正確。仍以出現正面機率為 0.6 的銅板為例。假設各次投擲的結果為獨立，則 n 次皆出現正面的機率為 $0.6n$ ，此值隨著 n 之增大，而漸減至 0。因此預測將出現正面雖合理，但誰敢保證每次都能講對？那預測出現反面如何？將錯更多次了。波耳說“預測很難”，對隨機現象，絕非虛言。只是也真的有人連續多次預測正確，那又是怎麼一回事？

再度以出現正面機率為 0.6 的銅板為例。預測出現正面，連續 10 次皆正確，其機率是不太大，僅為 $0.6^{10} \approx 0.006$ 。但只要人數夠多，如有 200 人做同樣的預測，則有人辦到 10 次皆預測正確，就不算稀奇。另一方面，假設想挑戰機率的人夠多，像是有 10,000 人，次次選反面，則其中出現連續 10 次皆預測正確（機率為 $0.4^{10} \approx 0.0001$ ，相當小）者，便也不必太訝異。小機率事件一旦碰上大樣本，則發生便不必大驚小怪。就如樂透彩中頭獎之機率雖極低，但不時有幸運兒產生一樣。

2016 年 9 月 24 日，很多媒體皆刊登一則預測選舉的新聞。美國美利堅大學 (American University) 的歷史教授李奇曼 (Allan Lichtman, 1947-)，預測川普將獲勝。新聞中還說，從 1984 至 2012 年，李奇曼已正確預測美國 8 次總統的選舉結果。當時夾在眾多對川普嗤之以鼻的報導中，此訊息可能沒太多人在意。選後這則“未卜先知”的新聞又被拿出來，如今李奇曼累計 9 次預測正確了。只是先不必過度推崇，以美國之大，次次預測的人不知有多少人，有人正確預測 9 次甚至更多次，差不多可視為必然。只是他們是尋常百姓，媒體沒興趣報導。李奇曼信心十足，並不見

好即收，選後仍繼續預測。他說川普將會被共和黨主導的國會彈劾，總統一職則由副總統潘斯 (Mike Pence, 1959-) 接任。這是一很大膽的預測，日後我們將會看到李奇曼是否真的是“神算子”。

預測主要針對未來，一般若有一量，即使此量並不隨機，而是一定值，則只要不知道該量究竟為何的人，便皆可估計。假設有一袋子，其中裝有許多不同顏色的球，想知道袋中紅球所佔比例。此比例是固定的，由於不擬將球全倒出來數，遂採取估計法。如何估計？先將袋中的球攪和均勻，然後自袋中隨機地取出 n 個球，每次取出後不放回。則只要 n 夠大，且取出的球數也不算少，以取出球裡紅球之比例，來估計袋中紅球之比例，是一常見的方法。當然攪和均勻，及隨機取球是必要的。只要此二步驟能達成，通常所得的估計值，便不至於太偏差。但若想以此法，估計池中某種魚之比例，則直觀上誤差將較大。因魚有不同的習性，且會游動，想將池中的魚攪和均勻，或隨機取魚，都不是很容易。連數量為固定之魚數，都已難有效的估計，經由民調預測與人有關的選舉結果，將更不易準確。

選舉的預測雖無常勝軍，但比較起來，球賽之變化似乎更大，出人意料的結果多至不可勝數。NBA(National Basketball Association)，是北美男子職業籃球組織。NBA 分東區及西區兩聯盟，每聯盟各有 15 支球隊，總共 30 隊。例行賽每年每隊打 82 場，全部賽程共 1,230 場。場次一多，就會有各種“有趣”的事件發生。金州勇士隊 (Golden State Warriors, “金州”是加州的別名) 的控球後衛柯瑞 (Stephen Curry, 1988-)，在 2015-16 的例行賽，1 人便投進 402 顆 3 分球，創下 NBA 單季例行賽的個人紀錄。這位擅投 3 分球的好手，在 2016-17 的例行賽，於 11 月 4 日的比賽，3 分球 10 投 0 中，連續 157 場投進 3 分球的紀錄就此中斷。柯瑞的球技衰退了嗎？非也！緊接著在下一場 (11 月 7 日)，他投進 13 顆 3 分球，創下 NBA 個人單場的最高紀錄。連續兩場都創下紀錄，一優一劣。隨機現象就是如此，不必懷疑柯瑞打假球。

FiveThirtyEight，亦稱作 538，此網站於 2008 年 3 月 7 日，由西爾弗 (Nate Silver, 1978-) 所創。網站名稱源自於美國“選舉人團”(electoral college) 中，選舉人 (elector) 共 538 位。自 2010 年 8 月起，此網站

隸屬“紐約時報”(The New York Times)。又自 2013 年 7 月起，網站被 ESPN(Entertainment and Sports Programming Network 之縮寫)收購。ESPN 是美國一個 24 小時播放，以娛樂與體育節目為主的有線電視網。為何知名媒體，爭相想將 538 網站納入麾下？此網站，以精準預測 2008 及 2012 年的美國大選結果而出名。媒體當然樂意與如此聲譽卓越的網站結合。今日該網站所公佈的預測，涵蓋民意調查分析、政治、經濟、科學、流行文化，與體育等，並不侷限在選舉。

NBA 每年依例行賽成績，東區和西區，各有 8 隊能進入季後賽。季後賽先在兩聯盟裡，各自強弱抓隊廝殺，採 7 戰 4 勝淘汰制。3 輪後，兩區的冠軍產生，再爭奪年度總冠軍，仍採 7 戰 4 勝制。闖過 4 關，共贏 16 場，便能登上各隊夢寐以求的年度總冠軍寶座。2015-16 NBA 的例行賽，自 2015 年 10 月 27 日(美國時間)正式開始，直至 2016 年 4 月 13 日，之後便進行季後賽。東、西區的冠軍，分別是克里夫蘭騎士隊(Cleveland Cavaliers)，及勇士隊。勇士隊獲西區冠軍，跌破很多人的眼鏡。因他們是在 1 比 3 落後下，連贏 3 場，取得爭奪總冠軍的機會。而西區冠軍賽，之前從未有由 1 比 3 瀕臨淘汰邊緣，逆轉成功之例。總冠軍賽於 6 月 2 日開打，6 月 19 日產生新盟主。

對 2015-16 球季，538 網站，自 2015 年 10 月 27 日起，至 2016 年 6 月 13 日止，每週 1 次，對各支球球，預測進入季後賽的機率，及得總冠軍的機率(季後賽開始後，4 月 14 日多做了 1 次)。圖 1 顯示，全年所做的 35 次預測中，奪冠機率，除一開始的兩次，騎士隊領先勇士隊，及有兩次兩隊平手，其餘 31 次，皆看好勇士隊。球季中有很長一段時間，兩隊奪冠機率之預測值，差異還蠻大的。最後一次預測時，已在打總冠軍賽，95% 對 5%，騎士隊完全被看衰。騎士隊那時處於 1 比 3 落後的“絕境”，大部分的人都覺得結果已定，例行賽勝率最高的勇士隊，畢竟技高一籌，奪冠合理。結果騎士隊只管為冠軍盃拼命，絲毫不理球場上所謂機率 5%，與沒希望的意思，其實差不了太遠。結果一場、兩場、三場，逆襲成功！騎士隊成為 NBA 冠軍爭霸賽，歷來第一支從 1 勝 3 負奮起，最後封王的球隊。NBA 區冠軍賽，及總冠軍賽，在同一球季內，各發生一次“不可能”

的事件，寧非咄咄怪事？球賽的預測，看起來更容易陰溝裡翻船。

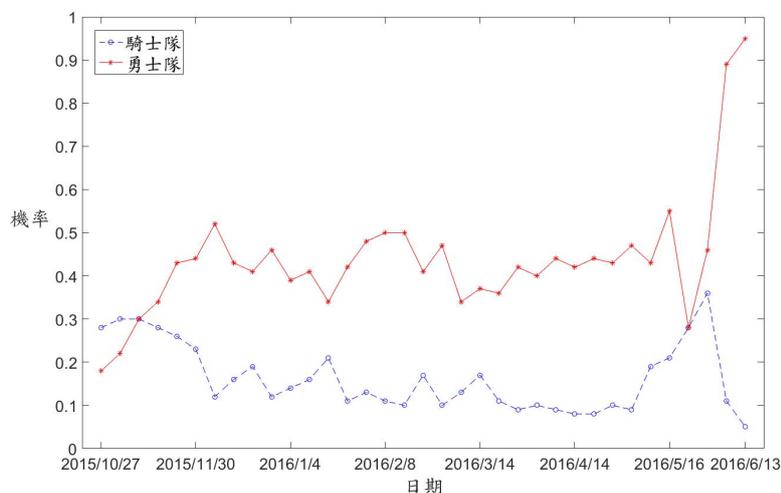


圖 1. 538 網站 2015-2016 NBA 勇士隊及騎士隊奪冠機率之預測

3 誤差的概念

A 君拿一銅板，宣稱為公正，有人問“你怎麼確定？”A 君說“那就來投擲看看。”於是持續投擲 100 次。若出現 50 次正面，50 次反面，你有何評論？嗯！還真的咧！銅板的公正性，實在無可挑剔，可能會這樣想。如果出現 52 正及 48 反呢？總會有波動，些微偏差很正常，沒理由認為銅板不公正。若出現 45 正及 55 反呢？有點偏頗，但還沒大到無法忍受的地步，不能就此斷言銅板不公正。若出現 58 正及 42 反呢？這屬於不算小的偏差，不像只是肇因於運氣不佳所致，銅板真的公正嗎？大約會興起懷疑了。那若出現 63 正及 37 反呢？此時對銅板為公正，可能便無法接受了。再考慮另一情境。如果 A 君得到 50 正及 50 反後，在眾人的驚嘆聲中，重來一回，仍得 50 正及 50 反，此時你會更加相信銅板為公正嗎？恐怕不會，反而將懷疑其中有詐，否則那有那麼巧？如果再一回，仍得 50 正及 50 反呢？連續 3 回了，此時很可能有不少人，將不相信 A 君沒有作假

了。

銅板投擲 100 次，假設各次投擲的結果相互獨立，則出現 50 正及 50 反的機率約為 0.0796，發生其實並非真那麼稀罕。至於連續 3 回，皆得 50 正及 50 反，機率約為 $0.0796^3 \approx 0.0005$ 。可以這麼說，巧歸巧，萬分之 5 的發生機率，卻並不小到可列為“不可能”的事件。只是看起來太巧合的事件發生，大部分的人，直覺反應常是怎麼可能？而不先算一下機率，因此才會經常認為看到“不可能”的事件。

小學生做數學計算題，常被要求再三驗算，務求不犯錯。若幾次所得答案均相同便放心了，因少會錯的那麼巧。對隨機現象思維則完全不一樣，人們了解變異難以避免。仍以投擲銅板為例。宣稱是公正的銅板，一擲之下，若所得正面數太吻合預期，或出現其他過度巧合的結果，會引起懷疑。與預期略有偏差，反而認為合理，而心安地接受“銅板為公正”的前提。當然偏差太大就不行，將不易相信“銅板為公正”了。

對一銅板，很多時候，並不知出現正面出現的機率 p 為何。如何估計 p ？一常見的作法是，持續投擲 n 次，假設各次投擲的結果相互獨立，則以所得正面數 X 的相對頻率 X/n ，來估計 p 。這種是所謂點估計 (point estimation)，因是以一個點 (值)，來估計一未知參數。點估計雖是一毫不含混的估計，只是每次所得的 X 不盡相同。更明確地說，當 n 固定時，隨機變數 X 有參數 n, p 之二項分佈 (binomial distribution)。既然會得到不同的 X ，便不會每個 X/n 都等於 p 。實務上，有時會讓人覺得這樣的估計準嗎？於是遂產生區間估計 (interval estimation)，即以一區間來估計一未知參數，並給出該參數落在此區間之機率。前述區間稱為信賴區間 (confidence interval)，伴隨的機率，則稱為信心水準 (confidence level)，或信賴係數 (confidence coefficient)。信心水準通常以百分比來表示。信心水準是否愈大愈好？愈大難道不表愈有信心？倒也不見得。信心水準愈大，區間將愈長，估計的明確性，便隨之而降，反而可能讓人對估計不太有信心了，並非一定較好。95% 是一常取的信心水準。

家屬想知道已病入膏肓的親人，還有多少來日？醫生答以 6 個月。結果可能才過了 2 個月又 10 天便去世了，家屬措手不及；但也可能家屬一

切準備妥當，卻過了 10 個月仍存活。因而會有家屬抱怨醫生信口開河，專業能力不足。若醫生答以病人尚可存活 1 個月至 11 個月，雖不像只給一個明確值 6 個月，有斬釘截鐵式的權威，卻會讓人覺得這樣的醫生更科學、更值得信賴，因而對他更有信心。但畢竟是隨機現象，說不準是常態，豈會必然就在 1 至 11 個月間死亡？除給一存活期的區間估計外，若醫生能附上病人存活期落在該區間之機率，則家屬對親人的來日究竟有多長，將有一更清晰的概念。

如前所述，對銅板出現正面之機率 p ， X/n 可當做一點估計。至於信賴區間，常取成一個以 X/n 為中心的區間，型式如 $[X/n - d, X/n + d]$ ，並附上對應的信心水準。信賴區間的半徑 d ，稱為估計誤差，或說抽樣誤差，或就簡稱誤差。誤差 d 當然愈小愈佳，若過大，往往會被認為此估計太粗糙。欲得較小的 d ，除了以較好的估計法外，通常得仰賴較大的樣本數 n 。另外，有時是倒過來，先給信心水準，及估計誤差 d ，然後求所需的樣本數 n 。信心水準、樣本數 n 及誤差 d ，此三者通常給出其中兩個，另一便能求出（有時是得到近似值）。 X 有二項分佈，由於一方面參數 n, p 中的 p 未知，另一方面，二項分佈之機率值，為一串有階乘數（即符號!）的數字之和，不太好計算，所以 d 並無法有效地求出。幸好 n 較大時， X/n 經標準化（即減去期望值後，除以標準差）後，其分佈可以常態分佈（normal distribution）來近似，因而求出近似的 d 。這背後的理論基礎是中央極限定理（Central limit theorem），或者利用中央極限定理初期的版本，即二項分佈的常態分佈近似。

在此，對信心水準的涵義略說明如下。就以估計銅板出現正面之機率 p 為例。假設有 k 個人，對同一銅板，分別投擲 n 次。由於每人所得之 X/n 可能不同，因此各人所得之 95% 信賴區間，也就可能不同。那 k 個信賴區間，有些包含（實際的） p ，有些則不包含。但只要 k 夠大，其中便大約有 95% 比例的信賴區間包含 p 。

不要覺得中央極限定理很難，此定理早已堂而皇之地出現在高中數學裡。當年在訂定 95 課綱時，課綱委員會決定在高中數學中，放些統計題材。有什麼適合讓高中生學的呢？總是要有用且不太難的。媒體上不時

刊登有關各種民調的報導，結尾皆有如下說明：

此次民調由 xxx 民意調查中心舉辦，在 x 月 x 日辯論會後進行，以電話方式隨機訪問 903 位成年民眾，另有 150 人拒絕訪問。在百分之 95 的信心水準下，抽樣誤差在正負 3.3 個百分點之內。調查是以台閩地區住宅電話為母體作尾數兩位隨機抽樣，結果依台閩地區 20 歲以上人口之性別、年齡及設籍縣市結構進行加權，調查經費來自 xxx。

“抽樣誤差在正負 3.3% 內”，3.3% 便是之前的誤差 d ，在民調裡常以百分比表之。想了解某地區民眾，對某議題之支持率，經由抽樣調查後，得到對該議題之支持率，再算出抽樣誤差 d ，便得到支持率估計的信賴區間。可能是由於有關民調的報導經常可見，若干課綱委員，因而認為信賴區間，應是一基本的統計知識。於是自民國 95 年起，信賴區間進入高中數學。而為了近似，中央極限定理也跟著被引進高中數學。

執行民調時，信心水準通常取成 95%，抽樣誤差則預定為 3%，由此換算出所需成功訪問的樣本數 n 約為 1,068。實際調查結束，經篩選後，有效樣本數 n 不一定能剛好是 1,068。由所得到的 n ，以下式換算出近似的抽樣誤差

$$(1) \quad d \approx \frac{0.98}{\sqrt{n}}。$$

若 n 大於 1,068，則抽樣誤差便小於 3%，否則大於 3%。以前述所引報導裡的 $n = 903$ 為例，代入 (1) 式，得抽樣誤差 $d = 0.98/\sqrt{903} \approx 0.0326 \approx 3.3\%$ ，報導中的 3.3% 就是這樣來的。

之前所提的以隨機取球，來估計袋中紅球所佔比例，跟以投擲銅板，來估計正面出現的機率，二者間乃有一很大的不同。投擲銅板，可假設各次投擲的結果為相互獨立。除非有人蓄意作假，否則這假設是合理的。而在獨立的假設下，也就有投擲 n 次後，所得正面數有二項分佈。但自袋中隨機取球，且取出後不放回，各次取球的結果，便不獨立，因此取 n 次後，

其中所得之紅球數，並沒有二項分佈，而有超幾何分佈 (hypergeometric distribution)，這時中央極限定理，其實是不適用的。

民調的抽取樣本，一般類如前述取球的方式。即隨機取樣，且取出後不放回 (稱做簡單隨機抽樣 (simple random sampling))，因此各次取樣並不獨立。於是涉及的分佈，為超幾何分佈，而非二項分佈。那為什麼民調抽樣時，不採取出後放回？因要讓人願意受訪都不容易了，總不能已完成訪問，稍後卻告訴他，你又被抽中了，要再訪問你一遍。所以原本中央極限定理，並不適用在民調裡的近似。但若抽取的樣本數 (通常幾千)，比起地區的人口數 (假設至少有幾十萬) 少很多，則將取出後不放回，視為取出後放回，便說得過去，就當做是近似。如此便能藉助中央極限定理來近似，計算上將方便許多。這樣的便宜行事，當然產生誤差了。但在所有的誤差裡，此誤差其實算不了什麼。

銅板或球，那一面或什麼顏色，皆可相當清楚地辨別。而且不論銅板或球，都能無怨無悔地被投擲或抽取。但每個人是一單獨的個體，不同的人想法不同，人並無法如球一般，除顏色外沒有區別。人會拒訪、不在家、沒有電話、會改變看法、不誠實回答，且不一定去投票。拒訪或聯絡不上的族群，與成功受訪者之意見，差異有可能很大。樣本中若沒有這些人，將是偏差的。另外，從問卷設計、調查流程，至結果分析，都可能不夠客觀。之前所引那段有關民調的報導裡，分析後還進行加權。加權乃為減小抽樣偏差，只是若操作不當，調查結果將可能受到扭曲，須相當謹慎才行。這些林林總總，有意無意下產生的誤差，有時遠大於取樣不放回，所造成的超幾何分佈，而非二項分佈之誤差。

媒體公佈的候選人之民調，有時會說兩候選人支持率的差異在誤差範圍內，這是什麼意思？假設有兩候選人 C 與 D，民調後得 C 之支持率為 38.73%，D 之支持率為 43.72%，且抽樣誤差在正負 3.26% 內。雖 D 之支持率比 C 之支持率高出 4.99%，看起來不小，但因小於抽樣誤差 3.26% 的 2 倍，遂說差異在誤差範圍內。又此時對 C 與 D 支持率估計的信賴區間，分別為 [35.47, 41.99] 與 [40.46, 46.98]。兩區間有重疊，顯示所估計 D 之支持率，並不太有把握會高過 C。差異在誤差範圍內，表就算支持率領先，

但高出不算太大，翻盤機會不容忽視，雙方都須再加把勁。

有人或許好奇，抽樣誤差何以不設定成較小的值，例如 1%，讓民調的結果更精準些？由 (1) 式，抽樣誤差若要由 3% 降為 1%，樣本數須增至 9 倍。樣本數 9 倍，在短時間內，要完成調查，難度將增大許多。另一方面，由於要完成的樣本數大幅增加，在時間壓力下，說不定另產生誤差，反而得不償失。更何況我們已指出，在整個調查過程中，無法避免的各種誤差極多，且還數度用到近似，估計要真的夠準確，幾乎是一不可能的任務。信心水準真的是 95% 嗎？誤差真的是 3.3%？一點都不能去深究。民調可說是在不擬寄託在怪力亂神下，要對未來預測之一方式，乃沒有辦法中的辦法，但準確性應仍勝過占卜。民調的結果，不過是供參考而已，讓人們對民意走向，能略有些概念，並不企圖扮演鐵口直斷的角色。若過度追求較小的抽樣誤差，將有如明察秋毫之末，而不見輿薪。

最後，尚要指出一點，萬不可以為能帶著 (1) 式走遍天下。(1) 式是基於中央極限定理，為大樣本下的結果。沒錯，一般教科書的確指出，在若干條件下，“通常”樣本數 n 並不必太大，就可利用中央極限定理來求近似。雖是這麼講，但一方面， n 當然還是較大些為宜，否則誤差便可能過大；另一方面，有所謂“稀有事件法則”，即在某些情況下，就算 n 已很大，但二項分佈仍不適合以常態分佈來近似。無論如何，有關極限的定理，應用時務必要很謹慎。尤其在執行民調的過程中，已多次採用近似，隱藏的誤差絕不會小了，更不宜毫無節制，不把關樣本數的下限。曾見到執行某政府部會所委託，一大規模對全國某族群人口及語言之調查計畫的期中報告，總樣本數有幾千，並不算少，但分到各鄉鎮，就沒有太多了。該調查報告中，對一樣本數才 2 的小鄉，仍套用 (1) 式，而給出該鄉的抽樣誤差

$$d \approx \frac{0.98}{\sqrt{2}} \approx 69.30\%。$$

不要說 $n = 2$ 怎可用 (1) 式，誤差這麼大的估計，豈有多少價值？執行計畫者，可說對近似掉以輕心，對誤差也沒什麼概念。誤差概念不佳，即使樣本再多，得到的估計，其誤差恐將比所宣稱的誤差大許多。

4 美國總統大選

美國總統大選乃採間接選舉，選民投票，其實是在選選舉人，再由選舉人依選民意志，投票選出總統及副總統。世界首屈一指的民主國家，總統的產生，卻採這種迂迴的方式，恐怕是舉世無雙。

美國首任總統華盛頓 (George Washington, 1732–1799)，於 1789 年 4 月 30 日就職。自華盛頓後，至 1933 年，新上任的總統，均為 3 月 4 日就職。其後改為 1 月 20 日就職，並延續至今。自 1792 年起，每屆總統大選的年份，都為 4 的倍數。又自 1845 年起，將總統大選的投票日，訂為 11 月第 1 週之後的第 1 個星期二 (注意，不見得是第 2 個星期二)。美國總統原本並無任期限制，帶領美國成功打贏獨立戰爭的華盛頓，認為沒有不可取代的人，當了兩任，便不再續任，回復平民身分。他向人民解釋，“你們再繼續選我當總統，美國便沒有真正的民主制度了。”自此美國總統最多兩任，便一直是個不成文的規定。

歷史不長的美國，其實相當注重傳統。就以總統大選為例。選舉人制度的產生，固然有其時代背景，一個原因是，制定典章制度的眾開國先賢，鑑於當時除少數知識分子外，一般人對政府的運作，並不太了解，因此讓社會賢達或精英，代表人民投票選總統，應是一較好的方式。時至今日，民智早已大開，資訊流通又那麼便捷，選舉人投票也大抵須聽命行事，這套徒具形式的間接選舉機制，卻仍然維持。再看投票日的由來。19 世紀時，美國仍屬農業社會。進入 11 月，秋收大致結束，且不便旅行的冰雪季節尚未開始，對投票算是方便的時間。又因許多農村住家很偏遠，故投票日選星期二而不是星期一，以讓基督徒選民，參加完星期天教會的禮拜後，再從容上路，前往投票站。那為什麼不挑 11 月的第 1 週？因 11 月 1 日為萬聖節 (All Saints Day)，教會有活動，於是第 1 週得避開。諸如選舉年、投票日及就職日等細節，雖曾變動過，但以兩百多年而言，變動算是極少。而 4 年一任，可從未修訂過。如果想知道，從華盛頓算起，川普將是第幾屆的美國總統，只要先求出 $2017 - 1789 = 228$ ，再將 228 除以 4，得 57，最後 $57 + 1 = 58$ ，很快便得出川普將是第 58 屆總統。反觀中華民

國，建國才 1 百多年，即使花些功夫，可能都不易算出目前的總統是第幾屆？

華盛頓之後的美國總統，大都遵守任期只限兩任的傳統。但畢竟無明文規定，遂有企圖打破傳統者。在 1869 至 1877 年間，擔任過兩任總統的格蘭特 (Ulysses S. Grant, 1822–1885)，及在 1901 至 1909 年間，已擔任兩任總統的西奧多羅斯福 (Theodore Roosevelt, 1858–1919，又稱老羅斯福)，都曾嘗試取得第 3 任與前次不連續的任期 (不知他們是否以為，這樣便符合最多兩任的不成文規定了)，卻也都未能成功。

格蘭特在卸任後，1880 年參與隔一屆，共和黨的總統初選落敗。另外，1901 年，麥金萊 (William McKinley, 1843–1901) 開始他的第 2 任總統任期，不料在當年 9 月 14 日，被刺殺身亡，由副總統老羅斯福繼任總統。之後老羅斯福贏得 1904 年的總統大選，至 1909 年 3 月 4 日，共當了 7 年 6 個多月的總統。卸任後，1911 年，老羅斯福宣布角逐下一屆共和黨的總統候選人。由於黨內有雜音，老羅斯福毅然決然地離開共和黨，另行組黨參選，不拖泥帶水，算是個豪傑。1912 年的總統大選，老羅斯福的得票率 27%，超過共和黨提名的現任總統塔虎脫 (William Howard Taft, 1857–1930)，他僅得 23% 的票，但敗給民主黨的候選人威爾遜 (Thomas Woodrow Wilson, 1856–1924)，他的得票率有 42%。

在美國歷史上，老羅斯福是一位風評不錯的總統。歷來學者於評論美國總統時，老羅斯福常排在前 5、6 名，他被認為是美國最偉大的總統之一。美國旅遊勝地，南達科他 (South Dakota) 州的羅斯摩爾山 (Mount Rushmor, 又稱總統山)，有 4 個總統雕像，老羅斯福是其中之一，且是唯一一位 20 世紀的美國總統。與華盛頓、傑佛遜 (Thomas Jefferson, 1743–1826, 1801 至 1809 年，擔任兩任總統)，及和林肯 (Abraham Lincoln, 1809–1865, 1861 至 1865 年，擔任總統，1865 年 4 月 15 日，第 2 任就職 1 個多月後，遇刺身亡) 的雕像比鄰，千秋萬世，供每年數百萬慕名而來的遊客瞻仰。但美國人民，即使肯定其政績，卻仍不願拋棄傳統，滿足老羅斯福當 3 任總統的願望。

不過美國確實有任期超過兩任的總統。老羅斯福有位遠房堂弟，兩人

不同政黨，民主黨的富蘭克林羅斯福 (Franklin Delano Roosevelt, 又稱小羅斯福, 1882–1945), 是美國唯一連續選上 4 任的總統。所謂老羅斯福及小羅斯福, 是中文裡為了區隔的稱呼。在第 2 任的後期, 於民主黨的全國代表大會, 小羅斯福用了一些手腕, 讓大會以壓倒性多數通過, 提名他競選第 3 任總統。1940 年的總統大選, 他得了 55% 的普選票, 在 48 州中, 贏了 38 州。怎麼少了兩州? 那時遙遠的阿拉斯加 (Alaska) 及夏威夷 (Hawaii), 要至 1959 年, 才先後成為美國的第 49 及第 50 州。還沒結束, 之後小羅斯福又踏上第 4 任的競選之途。1944 年的總統大選, 他得了 53% 的普選票, 且贏了 36 州。這不是沒完沒了了?

無人能贏過上帝, 到此為止了。小羅斯福自 1921 年 8 月起, 腰部以下便永久性癱瘓。而自 1940 後, 他的健康狀況逐漸下滑。終於在第 4 任就職後不久, 4 月 12 日那天過世了。從 1933 年 3 月 4 日, 至 1945 年 4 月 12 日, 小羅斯福共當 12 年又 1 個多月的總統。這是空前絕後, 因熱愛傳統的美國人, 受不了傳統被打破。從 1951 年開始生效的美國憲法增修條文第二十二條, 明定“任何人被選為總統者, 不得超過兩任。任何人繼任為總統或代行總統之職權者, 其期間如超過 1 任中兩年以上, 任滿後僅能獲選連任 1 次。”小羅斯福在任內去世, 由副總統杜魯門 (Harry S. Truman, 1884–1972) 繼任。1948 年, 杜魯門競選連任成功。因第 1 任當了 3 年多, 依新規定, 他不能再競選總統, 因此杜魯門的總統任期, 雖少於 8 年, 但至 1953 年 1 月 20 日, 便完全結束了。

兩百多年間, 有關美國總統, 曾發生一些較特別的事。像是克里夫蘭 (Stephen Grover Cleveland, 1837–1908) 是第 25 及第 27 屆美國總統, 是美國歷史上唯一一位兩度當選, 且任期不連續的總統。此事還被寫進西蒙斯 (Dan Simmons, 1948–) 著的小說“福爾摩斯與第五心”(The Fifth Heart, 2015, 中文版翻譯者為左惟真) 中。克里夫蘭連續 3 次在美國總統大選中, 獲得最多數的普選票, 分別是 1884、1888 及 1892 年, 但只有第 1 及第 3 次當選。他的任期是 1885–1889, 及 1893–1897 年。

底下來說明美國獨特的選舉人制度。

首先, 選舉人團, 乃選舉人 (目前有 538 位) 的總稱, 並不是一個機構,

且是每次總統大選投票後才組成。成員不見得固定，也從來不會全體聚在一起開會。他們唯一的任務，就是投票選總統及副總統。總統候選人，必須拿到過半數，即 270 張的選舉人票才能勝選。538 這個數字又是怎麼來的？

美國國會有參議院 (United States Senate)，及眾議院 (United States House of Representatives) 兩院。美國有 50 州，每州的選舉人票，為參議員 (senator) 數及眾議員 (Congressman) 數之和。參議員共 100 名，不分大小州，每州 2 名。眾議員共 435 名，各州按人口比例分配，但每州至少有 1 名。所以選舉人票，每州最少有 3 張。50 州共有 535(= 100 + 435) 張的選舉人票。另外，1961 年，美國憲法第二十三條增修條文通過，自此，首都華盛頓哥倫比亞特區 (Washington, D.C., 常簡稱哥倫比亞特區、華盛頓、特區，或 D.C.。又 D.C. 則是 District of Columbia 之縮寫)，便有 3 張選舉人票。而選舉人票也就達到 538 張。在 1961 年前，哥倫比亞特區的公民，並無總統選舉權，美國居然會有這種事，相當特別。原本專為預測總統大選而成立的 538 網站，其中的 538，就是源自 538 張選舉人票。

美國人口普查局 (United States Census Bureau)，每 10 年進行一次人口普查，最近的一次是在 2010 年執行。各州人口的消長，將影響該州在全國的政治地位。人口在全國中，所佔比例增加者，眾議員數及選舉人票數，便有可能增加，反之則可能減少。2016 年的總統大選，選舉人票最多的是加利福尼亞 (California) 州 (簡稱加州)，有 55 票。其次是德克薩斯 (Texas) 州 (簡稱德州)，有 38 票，再來是佛羅里達 (Florida) 及紐約 (New York) 州，各有 29 票。至於阿拉斯加、德拉瓦 (Delaware)、蒙大拿 (Montana)、北達科他 (North Dakota)、南達科他、佛蒙特 (Vermont) 及懷俄明 (Wyoming) 等 7 個人煙稀少的州，以及哥倫比亞特區，均只有 3 票。哥倫比亞特區不是州，在國會裡沒有參議員與眾議員。在美國憲法增修條文第二十三條裡，明定哥倫比亞特區的“選舉人名額，相當於 1 州得選出國會議員與眾議員之總數，但不得超出口最少之州所選出之名額。”由於哥倫比亞特區的人口，目前僅 60 餘萬，而人口超過 100 萬的

蒙大拿州，也只有 3 張選舉人票，所以在可預見的將來，哥倫比亞特區的 3 票不會增加，因而全美共 538 票，應會維持相當長久。

美國總統大選，除有兩州例外，其餘 48 州及哥倫比亞特區，均採“贏者全拿”(Winner-takes-all) 的制度。例外的是緬因 (Maine) 州及內布拉斯加 (Nebraska) 州。所謂贏者全拿，就是若有候選人，在某州拿到最高票，則該州的所有選舉人票，便都歸他。至於緬因州 (有 4 票) 及內布拉斯加州 (有 5 票)，兩州制度類似，總統大選，在州內每個眾議員選區 (兩州分別有 2 區及 3 區) 的獲勝者，各得 1 張選舉人票，而在全州獲勝者，獨得其餘 2 張選舉人票。所以比較寬鬆地講，美國總統大選，各州 (區) 都採贏者全拿的制度，只是緬因州及內布拉斯加州的方式，做了些調整。

獲得半數以上選舉人票的總統候選人，便能登上總統寶座。如果所有候選人，都未能獲得半數以上的選舉人票，則依 1804 年通過的美國憲法增修條文第十二條，由眾議院來決定。眾議院從得票較多之前 3 名中，投票選出總統。且由各州投票，每州代表合投 1 票。但這種須由眾議院決定的情況極少發生，自上述增修條文通過後的 54 屆總統大選，僅發生過 1 次。1824 年的選舉，主要候選人有 4 位。那時選舉人票共 261 張，亞當斯 (John Quincy Adams, 1767–1848, 他的父親是美國第 3 屆 (1797–1801) 總統) 得 84 票，排名第 2，最高票有 99。最後由眾議院選出他為第 10 屆總統 (1825–1829)。

選舉人是由各黨派在各州及哥倫比亞特區推出。11 月總統大選後，於 12 月的第 3 個星期一 (2016 年是 12 月 19 日)，各州的選舉人，分別在各州首府集會並投票，選出下屆總統及副總統。雖美國憲法並未規定，選舉人必須依所屬州 (區) 的民意投票，但有些州政府或政黨，會要求選舉人在投票前宣誓，須將票投給在本州 (區) 普選中獲勝的候選人。緬因州及內布拉斯加州，也有對應的作法。攸關誠信，絕大多數的選舉人都會遵守承諾。但包括 2016 年在內，偶有選舉人投給他不該投的總統候選人，這種稱之為失信選舉人 (faithless elector)。即使如此，至今不曾有因而改變總統大選的結果者。

由於採贏者全拿的制度，普選 (popular vote) 得票較多者，未必能

當選總統。例如，有些州大輸，但有些州小贏，是可能造成普選票落後，但選舉人票卻較高。這種讓落敗者難以服氣的情況，歷史上曾發生過 5 次。除前述 1824 年第 10 屆的亞當斯外，尚有 1876 年第 23 屆的海斯 (Rutherford Birchard Hayes, 1822–1893)、1888 年第 26 屆的哈里森 (Benjamin Harrison, 1833–1901, 就是他打敗前面提過的克里夫蘭)、2000 年第 54 屆的布希 (George W. Bush, 1946–)，及 2016 年第 58 屆的川普。其中除亞當斯為民主黨外，其餘 4 位皆為共和黨籍。來看海斯。他輸了普選，但選舉人票以 185 比 184，驚險地贏了 1 票。公平嗎？人民真的選他嗎？遊戲規則就是這樣訂的，每位候選人參選前皆了解，沒得抱怨。

這套針對 18 世紀，當時只有 13 個州的美國，所設計之選舉團制度，仍然適應 21 世紀嗎？社會變遷快速，古老的選舉方式，能一直不改嗎？歷來屢有人提議修訂，我們不知未來會如何，但看來在 2020 年的總統大選，仍將是這種方式。

5 2016 年的美國總統大選

2016 年 11 月 29 日，中國時時報有一則標題為“密西根州完成美總統大選計票川普險勝”之報導：

美國密西根州今天宣布，…，在總統大選結束 3 週後，密西根州 16 張選舉人票確定由川普拿下。法新社報導，…，密西根州計票委員會驗證，川普領先柯林頓 1 萬 704 張票。川普贏得北部密西根州，讓共和黨籍川普的選舉人票來到 306 張，勝過柯林頓的 232 張。密西根州是最後一個確認總統選舉結果的州。…。

11 月 8 日美國舉行總統大選投票，結束後隨即開票。隔天，11 月 9 日，柯林頓承認敗選。全世界早就認定川普將是美國下任總統，怎麼隔了 3 星期，密西根 (Michigan) 州，才姍姍來遲地宣佈川普贏得該州的選舉人票？

無獨有偶，剛開完票，11月11日所公佈的柯林頓普選得票總數為59,689,819票，比川普的59,489,637票，多了約20萬票。票數多卻落選？全民的選擇輸給制度！柯林頓的支持者很不滿，掀起呼籲改革選制的聲浪。豈料之後每隔幾天，便有柯林頓領先票數，又再增加之報導。如12月11日，距投票日已過了1個多月，聯合報有標題“希拉蕊·柯林頓普選票比川普多280萬張”的一則報導：

美國網路媒體 Quartz 報導，根據美國總統大選最新的計票結果，美國民主黨總統參選人柯林頓拿下的大選普選票，比當選人川普多出大約280萬張，總得票數與美國總統歐巴馬4年前順利連任的得票數相當。此次大選的投票率略超過59%，高於4年前的58%。……

依 Wikipedia 網站上所公佈，至2016年12月20日，普選柯林頓得了65,844,610票，比川普的62,979,636票，多出286萬票以上。而有效票將近1.37億，兩人的得票率分別約為48.06%，及45.97%。不論票數及得票率，差異都不算小，但當選人是川普。更令人訝異的是，經過1個多月，兩位候選人的得票總數，比起先所公佈的總數，多了964萬以上的票（且仍持續增加）。這964萬票，是那裡冒出來的？何以密西根州票數的計算，要隔如此久才能確定？而計票真的都沒問題了嗎？

台灣公職人員選舉的投票流程，為了防弊，可說相當一板一眼。具投票資格的選民，於選舉日的投票時間，至指定地點，驗明正身後，將選票投入票箱。在外地工作或就學的，除非花錢花時間回戶籍所在地，否則只能放棄投票權。美國就彈性多了，他們有“不在籍投票”(absentee voting)制度。因生病、旅行、出差、服役、旅居海外，凡無法(或不想)於選舉日去投票所投票者，都可事先申請不在籍投票。德州還讓太空人投票。怎麼投？從太空站上寄送電子郵件。有幾個州甚至只採不在籍方式投票，並不設立實體投票所。總統大選投票日在11月，但不在籍投票，可能從9月或10月便開始了，屬於提前投票(Early voting)。2016年的美國總統大選，估計有超過5千萬，即約4成的投票人，選擇提前投票。

不限紙張選票，觸控式投票、語音投票、槓桿投票機、機器掃描選票，美國有各式各樣的投票工具，每個地方的投票裝置也不太一樣，有些州還提供不同語言的選票。各州對不在籍投票的規定不盡相同。有些州允許已提前投票的選民，若心意有變，能更改選擇，且可多達 3 次。不在籍投票，可透過郵寄、電子郵件、傳真，或到指定地點投票。沒有簽名的郵寄選票，不會被計入，但若及早發現，尚可補救。這些令人眼花撩亂的投票方式，的確讓選民方便許多，且能提高投票意願，卻也增加計票的複雜度。而對有效票的認定，也時有爭議。

當把選票投進具有光學掃瞄功能的投票機中，機器會自動判讀票上的畫記。若投票機讀到無效標記，會退出選票，此時可要求換一張新的選票卡。這過程中會有弊病嗎？而投票的管道那麼多，所有票都已拿出來計數了嗎？真的都沒漏掉？仰賴電子郵件及電子投票器，會有駭客 (hacker) 入侵嗎？票數會被竄改嗎？要知差異較大時還無所謂，因採贏者全拿制，些微的誤差，並不至於影響結果。但當票數很接近時，便得反覆確認是否精準計算。否則贏者全拿，一來一回，選舉人票將會差不少。這可能是密西根州要花那麼久，才能“確認”選舉結果的主要原因。而美國幅員廣大，各州開完票後，陸續“發現”一些選票，長期以來，相信常是如此，只好見怪不怪。數到後來能夠確定的，應是誤差對結果會有影響的機率已經極小。至於票數，恐怕永遠無法能肯定已完全正確。

還記得 2000 年美國總統大選的爭議嗎？那次主要的候選人是共和黨的布希，及民主黨的高爾 (Albert A. Gore, Jr., 1948-)，雙方在佛羅里達 (Florida) 州的得票數極接近，也都勢在必得。因若沒有佛羅里達州的選舉人票，兩人都未達 270 票。反覆點算普選票，先後經機器及人工計票，皆無法令人滿意。有效票、無效票的確認，也一直搞不定。最後只好由美國最高法院 (Supreme Court of the United States) 判決，加上高爾讓步，長達 36 天的爭議，才終告結束。普選落後，且計入佛羅里達州後，選舉人票才 271 票的布希，幸運當選總統。

由於不在籍投票制，當候選人仍馬不停蹄地四處競選，卻有不小比例的選民，已投完票作壁上觀了。據估計，提前投票者，支持民主黨的比例

較支持共和黨的高。提前投票究竟對那一黨有利？散在世界各地的美國公民（不包括軍人），總數超過 800 萬，美國約有 40 個州的人口還沒這麼多呢！他們的政黨傾向及投票行為，與國內選民，是否相差很大？選情變化萬千，國外選民，都能有效掌握訊息嗎？美國國土橫跨 6 個時區，各地投票時間也不一致，當有些地區已開完票，尚在投票的地區，會受到影響嗎？這些因素，再加上贏者全拿制，使美國總統大選的估計，難度不小。

想當總統的人一向不少，尤其在世界第一強國。美國除民主黨及共和黨兩個主要的政黨外，2016 年的總統大選，候選人有幾十位，其中大部分出來選，只是聊以自娛。用現在的流行用語講，只是為了“刷存在感”。在全美獲 10 萬以上的普選票，且至少在某 1 州的得票率有 1% 以上，連達到這麼低標準的候選人都不多。除兩大黨外，尚有自由意志黨 (Libertarian Party) 的強生 (Gary Johnson, 1953-)、綠黨 (Green Party) 的史坦 (Jill Stein, 1950-)、獨立參選人麥克馬林 (Evan McMullin, 1976-)，及憲法黨 (Constitution Party) 的卡斯特 (Darrell Castle, 1948-)。這 4 位還算受到矚目的總統候選人，他們全美普選得票率，分別是 3.28%、1.06%、0.52%，及 0.15%。至於其他眾多的候選人，普選得票率的總和，尚不到 1%。雖然兩大黨以外的總統候選人，共得到將近 6% 的普選票，但他們連 1 張選舉人票都分不到。這是贏者全拿下的結果。

“時代”(Time) 雜誌每年底都會選出年度風雲人物 (Person of the Year)。毫無意外，2016 年選出的是川普。自 2013 年起，便擔任“時代”雜誌主編 (Managing editor) 的吉布斯 (Nancy Reid Gibbs, 1960-) 說：

我們何時見過一個人，公然違抗所有期望、打破規範、違反準則，在百分之 1 的獲勝機率下，卻贏得選舉。在那過程中，他不只擊敗 1 個，而是 2 個政黨。(When have we ever seen a single individual who has so defied expectations, broken the rules, violated norms, beaten not one but two political parties on the way to winning an election that he entered with 100-to-1 odds against him?)

2016 年 12 月 19 日出版的那期“時代”雜誌，以川普為封面，在他名字下印著“President of the Divided States of America”(美利堅分裂國總統)。大家知道，美國正式國名是 United States of America(美利堅合眾國)。川普則說，“我還不是總統，我沒做任何引發分裂的事。”又說“不是我分裂他們，是他們現在已經分裂了”，還強調“我們會讓國家團結起來”。川普在總統大選的競選期間，一再打破政治慣例，很多主流媒體都不喜歡他。即使他當選了，即使他被選為年度風雲人物，“時代”雜誌對他仍沒什麼好評。只是川普的獲勝機率，真如吉布斯所說，只有百分之 1 嗎？如果連高度掌握資訊的“時代”雜誌，直到選後 1 個多月，都仍以為川普當選的機率那麼低，一般人在選前，自然更不會認為川普有任何獲勝的可能。見到柯林頓有一堆名人加持，演員、歌手、球員，聲勢浩大，一股又一股的暖流，而川普經常被媒體圍剿，顯得一無是處，會讓人以為高下立判，柯林頓即將入主白宮。漠視統計，或者說不去了解數據在說些什麼，則選後覺得統計騙人，其實是被自己騙。

6 統計可信

538 網站，在 2016 年的美國總統大選前，持續發表預測。表 1 至表 5，給出若干該網站最後的預測值。有些我們也附上實際值，以供比較。

為讓大家對獲勝及當選機率，能有所了解，先舉一簡單的例子。假設美國只有 3 州，以 A、B，及 C 稱之，各有 10、15，及 20 張選舉人票，共 45 張。又假設 3 州皆採贏者全拿制。則任一位總統候選人，要拿到過半數，即至少 23 張的選舉人票，或者說要至少贏 2 州，才能勝選。某次總統大選，有 M 及 N 兩位主要的候選人。假設 M 在 3 州的獲勝機率分別為 0.5、0.7，及 0.8；N 在 3 州的獲勝機率分別為 0.5、0.3 及 0.2。顯然 M 很佔優勢。至少贏 2 州，表要當選有 4 種可能：

(A 州勝, B 州勝, C 州勝), (A 州勝, B 州勝, C 州敗),
(A 州勝, B 州敗, C 州勝), (A 州敗, B 州勝, C 州勝)。

又假設各州的投票結果相互獨立。由此得

$$\begin{aligned} P(\text{M 當選總統}) &= 0.5 \cdot 0.7 \cdot 0.8 + 0.5 \cdot 0.7 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot 0.3 \cdot 0.8 + 0.5 \cdot 0.7 \cdot 0.8 \\ &= 0.28 + 0.07 + 0.12 + 0.28 = 0.75; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{N 當選總統}) &= 0.5 \cdot 0.3 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot 0.3 \cdot 0.8 + 0.5 \cdot 0.7 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot 0.3 \cdot 0.2 \\ &= 0.03 + 0.12 + 0.07 + 0.03 = 0.25。 \end{aligned}$$

再來求 M, N 兩人, 各能獲得選舉人票之期望值。

$$\begin{aligned} E(\text{M 獲得之選舉人票}) &= 0.28 \cdot 45 + 0.07 \cdot 25 + 0.12 \cdot 30 + 0.28 \cdot 35 + 0.12 \cdot 20 + 0.07 \cdot 15 \\ &\quad + 0.03 \cdot 10 \\ &= 12.6 + 1.75 + 3.6 + 9.8 + 2.4 + 1.05 + 0.3 = 31.5; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(\text{N 獲得之選舉人票}) &= 0.03 \cdot 45 + 0.12 \cdot 25 + 0.07 \cdot 30 + 0.03 \cdot 35 + 0.07 \cdot 20 + 0.12 \cdot 15 \\ &\quad + 0.28 \cdot 10 \\ &= 1.35 + 3 + 2.1 + 1.05 + 1.4 + 1.8 + 2.8 = 13.5。 \end{aligned}$$

B 州及 C 州, 0.3 與 0.2 的劣勢機率, 加上 A 州 N 也只剩一半的機會, 使不少人以為, N 很難贏了。另一方面, 預期能獲得的選舉人票, N 只有 13.5 張, 比當選所需的 23 張, 差了 9.5 張之多。更讓人覺得 N 的機會渺茫, M 可躺著選了。

期望值其實並非一很恰當的名詞。“期望”也者, 難免讓人誤以為那是較該得到的值。或者得到的值, 應在期望值附近。投擲一公正的骰子, 點數出現的期望值為 3.5, 但無論怎麼投, 也絕不會出現 3.5。買樂透彩, 期望所得是很小, 但若中頭獎, 將有高額獎金, 實際所得, 可以遠大於期望值。因此不要被 13.5 所迷惑, N 並非只能得到 13.5 張左右的選舉人

票。另外，N 有 0.25 的機率選上總統。而機率 0.25 的事件，並無不可能發生的涵義。看到氣象局預測降雨機率為 0.25，你判斷不會下雨，遂不帶傘，結果淋了一身雨。懊惱歸懊惱，能因此就指責氣象局的預測很離譜嗎？氣象局何曾說過降雨機率 0.25 表不下雨？要知這樣的降雨機率，平均每 4 天，就會有 1 天下雨。

現在來看 538 網站對當選機率之預測。由表 3 知，柯林頓是 0.714，川普則有 0.286。川普雖未被看好，當選機率卻並未小到去勢已去的地步。結果川普贏了，不過就是一正常隨機現象下的結果，能因此怪統計騙人嗎？能因此哀嘆數據已死嗎？

再以另一方式，來看獲勝機率。再度，先考慮一簡單的例子。假設 A 君持一正面出現機率為 0.88 的銅板。投擲 56 次（並不必要假設各次的結果為獨立）。雖正面比反面，更容易出現許多，但會預期 56 次皆得正面嗎？顯然不至於這麼沒概念。由於投擲一正面出現機率為 p 的銅板 1 次，正面出現數之期望值為 p ，所以投擲出現正面機率為 0.88 的銅板 56 次，共出現正面數的期望值為 $56 \cdot 0.88 = 49.28$ 。即預期出現 49 個左右的正面，而不是正面出現愈多，才愈相信統計可靠。若真的出現 56 個正面，反該懷疑那 0.88 的機率有問題。當然各位大約也了解，正面出現的次數，若為 47, 48, 50, 51 等，即在 49 附近，亦都相當合理。

其次考慮較一般的情況。假設有 56 個銅板，正面出現的機率不盡相同。今各投擲 1 次（仍不必假設各次的結果獨立），由於期望值有線性性質，因此將各銅板正面出現的機率相加，便是共得的正面數之期望值。

50 個州、哥倫比亞特區、緬因州 2 個選區，及內布拉斯加 3 個選區，美國總統大選時，可視為共有 56 個採贏者全拿的州（區）。欲估計總統候選人所得的選舉人票，便要對 56 個州（區），皆估計獲勝機率。表 4 為 538 網站的預測。雖候選人有多組，但因採贏者全拿，使得只有柯林頓與川普兩位遙遙領先者，才有當選的可能。我們想回答一個令人感興趣的問題。州（區）預測獲勝機率較大的候選人，也的確在該州（區）贏，這種“吻合”的州（區）數之期望值為何？此本質上正是前述投擲銅板的問題。對 56 個州（區），將預測獲勝機率較大的那位候選人（柯林頓或川普），視為銅

板正面。要知所謂正面反面，不過有如名字，不同的銅板，指定那一面為正並無妨。如此一來，問每州（區）預測獲勝機率較大者是否獲勝，便有如問投擲一銅板是否出現正面。而要求共有幾個州（區），由預測獲勝機率較大的候選人當選，便相當於求投擲 56 個銅板，共得的正面數。將表 4 中 56 個州（區），各取較大的預測獲勝機率，全部相加，得總和 49.35。其中為了簡便，機率大於 0.999 者，以 1 計，機率小於 0.001 者，則以 0 計。即得 538 網站預期有 49.35 個州（區），由獲勝機率較大的候選人，贏得該州（區）。實際吻合幾個？50 個！這還能說不準嗎？還能不信統計嗎？

若某州（區）預測獲勝機率較小者反而贏了，不妨稱之為“逆轉”州（區）。由表 4 知，56 個州（區）中，共有 6 個“逆轉”州（區）。表 5 給出 538 網站，在那 6 個逆轉州（區），對柯林頓及川普，所預測之得票率，實際得票率亦附上以為比較。6 個逆轉州（區），得票率預測領先的都是柯林頓，分別領先 0.6%、0.3%、4.2%、0.7%、3.7%，及 5.3%。我們知道民調的抽樣誤差乃與樣本數有關，但從 0.3% 至 5.3%，對選舉而言，其實都不算大。即在共有 91 張選舉人票的 6 個逆轉州（區）裡，柯林頓預測領先的幅度，並未大到夠安全。

回過頭來看川普，他在 6 個逆轉州（區）的實際得票率，分別高出柯林頓 1.20%、10.28%、0.23%、3.66%、0.73%，及 0.77%。這些差距，除了緬因州第 2 選區（只有 1 張選舉人票，影響很小）的 10.28% 較大，及北卡羅來納州的 3.66% 不算太小外，其餘在佛羅里達、密西根、賓夕法尼亞（Pennsylvania），及威斯康辛（Wisconsin）等 4 州，差距分別是 1.20%、0.23%、0.73%，及 0.77%，可說都相當小。只要些微的波動，輸贏便可能換人。這 4 州，共有 75 張選舉人票。若少掉這 75 票，川普便只有 231 票，如此表 1 所給選舉人票之預測，誤差就很小了，而川普也將黯然神傷地落選。能這麼驚險地逆轉這 4 州，說川普運氣好，應不為過。

其實，還不必 4 州全輸掉，因川普得到的選舉人票，比當選所需的 270 票，不過多出 36 票，故佛羅里達州與密西根州（共 45 票）、佛羅里達州與賓夕法尼亞州（共 49 票）、佛羅里達州與威斯康辛州（共 39 票），或密西根州、賓夕法尼亞州，與威斯康辛州（共 46 票），只要在上述任一組州輸

掉，則“時代”雜誌 2016 年選出的風雲人物，便將是柯林頓，而不是川普了。

事實上，我們早說過了，若真見到次次正確預測銅板那一面朝上的人，人們恐怕不但不信他，反而懷疑其中有假。所以如何能對這麼複雜的選舉，要求完全精準預測？

這是一雙方實力相當接近的總統大選。複雜的投票方式，加上贏者全拿制，造成正確預測誰當選的困難。若如一般選舉，只依普選得票率的高低，以決定誰當選，則 538 網站，便有近乎完美的預測。由表 2，預測柯林頓的得票率為 48.5%，領先川普的 44.9%。票開出來，果然柯林頓的得票率較高。而且柯林頓的實際得票率為 48.06%，比預測值僅略少 0.44%；川普的實際得票率為 45.97%，比預測值也才高出 1.07%。這樣的誤差，在選舉預測裡，算是高度準確了。只要想，從一袋中，以隨機取球來估計紅球所佔比例。兩次試驗所得比例之差異，若只有 1.07%，會不滿意嗎？差異若小至 0.44%，難道不驚嘆不已嗎？那更不要說是民調了。

像 538 網站的預測，準確中夾著些微的誤差，算是將統計的功能徹底發揮。只要了解隨機性，只要知道誤差難免，將對統計更加服氣。

表 1. 538 網站 2016 年美國總統大選預測及實際選舉人票

候選人	Clinton	Trump	McMullin	Johnson
預測值	302.2	235.0	0.80	0.0
實際值	232	306	0	0

表 2. 538 網站 2016 年美國總統大選預測及實際得票率

候選人	Clinton	Trump	McMullin	Johnson
預測值	48.5%	44.9%	5.0%	1.6%
實際值	48.06%	45.97%	3.28%	2.69%

表 3. 538 網站 2016 年美國總統大選當選機率之預測

候選人	Clinton	Trump
預測值	0.714	0.286

表 4. 538 網站 2016 年美國總統大選各州 (區) 獲勝機率之預測

州 (區)	選舉人票	候選人		實際獲勝者
		Clinton	Trump	
Alabama	9	<0.001	>0.999	Trump
Alaska	3	0.235	0.764	Trump
Arizona	11	0.334	0.666	Trump
Arkansas	6	0.004	0.996	Trump
California	55	>0.999	<0.001	Clinton
Colorado	9	0.775	0.224	Clinton
Connecticut	7	0.973	0.027	Clinton
Delaware	3	0.915	0.085	Clinton
District of Columbia	3	>0.999	<0.001	Clinton
Florida*	29	0.551	0.449	Trump
Georgia	16	0.209	0.791	Trump
Hawaii	4	0.989	0.011	Clinton
Idaho	4	0.009	0.990	Trump
Illinois	20	0.983	0.017	Clinton
Indiana	11	0.025	0.975	Trump
Iowa	6	0.302	0.698	Trump
Kansas	6	0.027	0.973	Trump
Kentucky	8	0.004	0.996	Trump
Louisiana	8	0.005	0.995	Trump
Maine	2	0.826	0.173	Clinton
District 1	1	0.915	0.085	Clinton
District 2*	1	0.509	0.490	Trump
Maryland	10	>0.999	<0.001	Clinton
Massachusetts	11	>0.999	<0.001	Clinton
Michigan*	16	0.789	0.211	Trump
Minnesota	10	0.850	0.150	Clinton

表 4. 538 網站 2016 年美國總統大選各州 (區) 獲勝機率之預測 (續)

州 (區)	選舉人票	候選人		實際獲勝者
		Clinton	Trump	
Michigan*	16	0.789	0.211	Trump
Minnesota	10	0.850	0.150	Clinton
Mississippi	6	0.022	0.978	Trump
Missouri	10	0.039	0.961	Trump
Montana	3	0.041	0.959	Trump
Nebraska	2	0.023	0.977	Trump
District 1	1	0.107	0.893	Trump
District 2	1	0.442	0.558	Trump
District 3	1	0.008	0.992	Trump
Nevada	6	0.583	0.417	Clinton
New Hampshire	4	0.698	0.302	Clinton
New Jersey	14	0.969	0.031	Clinton
New Mexico	5	0.826	0.172	Clinton
New York	29	0.998	0.002	Clinton
North Carolina*	15	0.555	0.445	Trump
North Dakota	3	0.023	0.977	Trump
Ohio	18	0.354	0.646	Trump
Oklahoma	7	<0.001	>0.999	Trump
Oregon	7	0.937	0.063	Clinton
Pennsylvania*	20	0.770	0.230	Trump
Rhode Island	4	0.932	0.068	Clinton
South Carolina	9	0.103	0.897	Trump
South Dakota	3	0.061	0.939	Trump
Tennessee	11	0.027	0.973	Trump
Texas	38	0.060	0.940	Trump
Utah	6	0.033	0.832	Trump

表 4. 538 網站 2016 年美國總統大選各州 (區) 獲勝機率之預測 (續)

州 (區)	選舉人票	候選人		實際獲勝者
		Clinton	Trump	
Vermont	3	0.981	0.019	Clinton
Virginia	13	0.855	0.145	Clinton
Washington	12	0.984	0.016	Clinton
West Virginia	5	0.003	0.997	Trump
Wisconsin*	10	0.835	0.165	Trump
Wyoming	3	0.011	0.989	Trump

註：* 表由獲勝機率預測值較低者獲勝

表 5. 538 網站 2016 年美國總統大選 6 逆轉州 (區) 預測及實際得票率

逆轉州 (區)	選舉人票	538 網站預測之得票率		實際得票率	
		Clinton	Trump	Clinton	Trump
Florida	29	48.1%	47.5%	47.82%	49.02%
Maine(District 2)	1	45.6%	45.3%	40.98%	51.26%
Michigan	16	48.4%	44.2%	47.27%	47.50%
North Carolina	15	48.2%	47.5%	46.17%	49.83%
Pennsylvania	20	48.9%	45.2%	47.85%	48.58%
Wisconsin	10	49.6%	44.3%	46.45%	47.22%