高中機率難學?

黃文璋

國立高雄大學統計學研究所

早期高中數學裡的機率題材，是以古典機率為主，即以相同的可能性來解釋機率。進行一項隨機試驗，以 S 表所有可能的結果之集合，S 稱為樣本空間，當然不要是空集合，它的任一子集合稱為一事件，S 中的元素個數以 $|S|$ 表之。想求一事件 A 的機率，其元素個數以 $|A|$ 表之。由於假設相同的可能性，故每一可能的結果發生之機率皆相同，即 $1/|S|$。因此 A 之機率遂定義為 $P(A)=|A| / |S|$。當可能發生的結果很多，便不易全列出來。但想求機率，由上述定義可知，並沒必要將所有可能發生的結果全列出，只要求出其個數即可，於是便衍生出排列組合的題材。一類典型的題目是，從一支 12 人的籃球隊，挑 5 人上場，條件是一定要有那幾類的人，且一定不能有那幾類的人，想看共有幾種挑選方式。不是數多，就是數少，常把人弄得昏頭轉向。不禁懷疑，豈有球隊是如此安排陣容？昔日高中機率，讓人覺得難，主要便是受困在排列組合繁瑣的計算。至於機率的意義，由於只是一比值，因此較無人去思索背後的涵義。

今日高中數學，已刪除排列組合裡，計算較複雜的部分。但增加一些統計的題材，如信賴區間。引進信賴區間後，

卻屢讓師生對機率產生困惑。例如，欲求某一銅板出現正面的機率 p 之信心水準 95%的信賴區間，依程序得先取得一組樣本，也就是反覆投擲若干次，並觀測共出現幾個正面。由於不同的人投擲，出現的正面數不會都相同，因此各人所得之區間可能有異，但都宣稱是 p 之信心水準 95%的信賴區間。其中的 95%，也就是 0.95，是什麼意思？代表機率嗎？如果是機率，那些不同的區間，豈能皆有相的機率包含 p？甚至，對一固定的區間，p 要嘛落在此區間，要嘛不落在此區間，怎會說是有 95%的信心？過去不太會去想機率究竟是什麼，一旦開始想，便愈想愈糊塗。即使何謂公正銅板，都難以解釋明白了。是每投擲 2 次得 1 個正面嗎？不是。投擲 10 次得 5 個正面嗎？不是。你隱約記得有個大數法則，那是表投擲愈多次(偶數次)，愈容易得到有半數個正面嗎？也不是。事實上，書上還說，投擲次數愈多，將愈不容易得到正反面數各半，這是怎麼回事?弄到後來，連一些原本以為很簡單的問題，也都迷惑起來。例如，甲乙皆知袋中有 1 紅球及 1 白球，甲從袋中取 1 球放到背後，假設甲看到所取為白球，但乙沒看到，接著甲問乙是紅球的機率為何？有人以為答案就是 1/2。有人認為條件不足，因沒說甲是如何取球。有人覺得這問題根本毫無意義，因明明已確定是白球，怎能要人求是紅球的機率？以上只是若干高中數學，因有信賴區間後，關於機率所產生的困擾。這是在僅討論古典機率的時代，較少會出現的。

據說邱吉爾曾在一場餐會中，要牛津大學的物理教授林德曼，用單音節的字，向賓客解釋量子力學是什麼，且時間

不能超過 5 分鐘。諸如代數、分析，及幾何等，幾個數學中傳統的領域，歷史都極悠久。機率的發展算是較晚的，直到上個世紀的三十年代，以公理化的方式引進機率，自此機率論才成為數學一主要的領域。由此可看出，機率的涵義，乃歷經一段不短的時間，才醞釀成熟的。總之，機率裡隨機性的本質，與 1 永遠是 1，2 永遠是 2，強調不變性的傳統數學迥異。但既放在數學課程裡，若含混帶過，難免會令有些教師感到不安。如何以淺顯的方式，對高中生解釋清楚機率的意義，以及諸如機率值會變(條件機率)這類基本概念，是要花點功夫的，也是我們未來該努力的。