

談不確定性

黃文璋

國立高雄大學應用數學系

1. 前言

大家常提到不確定性，似乎也很重視不確定性。為因應十二年國教，教育部訂定“十二年國民基本教育實施計畫”，做為準備實施的依據。計畫中要做的事不少，其中有一“提升國民素養實施方案”。根據此方案成立“國民素養專案計畫辦公室”，並規劃出五個領域的素養，包含語文、數學、科學、數位、教養。單獨成為國民五個素養之一，可看出數學的被重視。前述養專案計畫辦公室，後來便提出“教育部提升國民素養專案計畫報告書”（底下簡稱報告書），網路上可找到此報告書。在報告書的數學素養裡，訂出四大數學知識素養領域，即變化與關係、空間與形狀、數量，及不確定性與數據。報告書中說明，所謂國民素養，指的是“重要且能帶得走的能力與態度，每位學生都有權力獲得且必須獲得，才可以與時代、社會接軌，並滿足生活上解決問題的需求。”

素養如何產生？當然希望能從各課程的學習中，逐漸培養出來。但既然素養是要能帶得走，所以有可能修了一堆課，卻如揮一揮衣袖，不帶走一片雲彩般，毫無素養可言。

前陣子有大學教授憂心大學生欠缺國際視野，連“巴基斯坦”和“巴勒斯坦”都分不清的新聞報導。接著有人感嘆，很多大學生連本科該懂的常識也沒有。例如，有中文系畢業生不知林海音(1918-2001)那本著名的“城南舊事”；外文系的學生，也有沒聽過 1983 年諾貝爾文學獎得主威廉高汀(William Golding, 1911-1993)的名著“蒼蠅王”(Lord of the Flies)。連大學本科都如此，其他可以想見。所以若見到有人數學成績很高，但數學素養卻不足，並不必太奇怪。即使數學系的教授，數學素養不足；身為法律人，法學素養不足，也都不奇怪。

被納入現代國民必備的數學素養中，不確定性之重要，殆無疑義。但雖琅琅上口，一般人是否真了解不確定性？

2. 眾說不確定性

民國 87 年 9 月 9 日，中國時報第 1 版有一則標題為“中共若能降低對我敵意 減少不確定性 總統：戒急用忍就不是問題”之報導。內容如下：

李登輝總統昨日再度強調戒急用忍政策的正確性。他指出，中國大陸正處於一個結構性轉變的關鍵時刻，中共當局的政策方向充滿不確定性，如果有一天中共當局對我的敵意降低，或是不確定性減低了，到時候戒急用忍或是三通都不再是問題，很快就可以解決。…李登輝總統一直強調“不確定的原理”。他說，牛頓的理論說水“一定”會從高

處往低處流，但牛頓忘記了觀察的人並沒有在這個理論裡面。…。

15 年後，民國 102 年 10 月 20 日，聯合晚報有一則標題為“柯文哲自稱 本領是‘忍受不確定的能力’”之報導。其中說：

…若台大醫師柯文哲要擔任民進黨台北市長候選人、接受民進黨徵召，…。面對民進黨中的不同聲音，未來若徵召不成，是否有自行脫黨參選的打算？台大醫師柯文哲今天受訪時表示，他過去在台大醫院主管加護病房、管器官移植、管葉克膜，本領是“忍受不確定的能力”，常常不曉得明天發生什麼事，因此有一個大概的方向，就繼續做，等事情遇到再來處理，…。

有人把能忍受不確定性，當做具備擔任台北市長能力的佐證。有人身為總統，卻難以接受不確定性，且把降低不確定性，當做雙方交流的先決條件。看來政壇上有些人視不確定性如蛇蠍。不確定性真如此可怕嗎？它究竟是什麼？

其實對不確定性避之唯恐不及的，並不只有政治人物。擅長寫驚悚懸疑小說，以“達文西密碼”(The Da Vinci Code, 2003)一書聞名全球的丹布朗(Dan Brown, 1964-)，他的作品內容，多半是利用對歷史、宗教及藝術的深入了解，抽絲剝繭，逐漸解開貫穿全書，一個結合密碼學與科技的謎底，讓真相大白，並因而解除危機。他筆下的主要人物，不

論正邪，大抵是絕頂聰明。而能創出這些不凡人物的作者，才智當然亦非等閒。他在最新作品“地獄”(Inferno, 2013)一書中，多次提到不確定性。我們來一窺丹布朗對此概念的看法。在頁 29：

會長從來不相信運氣，他所做的一切都是用來消滅隨機、排除機率。控制是會長的專長—預見每種可能性，預料每種反應，塑造現實往想要的結果發展。

想消滅隨機，想排除機率？再驚悚恐怕都不超過這個企圖心了。書中有一叫聯合會(Consortium)的機構，專為有權有勢者，包含某些國家的政府，提供各種秘密服務，以賺取高額報酬，會長(Provost)便是此機構的負責人。他應屬判斷力極精準的人，因書上說他所接的案子，成功紀錄完美無瑕。雖一向信心十足，不相信世上有運氣好壞這回事，但在全書進入尾聲時，他還是陷入困境了。頁 429 遂寫著：

不妙，會長心想，坐下來真正開始擔心他未來的不確定性。

在頁 50 則有：

她為她無法控制的人生而哭。…。但是最重要的，她為未來而哭…突然充滿不確定感的未來。

這個“她”，指的是書中女主角席耶娜布魯克醫師(Sienna Brooks)。她天賦異稟，智商高達 208，七歲時便能自修解剖

學和心理學。這樣才智無與倫比的人，一想到未來充滿不確定性，卻無法克制地哭了起來，實在很難想像。不確定性成為有如令人恐慌的瘟疫了。至於書中男主角呢？那位博學多聞，且屢能化險為夷的哈佛大學(Harvard University)教授，專長為宗教符號學(religious iconology and symbology)的羅伯蘭登(Robert Langdon)，又是如何面對不確定性？在頁 303：

蘭登安靜坐著，努力克服不確定感。

不確定性，居然讓這位不知見過多少大風浪的教授，如此忐忑不安，不願與它共處。

3. 解讀不確定性

在報告書裡，關於“不確定性與數據”有底下說明：

宇宙的運轉，有必然性及隨機性。當銅板以自由落體方式落下時，若給定高度，則落地所需時間為定值，這是必然性。但那一面朝上卻未可知，此便屬隨機性。但是隨機性並非全然混亂，隨機性的規律建立在機率理論上。由於生活中充滿著隨機性，使得人們對很多事物常感不確定，因此需做各種預測。有些預測方式，雖然缺乏科學依據，但是即使胡亂猜測，獲得正確答案的機率仍有可能不為零，致使人們難以放棄擲筊算命、求神拜佛等手段。為了進行有科學根據的預測，也就是所謂讓數據說話，可利用統計方法，先蒐集資料，加以整理及分析，然後給出推論。人們在隨機世界中經常面

臨抉擇，或需對現況及未來進行推測與預測。充分了解不確定性，以及具備基本的處理數據與風險評估的能力，應該構成數學素養的一部分。

眾所周知，宇宙的運轉，乃必然性與隨機性，交錯著進行。天體運行及科學的很多領域中，充滿著必然性。中學的平面幾何裡，便有極多必然性的結果。例如，任一直角三角形，兩股平方和等於斜邊平方，此即著名的畢氏定理，早為人們所發現。對必然性的探討，不論在天文、物理、化學或數學，皆歷史悠久，且成效不錯。時至今日，科學家仍一直樂意挑戰必然性的問題，將各種必然發生的現象，將各種必然成立的性質，陸續挖掘出來。只是雖人們能算出下次哈雷慧星靠近地球(約每 76 年一次)的時間，正接近台灣的颱風，究竟會不會登陸？再多麼了不起的氣象專家，也常預測錯誤。讓銅枚以自由落體的方式掉下，只要高度固定，雖落地所需時間可算出，但除非兩面相同，否則落地後那一面朝上，不管你是什麼專家，十次恐怕都會說錯差不多五次。連這種登陸或不登陸，正面或反面，不過二擇一，都說不準，更不要說對下次地震是何時的預測了。因此誰有辦法如那位虛擬的會長，“塑造現實往想要的結果發展”？

在隨機世界裡，必然性使人們願意事先好好準備，因花了功夫，總有相當成效，所謂努力就有好收護；隨機性則使人們對未來充滿著不確定與盼望，因此會戒慎恐懼且不輕易放棄。光有必然性的世界，單調而無變化，將令人對未來失去憧憬，少了努力的動機。光有隨機性的世界，一切只靠運

氣，凡事都不確定，將令人不想積極認真。想想若自進高中起，全班的成績排序，三年下來都維持不變；或另一極端，每學期名次全由抽籤決定，那將是什麼情景？必然性加上隨機性，使人們在困境時，會期待隨機性來扭轉，在順境時，會期待必然性能常保。永遠有期待，不論這個世界是如何形成的，必然性與隨機性的並存，此結構實在相當巧妙。看過“千鈞一髮”(Gattaca，1997)嗎？電影裡，每個人只要一出生，便依照基因，被指定可做什麼工作。基因好的裘德洛(Jude Law，1972-)，卻因某意外事件，造成半身不遂，退出太空人的訓練。天下畢竟不是只有必然性，基因再好也阻止不了意外的發生。而一心想當太空人的伊森霍克(Ethan Hawke，1970-)，卻屬於基因不良者，早就被排除當太空人的可能。伊森霍克放棄了嗎？這部電影，便是講人生並非僅由天生基因的好壞來判定，不必認命，憑後天的努力，再加上機緣，最後夢想還是有完成的可能。

買樂透彩者，以為可求得明牌，消除不確定性，其實是枉然。但有人的確預測中頭獎號碼啊！這正是隨機性的效應，不然再預測一次看看。權力再大，財富再多，智慧再高，都打敗不了機率。生活中就是充滿著隨機性，企圖控制它，或以為能控制它，都只是妄想。至於機率，它一直就在那兒，又豈能排除？由於隨機性，使很多事物究竟會如何發展，常無法確定。未來，就是充滿著不確定，難以減少。因此不必擔心，也無須感到不安。人們能做的，便是對不確定性多加了解，學習如何與它相處，並如報告書中所說，做出預測，以供決策時之參考。

4. 隨機性的迷失

說起人類與隨機性的接觸，歷史悠久，源遠流長。像是“聖經”裡，便曾多次提到“拈鬮”。所謂拈鬮，即從預先做了記號的幾個紙卷中，隨意抽取一個，以做決定。例如，在“利未記”(Leviticus)第十六章，記載“為那兩隻羊拈鬮，一鬮歸與耶和華，一鬮歸與阿撒瀉勒。”獻給上帝的羊，並非挑較肥大者，而是依拈鬮而定，讓上帝也碰運氣。上帝會覺得不妥嗎？大約不會，因他自己有時也這麼做。如在“民數記”(Numbers)第二十六章，耶和華曉諭摩西說“…，還要拈鬮分地。”又在“新約聖經”的“約翰福音”(John)第十九章，當耶穌被釘死在十字架上後，物質不浪費，兵丁以拈鬮來決定耶穌的裏衣歸誰。在英文裡“鬮”為 lot，由 lot 就發展出後來的 lottery(樂透彩)。在中國的章回小說裡，拈鬮也屢出現。如在“三國演義”第二十二回，有“我與你拈著的便去。”；在“紅樓夢”第三十七回，則有“依我說，也不必隨一人出題限韻，竟是拈鬮公道。”由這些例子可看出，不分中外，自古以來，皆知拈鬮是公正的。除非作弊，否則誰也無法影響結果。

隨機性的存在，雖早為世人所知，但其內涵卻不見得那麼容易掌握，即使到今天依然如此。底下來看一些可能的原因。

首先是各種看似幾乎不可能發生的事，不時出現，遂讓人覺得世界上必存在某些神奇的力量，可左右隨機性。因此明明是事先無法確定的事，卻以為可經由適當的外力，得到

符合自己期望的結果。只是在黃文璋(1999)一文裡，我們早已說明，有些人們以為巧不可言的事件，如一團體裡有生日相同，其發生機率，並沒有想像中的低。另外，人們往往有選擇性記憶的傾向。像是有次出國旅遊，在某景點遇到一年多不見的朋友，而前幾天才剛好想到他，於是認為冥冥中必有些道理。遂一直記得此“奇遇”，且經常告訴他人。事實上，曾出現在腦海中，而未遇到的人，更是多的不得了，但這些自然不會向人提及。於是人們聽到的，常是些奇妙或古怪的事件。還一點是，小機率事件若碰到大樣本，則其發生便不足為奇了。如人人想中樂透彩頭獎，這當然很難，因中獎機率極低。但若很多人簽注，則開出頭獎，怎會稀奇？有人以生日簽注，中了頭獎，被視為神奇。但生日真與個人命運關係密切嗎？仔細想想，不過純屬巧合吧！否則人人皆以各自的生日簽注，豈能每人都中？職業球賽裡，各種匪夷所思的事件，更是屢有所聞，大抵也可以稀有碰到大數來解釋。要知在棒球、籃球、足球，…裡，每種球類都有很多支隊伍，每年又比賽很多場。經年累月下來，總會發生些“靈異事件”，像是“貝比魯斯魔咒”(Curse of the Bambino)之類的。2012 年，美國職籃(NBA)著名球員布萊恩(Kobe Bryant, 1978-)，於一場比賽裡，連續 15 次出手落空。看到媒體大幅報導，好奇之下，我們遂做了些探討，並完成黃文璋(2012a)一文。此事件發生的機率當然很小，但在該文裡，我們說明在 NBA 球賽中，有“某”好手凸槌，連續多次不進，幾乎可說是一必然事件，因此若看到了，並不特別訝異。反正不是發生在布萊恩身上，就是發生在其他球員身上。故再怎

麼被媒體奚落，布萊恩並不需要去找高人改運。果真，在發生連 15 投不進的一個多月後，布萊恩便創下全場 18 次罰球全中的難得紀錄。這就是球賽！又在 2013 年的 NBA 球季，印第安納溜馬(Indiana Pacers)隊，開季以來無堅不摧，達到九連勝，是彼時唯一保持不敗的球隊。難道有精靈暗助嗎？這些令人嘖嘖稱奇的事件，若皆要視為“靈異”，則職業球賽裡，將多得數不清了。畢竟沒有神話，不敗之師的溜馬隊，於 11 月 16 日作客芝加哥公牛(Chicago Bulls)隊主場時，被公牛隊痛宰，連勝紀錄破功了。“有趣事件”也常令人感到迷惑。以打橋牌為例，一副撲克牌共 52 張，每人分 13 張，只要牌洗得夠均勻，可假設每種組合出現的機率都相同。亦即拿到 13 張黑桃，跟拿到梅花 6, J, 方塊 3, 8, 10, 紅桃 7, 6, K，及黑桃 4, 7, 9, 10, Q，其機率其實一樣。但前者顯然有趣多了，會讓拿到或見到的人，即使多年後，仍四處講個不停。只是全世界這麼多人在玩橋牌，遲早就是會出現 13 張黑桃(或紅桃、方塊、梅花)。上述這些對隨機性有意無意的誤解，經由不斷的學習機率，是可能逐漸釐清。有興趣者，可參考黃文璋(2010, 2011a, 2011b, 2011c, 2011d, 2012b, 2013a, 2013b)等幾篇通俗性的文章。

橋本忍(1918-)是日本著名的電影編劇家，從“羅生門”(1950)一片起，長期與大導演黑澤明(1910–1998)合作，兩人共同完成不少好作品。在他著的“複眼的映像—我與黑澤明”(2011)一書中，談論多部黑澤明拍攝的電影。如同球員，再怎麼了不起的導演，也有失手的時候。在此書頁 235 便提到：

“生者的紀錄”（1955）的失敗，是因為劇本是
帶有未知數與不確定性的原創故事，…。

將拍片失敗，歸罪於劇本裡有未知數與不確定性？隨機性導致不確定性，不確定又常與未知聯結在一起，未知難免令人不安。由是遂使有些人對隨機性及不確定性，都產生負面看法。再舉幾個實例來看。民國 102 年 3 月 30 日，中國時報有一則標題為“不確定的年代”之短評。其中提到：

…曾幾何時，台灣又重回到了那個“不確定的年代”。沒有人對未來有憧憬、沒有人能描繪出一年後的樣貌。…保費不確定、電費不確定、投資環境不確定。當“不確定”成為這個島上唯一可以確定的事，招商引資、經濟發展種種，全是空談。…。

民國 102 年 6 月 5 日，工商時報有一則標題為“郭台銘：今年是不確定的一年”之報導。其中說：

鴻海董事長郭台銘在“致股東報告書”，將今年定調為充滿不確定性的一年，…。歐洲的高失業率、低成長率依舊存在，在新興國家也面臨通膨、失業、成長變緩等不同問題，再加上科技產業生態結構的快速變遷，今年仍舊充滿不確定性。雖然前途充滿了不確定性，…鴻海有信心能在整體景氣循環仍處於高度不確定下，突破一切困難與挑戰，…。

顯然社會上不乏對不確定性，沒什麼正面看法的人。這其實是完全不需要，也不該有的。未正確看待無所不在的隨

機性，也是不能好好了解其內涵的原因之一。

5. 結語

不確定性的概念，當然不只在數學裡有，也出現在很多不同的領域，如物理、哲學、經濟學、金融、保險、心理學、社會科學，及資訊科學等。但在不同的領域，不確定的意義，不見得完全一樣。如在經濟學裡，有時區隔風險與不確定性。二者分別指知道，及不知道所有可能會發生的結果有那些。以 A, B 兩隊比賽球例，有一種看法是，如果結果不是 A 贏、B 贏，就是平手，則這是風險；但如果有可能因天氣不佳，或裁判罷工而停賽，由於這結果事先不能預料到，因此是不確定性。如前所述，將不確定性引向未知，造成有些人因而可接受風險的概念，對風險可忍受，對不確定性卻持有負面看法。其實只要思慮周密些，或因長期觀測，是有辦法將所有可能會發生的結果全列出。像是搭乘高鐵，早先發生時，社會大眾還很錯愕，現在大家都清楚知道了，除了準點及誤點，尚可能會停駛。所以我們不這樣區分風險與不確定性。對於不確定性，皆指能列出所有可能會發生的結果。

該如何處理不確定性？可藉助機率與統計的理論及方法，對事先不確定會出現那一結果的隨機事件，經由探討及分析，得到推論，以供決策者參考。報告書裡將不確定性與數據放在一起，是因與其依靠擲筊及算命之類的方式來做判斷，還不如蒐集資料，讓數據說話，看其中透露出什麼訊息。

有人不服氣，上次依擲筊做的選擇，後來果真不錯。擲

箇簡便又可靠，何以不能仰賴？民國 102 年 10 月 15 日中國時報有一則標題為“美 3 學者 獲諾貝爾經濟學獎之報導”。其中說：

2013 年諾貝爾經濟學獎得主名單 14 日出爐，由 3 位美國經濟學家…同獲殊榮，他們因為對研究資產市場趨勢做出突破性貢獻而得獎。…漢森是知名的總體經濟學家，…他根據“矩估計”(method of moments)發展出“廣義矩估計”(Generalized method of moments)，是統計中常用的一種參數估計方法。…皇家科學院發布新聞稿指出，人們沒辦法預測未來數日或數周股票和債券價格，但 3 位獲獎學者所作的研究和分析，卻呈現一個令人驚訝又矛盾的現象，就是要預測未來 3 到 5 年的價格趨勢是有可能的。

我們並不清楚那三位學者的研究內容，但與該報導所述類似，統計預測的準確性，從來便非只依少數幾次的結果來評斷。以兩人投擲銅板為例。假設有個銅板，正面出現的機率為 0.6，反面出現的機率為 0.4，投擲若干次，以那一面出現次數較多決定勝負。你的選擇為何？若只投擲 1 次，選反面還無妨，因有 0.4 的機率能贏，不算太差；但若投擲 10 次，選反面贏的機率降到約 0.166；若投擲 100 次，選反面贏的機率便只有約 0.016 了。另外，若觀測正面出現的比率，則只要觀測數夠大，比率將很可能(即機率很大)極接近 0.6。換句話說，若賭那一面出現的比率較大，當投擲數很大後，便不能鐵齒。因堅持選反面者，獲勝的機會，恐怕是微乎其微。

要知機率理論告訴我們，在隨機現象裡，仍有所謂隨機法則存在。亦即隨機並非隨意而行，仍遵循某些法則。而若呈現出來的結果，與隨機法則不吻合將如何？這時便可對先前的假設(此處乃正面出現的機率為 0.6)產生懷疑(注意！只是懷疑。我們已數度強調，若長期不斷地重覆試驗，各種人們以為不可能的事，將會紛紛冒出來)。一、兩次，或短期的預測，尚顯不出統計的功能。但如果找到適當的統計方法，預測長期趨勢時，統計的本事便會顯現。只是在利用統計時，從資料的蒐集開始，便要能正確掌握統計思維，否則易誤用統計，得到的結果，也就沒有參考價值。這方面的討論，可參考黃文璋(2009)一文。

圍棋初學者，若把一些重要比賽的棋譜都背起來，棋力是否就能與那些高手並駕齊驅？大家知道仍差得遠。本文一開始指出，國民素養是要能“帶得走”。怎樣才算能帶得走？知識如同吃進去的食物，大部分不過是過客，只有很微少的量能被吸收，變成我們身體的一部分。自幼起我們所接觸的知識滿坑滿谷，忘記不過是遲早。但是有些後來就融入我們的思維了，能跟著我們到處走。在金庸(1924-)“倚天屠龍記”的第二十四回裡，有一段張三丰傳張無忌太極劍法：

張三丰一路劍法使完…問道“孩兒，你看清楚了沒有？”張無忌道“看清楚了。”張三丰道“都記得了沒有？”張無忌道“已忘記了一小半。”張三丰道“好！那也為難了你。你自己去想罷。”張無忌低頭默想。過了一會，張三丰問道“現下怎樣

了？”張無忌道“已忘記了一大半。”…張三丰微笑道“好，我再使一遍。”提劍出招，演將起來。…和第一次使的竟然沒一招相同。…張三丰…問道“孩兒，怎樣啦？”張無忌道“還有三招沒忘記。”張三丰點點頭，收劍歸座。張無忌…沈思半晌，…抬起頭來，滿臉喜色，叫道“這我可全忘了，忘得乾乾淨淨的了。”張三丰道“不壞，不壞！忘得真快，你這就請八臂神劍指教罷！”

只有當招式都忘得乾乾淨淨，心中不再有第一招，第二招，…，那才真得變成你的功夫。我們說話不也是如此？句子就是自然地從口中傾洩而出，而非想著這句是那裡聽過，那句是何時看過？能做到這樣，自然便可以帶著走了。學問要能用才是自己的，光是讀過或背起來都沒啥大用。當反覆思索，經常運用，所學才逐漸變成你的，遇需要時，便能自然地用出來。換句話說，也就培養出素養了。巴基斯坦與巴勒斯坦搞不清楚，“城南舊事”及“蒼蠅王”沒看過，當然都無妨。但一葉知秋，若是連很常出現的事物，都屢屢感到茫然，那常識大約不會太好。反之，若只是人云亦云，特地去弄清楚巴基斯坦和巴勒斯坦，特別找到“城南舊事”及“蒼蠅王”兩本書來看，然後心滿意足，這樣的心態，將永難具備基本的素養。各種學問的素養，皆如電影“全面啟動”(Inception, 2010)中的夢境般，一層又一層。若只停留在最底下的一層，所見將有限。要不斷提昇，不斷擴充，永無止境。就像食物，從來不是自那天起，便可停止不吃了。

參考文獻

1. 黃文璋(1999). 純屬巧合。數學傳播季刊，23(4)：6–21。
2. 黃文璋(2009). 統計思維。數學傳播季刊，33(4)：30–46。
3. 黃文璋(2010). 機率應用不易。數學傳播季刊，34(1)：14–28。
4. 黃文璋(2011a). 認識機率。數學傳播季刊，35(2)：32–44。
5. 黃文璋(2011b). 數據會說話？科學人，111 期(2011 年 5 月號)：25。
6. 黃文璋(2011c). 運氣好有罪嗎？科學人，115 期(2011 年 9 月號)：30。
7. 黃文璋(2011d). 養牌有用嗎？科學人，123 期(2012 年 5 月號)：30。
8. 黃文璋(2012a). 布萊恩連 15 投不進。黃家小館(<http://huang.nuk.edu.tw/cindex.htm>)。
9. 黃文璋(2012b). 最高單注彩券獎金。黃家小館(<http://huang.nuk.edu.tw/cindex.htm>)。
10. 黃文璋(2013a). 擲筊裡的機率。科學人，135 期(2013 年 5 月號)：26。
11. 黃文璋(2013b). 運氣好不行嗎？黃家小館(<http://huang.nuk.edu.tw/cindex.htm>)。