七戰四勝制嘉惠了誰?

黃文璋

國立高雄大學應用數學系

美國NBA(National Basketball Association, 美國國家籃球協會) 分東區及西區兩個聯盟, 各有15支球隊。每年從例行賽裡, 每聯盟各挑出勝率最高的前8名, 以進入季後賽。季後賽抓對廝殺, 均採七戰四勝淘汰制。在第一輪裡, 各聯盟先由第1名對第8名, 第2名對第7名, 第3名對第6名, 第4名對第5名。4支勝隊進入第二輪, 又是兩兩對戰, 獲勝的兩隊進入第三輪對決, 以產生聯盟冠軍。兩支聯盟冠軍隊, 在第四輪裡, 再來一次七戰四勝, 以決定年度總冠軍。只有冠軍, 亞軍是少有人記得的。每回七戰, 分別在兩隊的球場進行, 但場地的安排, 讓戰績較好的球隊, 有一些主場優勢。可看出整個季後賽賽程之設計, 很看重例行賽的成績, 畢竟那是每隊幾十場(通常82場, 2011-2012年較少, 僅66場)下來的戰果。從統計的角度, 應屬於可靠的數據。

在台灣較關心美國職業球賽, 大抵是近年的事。但知道有七戰四勝制, 可就悠久多了, 且可能是從圍棋賽開始。1965年, 我國旅日圍棋好手**林海峰**(1942-), 年僅二十三歲, 在**名人賽**中, 以四勝二敗挑戰成功, 登上名人寶座, 令國人雀躍不已。名人賽的決賽, 便是採七戰四勝制。日本有七大圍棋賽, 除名人賽外, 本因坊及棋聖, 其決賽亦採七戰四勝制。至於十段、王座、天元, 及碁聖, 則均採五戰三勝制。所以大型比賽, 不必然是採七戰四勝制。五戰三勝, 三戰兩勝, 甚至一戰決勝負, 亦無不可。

到底採七戰四勝制的目的為何? 有些人認為是因此能降低機運成分, 使真正強隊出線。直觀上這是對的, 但究竟效果如何? 底下我們來略做分析。

不妨考慮更一般的情況。假設有A, B兩隊交戰, 每場A獲勝之機率為p, B獲勝之機率為$1-p$, 沒有平手。採$2k-1$戰k勝制, 即兩隊先獲得k場勝利者, 便贏得此比賽, 而若有剩下的場次, 當然也就不必比了。以$W_{k,p}$表A贏得比賽之機率。A要贏, 表對戰結束時, A勝k場, 而B勝的場數i, 不能超過$k-1$。即比賽的場數可能為$k+i$, 其中$i=0,1,\cdots,k-1$。因最後一場必定是由A獲勝, 且A共要勝k場, 因此在最後一戰之前的$k+i-1$場中, A要獲勝$k-1$場, 其餘的i場, 則由B獲勝。對一固定的i, B在那幾場中獲勝, 共有$\binom{k+i-1}{i}$種可能, 而每一可能之機率, 皆為$(1-p)^i p^k$。故

$$W_{k,p}=\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k+i-1}{i}p^k(1-p)^i \text{。} \tag{1}$$

對機率統計有些基礎的人, 會知道$W_{k,p}$與**負二項分佈**(negative binomial distribution)有關。假設執行一數列之獨立的**伯努力試驗**(Bernoulli trial, 即一試驗有兩種結果, 不妨稱為成功與失敗), 每次成功的機率為p(因此失敗的機率為$1-p$), 直到有k次成功才停止。則總共的失敗次數, 以$X_{k,p}$表之, 便有參數k及p之負二項分佈, 以$\mathcal{NB}(k,p)$表之。則$W_{k,p}$滿足

$$W_{k,p}=P(X_{k,p}\le k-1) \text{。} \tag{2}$$

我們亦有

$$P(X_{k,p}\le i)=P(U_{k+i,p}\ge k), \tag{3}$$

其中$U_{k+i,p}$有$\mathcal{B}(k+i,p)$分佈, 即參數$k+i$及p之**二項分佈**(binomial distribution)。此因對$\forall 0\le i\le k-1$, 事件$\{X_{k,p}\le i\}$, 等價於$k+i$次獨立的伯努力試驗(每次成功機率為p)中, **成功數**$U_{k+i,p}$(有$\mathcal{B}(k+i,p)$分佈)至少是k的事件, 而後者之機率便為$P(U_{k+i,p}\ge k)$。

當$p = 0.5$, 由(1)式並不易看出對$\forall k \geq 1$, $W_{k,0.5} = 0.5$。但先利用(3)式, 得

(4) $$W_{k,p} = P(X_{k,p} \leq k-1) = P(U_{2k-1,p} \geq k),$$

再由上式便得

(5) $$W_{k,0.5} = P(U_{2k-1,0.5} \geq k) = 0.5,$$

其中最後一等式, 乃用到由對稱性,

$$P(U_{2k-1,0.5} \geq k) = P(U_{2k-1,0.5} \leq k-1),$$

且上式左右兩機率之和為1。

對一些不同的k及p, 表1給出$W_{k,p}$之值。表2則僅針對$p \geq 0.5$, k由1至6, 給出較精準的$W_{k,p}$之值。圖1給出一些$W_{k,p}$之圖形。

每場A獲勝之機率為p, 等同於每場B獲勝之機率為$1-p$, 因此若採$2k-1$戰k勝利, B贏之機率為$W_{k,1-p}$。而A與B兩隊贏之機率和為1, 由此得

(6) $$W_{k,p} = 1 - W_{k,1-p}\text{。}$$

表1亦顯示(6)式成立。這是何以在表2及圖1中, 我們只給出$p \geq 0.5$時的$W_{k,p}$之值及其圖形。

一般而言, NBA各隊實力差距, 並不會特別懸殊, 能進入季後賽的球賽, 實力又接近些。以2011-2012年度, 東區進入季後賽的8支球隊為例。在例行賽裡, 勝率最高的是**芝加哥公牛**(Chicago Bulls)隊, 約0.758(50/66), 其次是**邁阿密熱火**(Miami Heat)隊, 約0.697(46/66)。這東區的前兩名, 各曾輸了16場及20場, 因此皆非無敵球隊。勝率最低的**費城76人**(Philadelphia 76ers)隊, 約為0.530(35/66), 次低的**紐約尼克**(New York Knicks)隊, 則約為0.545(36/66)。公牛隊在66場例行賽裡, 勝了50場。其中對同區進入季後賽的另7支球隊, 在共26場比賽中, 勝了18場, 勝率約為0.692, 比全例行賽的勝率低, 畢竟能進入季後賽的球隊總是強些。但0.758與0.692之差, 並

表1 $W_{k,p}$之值, $k=2,\cdots,10$, $p=0.05,\cdots,0.95$

p	k								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.05	0.007	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.1	0.028	0.009	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.15	0.061	0.027	0.012	0.006	0.003	0.001	0.001	0.000	0.000
0.2	0.104	0.058	0.033	0.020	0.012	0.007	0.004	0.003	0.002
0.25	0.156	0.104	0.071	0.049	0.034	0.024	0.017	0.012	0.009
0.3	0.216	0.163	0.126	0.099	0.078	0.062	0.050	0.040	0.033
0.35	0.282	0.235	0.200	0.172	0.149	0.129	0.113	0.099	0.087
0.4	0.352	0.317	0.290	0.267	0.247	0.229	0.213	0.199	0.186
0.45	0.425	0.407	0.392	0.379	0.367	0.356	0.346	0.337	0.329
0.5	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500
0.55	0.575	0.593	0.608	0.621	0.633	0.644	0.654	0.663	0.671
0.6	0.648	0.683	0.710	0.733	0.754	0.771	0.787	0.801	0.814
0.65	0.718	0.765	0.800	0.828	0.851	0.871	0.887	0.901	0.913
0.7	0.784	0.837	0.874	0.901	0.922	0.938	0.950	0.960	0.967
0.75	0.844	0.896	0.929	0.951	0.966	0.976	0.983	0.988	0.991
0.8	0.896	0.942	0.967	0.980	0.988	0.993	0.996	0.997	0.998
0.85	0.939	0.973	0.988	0.994	0.997	0.999	0.999	1.000	1.000
0.9	0.972	0.991	0.997	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.95	0.993	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

不算太大。至於尼克隊對同區進入季後賽的另7支球隊, 在23場中勝了11場, 勝率約為0.478, 也略低於全例行賽的0.545, 但差距仍不算過大。顯然各隊對進入季後賽, 及未進入季後賽的兩群球隊, 獲勝機率並未有太大之別。

由表1, 兩隊遭遇時, 當強隊(如公牛隊)勝率為0.7, 若一戰決勝負, 則(強隊)贏的機率當然仍是0.7; 若採三戰兩勝制, 則贏的機率約為0.784; 若採五戰三勝制, 則贏的機率約為0.837; 若採七戰四勝制, 則贏的機率約為0.874。增加之機率依序約為0.084, 0.053, 及0.037, 所增加實在很有

表2 $W_{k,p}$之值, $k=2,\cdots,6$, $p=0.5,\cdots,0.95$

p	k				
	2	3	4	5	6
0.5	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000
0.55	0.57475	0.59313	0.60829	0.62142	0.63312
0.6	0.64800	0.68256	0.71021	0.73343	0.75350
0.65	0.71825	0.76483	0.80015	0.82828	0.85132
0.7	0.78400	0.83692	0.87396	0.90119	0.92178
0.75	0.84375	0.89648	0.92944	0.95107	0.96567
0.8	0.89600	0.94208	0.96666	0.98042	0.98835
0.85	0.93925	0.97339	0.98790	0.99437	0.99734
0.9	0.97200	0.99144	0.99727	0.99911	0.99970
0.95	0.99275	0.99884	0.99981	0.99997	0.99999

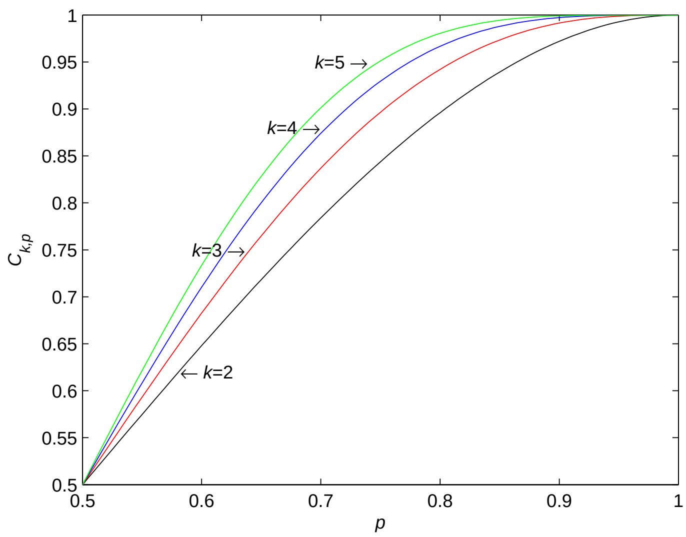

圖1 $W_{k,p}$之圖形, $k=2,3,4,5$, $p\geq 0.5$

限。但夜長夢多, 打愈多場, 再強的的隊伍, 主力球員受傷乃不易避免, 因此也就難免陰溝裡翻船。由民國101年5月1日聯合晚報一則標題

為"NBA/ 公牛、塞爾蒂克季後賽失優勢"的新聞, 便可看出。原來東區雙雄芝加哥公牛隊及**波士頓塞爾蒂克**(Boston Celtics)隊, 於季後賽比完第一場後, 各有一位主力球員, 因受傷而無法繼續出賽。

東區的第一名公牛隊對第二名的熱火隊, 在例行賽的4戰中, 打出2比2平手。而由表1及圖1均可看出, 兩隊實力若接近(即p接近0.5), 比多場, 對那一隊贏, 影響並並不大。如在表1中, 設$p = 0.55$, 則當$k = 4$, 即採七戰四勝制, $W_{k,p}$也不過由0.55增加至約0.608, 即機率多了0.058。而就算$k = 10$, 即採十九戰十勝制, 這總夠多場了, $W_{k,p}$也才達0.671。所以當雙方實力接近時, 七戰四勝制之必要性很低。而若兩隊實力懸殊(即p接近1), 表1及圖1均顯示, 七戰四勝制的必要性亦不大。如設$p = 0.9$, 則當$k = 4$時, $W_{k,p}$約為0.997, 不過約增加0.097。但表1及圖1均顯示, p約為0.75時, 七戰四勝制會使$W_{k,p}$增加較多, 約增0.179, 贏的機率達到0.929。只是在大多數的情況下, 經過愈多輪後, 交戰的兩隊, 實力將可能愈接近, 即p將愈接近0.5, 這時仍採七戰四勝制, 必要性可說極低。五戰三勝制已足足有餘了。甚至一戰定江山亦無不可。由圖1可看出, $k = 3$與$k = 4$之圖形很接近; 至於$k = 4$與$k = 5$之圖形又更近了。

另一方面, 不難理解, 對較弱的那隊, 賽愈多場, 對他們的不利將更顯著。如由表1, 設$p = 0.6$, 即A, B每場獲勝之機率分別為0.6及0.4。當$k = 4$, A贏之機率由0.6增為0.710, 機率增加0.110, 而比例約增加$0.110/0.6 \doteq 18.33\%$; 而B贏之機率由0.4降至0.290, 機率減少同樣的0.110, 但比例則約減$0.110/0.40 = 27.5\%$, 較18.33%高了不少。所以就弱隊而言, k愈大(即賽愈多場), 對他們是更不利的。

對強隊獲利之效益不大, 對弱隊卻大幅降低贏之機率, 那何以在NBA季後賽裡, 兩隊非得大費周章打那麼多場, 才能決定輸贏? 猜想採七戰四勝制的主因, 乃是為了增加票房收入。畢竟多打幾場, 讓球迷的心一直懸著, 將可賣出更多的票。簡單講就是純粹商業上的考量。至於球迷, 可能也不會抱怨, 因賽愈多場, 將為他們帶來更多的娛樂。