運氣好有罪嗎？

黃文璋
國立高雄大學應用數學系

今年 2 月 27 日中國時報有一則標題題是“機率十億分之一 咦？同 1 店連中 24 張發票”的新聞。原來統一發票每兩個月開一期，去年 3 至 6 月的兩期裡，有對葉姓夫婦共中了 24 張普獎。目前普獎的中獎率 0.005，去年那時僅為 0.003，即平均每 1000 張，才 3 張會中普獎(底下簡稱中獎)。中了這麼多張，遂引起國稅局注意。國稅局指出，“葉姓夫婦 24 張中獎發票都在同一家便利商店開出，按照數學教授的計算，機率只有十億分之一，而且兌獎的發票也要夠多”。葉姓夫婦對國稅局的查核，則質疑“運氣好難道有罪嗎？”他們認為國稅局顯然是採取“有罪認定”。

其實國稅局並非特別找葉姓夫婦麻煩，早在 2004 年 10 月，台東有人便因在同一期裡中獎 8 張，而被國稅局約談。國稅局認為“這是合理的懷疑。”究竟兩期中獎 24 張，算不算很稀奇？國稅局是否大驚小怪？另外，那十億分之一的機率，又是如何求出？

首先，由於平均每 1000 張發票，有 3 張中獎。因此若擁有 8000 張以上的發票，則平均可中 24 張以上，這時便可理直氣壯了。在 3 至 6 月共 122 天中，一個家庭累積 8000 張發票，即平均每天 65 張以上，且要來自同一家商店，恐怕無人相信這些發票皆因購物取得。葉太太曾在這家便利商

店上班過，公司規定顧客沒拿走的發票不可私吞。若侵占消費者的發票，公司將提出控告。所以既說不出口如何合法取得令人難以置信的巨量發票，也不願承認發票是侵占而來，遂只能歸之於運氣好。但你知道這樣的運氣，好到什麼地步嗎？

就不要管 8000 張了，因沒人相信會有這麼多張發票。假設葉姓夫婦四個月內累積 1000 張發票。這已經很驚人了，因平均每天得有 8 張以上，連向親友蒐集都不易，不要忘記發票還是來自同一商店。則中獎 24 張，或者放寬些，至少中 24 張的機率有多大？此問題相當於重複做 1000 次試驗，各試驗相互獨立，每次成功(中獎)的機率為 0.003，想要求成功 24 次以上之機率 P。成功幾次，自然是隨機的，有二項分配，大家在高中數學裡都學過。P 值可以算，但一堆組合數及次方，恐令人生畏，退避三舍。這時可採用高中數學裡也學過的中央極限定理，以常態分配來近似。只是仍沒那麼容易求出。

怎麼算就不說了，上述 1000 次試驗，成功數的期望值是 3，標準差則為 2.991 開根號，即約 1.73。成功數至少 24，比期望值多 21 以上，也就是大了至少 12 個標準差。平常我們說超過 3 個標準差，就已經很極端了，如今可是超過 12 個標準差。一般常態分配的機率值表，只列到 3 個標準差，無法利用來得到 P。但藉助一些近似公式，可得出 P 值約為 3.2×10^{-34}。此值到底多小？對 42 取 6 的樂透彩，每張彩券中頭獎之機率約為 524 萬分之 1。放大一點，就算千萬分之

2 好了，即 2×10^{-7}。這樣的中獎機率，大家已經覺得很難中了。若有人宣稱他每期只買一張，卻連續五期中頭獎(機率差不多就是 P)，你覺得無人會起疑嗎？

在親子鑑定，特別是名人的骨肉爭議，有時 DNA 比對的結果，“僅”99%的準確度，雖尚有 1%的誤差，當事人便承認了。因會導致名人願大費周章去做鑑定，一定是對方握有若干證據。對那些動見瞻觀的名人，與其愈辯駁愈陷入泥淖，還不如趕快讓事件落幕。運氣好當然無罪，只是在無罪推定之原則下，發生極不尋常的事件，當然會被人高度的懷疑。發票事件的當事人，該評估是否能讓人相信中獎那麼多，純粹僅是好運氣。

最後來看那十億分之一的機率如何求出？我們不曉得。讀者大約也已理解了，在不知擁有幾張發票的情況下，並無法算出中獎 24 張之機率。從報紙上籠統地說“兌獎的發票也要夠多”，我們不禁也要合理的懷疑，新聞中那位數學教授，要嘛唬人，要嘛是記者虛擬的，該教授根本不存在。