從賠率到機率

黃文璋
國立高雄大學應用數學系

1 賠率

我們常聽到**賠率**, 每逢重大的運動競賽, 賠率一詞更出現不絕。網路上也屢屢有人在問賠率的意義。賠率與**機率**關係密切, 利用機率可解釋賠率; 反之, 經由賠率也是解釋機率的方式之一。我們就先來討論賠率。

2006年6月9日至7月9日(德國時間), 在德國舉行4年一度的世界盃足球大賽。在這一個月間, 足球賽可說吸引了全世界的目光。冠亞軍賽於台北時間7月10日清晨兩點開始舉行, 估計全球有15億人同步收看電視轉播。想到錯過就要再等4年, 半夜我從床上跳起來, 陪著女兒一同觀賞。

本屆世界盃共有32隊參賽, 分成8組, 每組4隊。每組經單循環賽, 取前兩名進入16強。再經單淘汰產生8強, 又單淘汰產生4強。4強抓對廝殺, 勝隊爭冠亞軍, 敗隊爭季殿軍。每組要賽6$(=\binom{4}{2})$場, 全部共要比賽64場。每場比賽90分鐘, 在分組賽中可以有平手。進入16強後, 若於正規的90分鐘後平手, 則延長30分鐘。若再平手, 則雙方各罰5球定勝負。這就是扣人心弦的所謂PK賽, PK為12碼罰球Penalty Kick之縮寫。

6月初有份賽前的封王賠率排行榜, 6月底產生8強後, 又有份新的封王賠率表。表1給出8強封王賠率, 及此8強原先(賽前)的賠率。

看了表1你會產生什麼心得? 首先賽前所預測的排名, 並非太離譜。賽

表1. 2006年世界盃足球賽8強封王賠率表

8強排名	球隊	賽前封王賠率	8強封王賠率
1	巴西	1賠3.25(1)	1賠3.25
2	阿根廷	1賠9.00(5)	1賠4.50
3	德國	1賠9.00(4)	1賠5.50
4	英格蘭	1賠7.00(2)	1賠6.50
5	義大利	1賠9.00(3)	1賠7.50
6	法國	1賠15.00(8)	1賠12.00
7	葡萄牙	1賠23.00(9)	1賠17.00
8	烏克蘭	1賠67.00(14)	1賠51.00

小括號中的數字為賽前在32隊中的封王排名

前預測的前5名皆進入8強。8強中的另3隊原預測為8、9、14名。即使14名也還不算是離前8名太遠。但賽前預測名次的1、5、4、2、3名, 在8強中的名次為1、2、3、4、5名。雖然預測名次不盡然準確, 但似乎也具相當參考價值。依據實際表現及發展(如原來32隊, 如今只剩8隊), 賠率做了修訂。8強淘汰一半, 產生4強, 8強封王賠率中的前4名, 就有3隊未能進入4強, 只有排名第3的德國進入4強。4強封王賠率表, 及最後實際名次列於表2。

表2. 2006年世界盃足球賽4強封王賠率表

4強排名	球隊	封王賠率	實際名次
1	德國	1賠2.62	3
2	法國	1賠2.87	2
3	義大利	1賠4.33	1
4	葡萄牙	1賠7.00	4

除了封王賠率外, 還有各種賠率, 如德國對阿根廷之賠率等。這其中又分德國贏的賠率, 阿根廷輸的賠率, 和(在正規時間內)的賠率等。此外, 還有最多進球賠率, 一場比賽誰進第一球的賠率等, 有各種賭法。

一般而言, 賠率過高, 賭場(或彩券公司、博奕公司等)覺得划不來, 賠率太低, 賭客下注意願低。會有某一平衡點, 賭場認為有利可圖, 而也有夠多的賭客認為合理, 此賠率才是有行有市。隨著比賽進行, 依球隊的表現, 賭客對球隊贏球的機率, 會隨時重新評估。換句話說, 當有新的條件, 賠率可能會隨之而變。另外, 不同的賭場, 搭配的賭法可能不同, 因此對同一支球隊的賠率, 也可能不同。

4強封王賠率排名依序為德國、法國、義大利及葡萄牙。只是德國先敗於賠率比她高的義大利隊, 法國倒是贏了賠率低於她的葡萄牙。德國及葡萄牙爭季、殿軍, 德國獲勝。義法的冠亞軍之戰, 則由義大利獲勝。這份4強封王賠率表的順序, 2、4名正確, 1、3名則互調。

賠率究竟是什麼意思? 好賭是人的天性, 不獨球賽, 彩券(如四星彩), 及賭場裡(如輪盤(roulette)), 處處見到賠率的影子。甚至由保險裡的理賠(特別是意外險), 也可算出其賠率。賠率大小, 當然與事件發生機率之大小有關。簡單地說, 發生之機率愈小, 則賠率愈高, 發生之機率愈大, 則賠率愈小。開賭場當然要賺錢, 所以對賭客而言, 賭場裡不會有**公正賽局**(fair game)。以台北富邦銀行發行的公益彩券為例, 除了成本及利潤, 還有公益的使命, 總獎金常只佔彩券總銷售金額之不到60%。但若假設是公正賽局, 則由賠率, 如何換算出贏的機率?

另外, 以賠率排名預測實際名次, 有時準有時不準。**隨機現象**(random phenomenon)就是如此: 發生機率高的**事件**不一定發生, 發生機率低的事件有時反倒發生。但如果二擇一, 問你那一件事會發生? 可能還是會選發生機率高的事件。機率的意義是要花點功夫才能理解, 而非三言兩語可解釋清楚。

2 公正賽局

何謂公正賽局? 這不見得有唯一的答案, 因每人心中對公正的看法可能不同。我們就以"期望淨所得為0", 當做公正賽局的定義。**期望值**(expectation, 或稱expected value, mean), 是機率裡一重要的量, 此處

不擬給其定義, 先將它想成平均好了。對於賠率, 有兩種常見的賠法。其一為你得先下注, 譬如說1元, 不論你輸或贏, 這1元都拿不回。若你賭的那支球隊為1賠a(這裡$a \geq 1$才合理), 則在公正賽局下, 你認為該球隊贏的機率為何?

設贏的機率為p, 且令X表每次賭之淨所得。則有p的機率, $X = a - 1$, 有$1 - p$的機率$X = -1$。故下式要成立:

$$p \cdot (a-1) - (1-p) \cdot 1 = ap - 1 = 0 \text{。}$$

解出$p = 1/a$。即如果是1賠2, 則該球隊贏的機率應為$1/2$。附帶一提, A, B兩支球隊比賽, 假設沒有和局, 又設A贏之賠率為1賠a, B贏之賠率為1賠b, 則顯然a, b不會同時皆大於2。否則你兩隊各下注1元, 付出2元, 卻保證所得多於2元, 此並不合理。

現考慮同學兩人間之打賭, 或如玩輪盤賭。你下注1元, 1賠a, 表贏的話給你a元, 且原下注的1元還是你的; 若輸的話, 則下注的1元被收走。此處a便可小於1, 即$a \geq 0$。仍令X表每次賭之淨所得, p表贏的機率。則

$$p \cdot a - (1-p) \cdot 1 = (a+1)p - 1 = 0 \text{。}$$

解出$p = 1/(a+1)$。第二種情況下之1賠a, 與第一種情況下之1賠$a+1$等價。因此利用第一種情況的結果, 亦可得$p = 1/(a+1)$。例如, 在第二種情況裡, 如果是1賠2, 則贏的機率為1/3; 而第一種情況1賠2, 表贏的機率為$1/2$。

反過來看, 對第一種情況, 若贏的機率為p, 則對應1賠$1/p$; 對第二種情況, 若贏的機率為p, 則對應1賠$(1-p)/p$。此處$0 < p \leq 1$。

例1. 假設你與同學賭巴西贏日本, 10賠1。則你認為巴西會贏日本之機率為何?

解. 此即第二種情況的1賠0.1, 也是第一種情況的1賠1.1, 故$p = 1/1.1 = 10/11$。至於巴西輸的機率為$1 - p = 1/11$。即巴西贏日本的機率為輸日本的機率之10倍。

例2. 在上例中, 假設各經過1場與他國的比賽後, 巴西隊表現不如預期, 而日本則後勢被看好。此時你與另一位同學賭巴西贏日本, 5賠1。5賠1即1賠0.2, 因此巴西贏日本之機率為$p = 1/1.2 = 5/6$。賠率由10/11降為5/6, 巴西贏的機率, 雖只降了少少的$5/66 \doteq 0.07575\cdots$, 不到一成, 但賠率由10賠1變成5賠1, 表面上看似乎成為一半。

如前所述, 賠率隨著比賽之進行(有了新條件), 會隨時修訂。也就是對一特定球隊, 人們認為其贏球的機率有可能會改變。機率值會變, 是機率的一特性。2004年台灣總統大選, 連宋曾一路被看好。當年2月24日連宋與陳呂的賠率各為1.75及2, 幾小時後成為1.65及2.1, 隔日成為1.5及2.4。但我們都知道當年3月20日投票結果是誰當選。給定某事件B發生, 事件A的機率, 有可能會與原先沒給任何條件下之機率不同。這就是**條件機率**(conditional probability)。但若給定B發生, A發生的機率維持不變, 便稱A與B**獨立**(independent)。條件機率及獨立, 都是機率論裡重要的題材。

在6月初那份賽前封王賠率表, 排名最後的是千里達及托巴哥共和國, 為1賠1001.00。預測排名很前面的球隊, 雖贏球機率大, 但賠率小, 賭對了, 所獲不多。所以雖千里達及托巴哥會奪冠的機率很低, 仍會有人押注, 因一旦暴出冷門, 他們就大賺了。此正如樂透彩中大獎機率雖低, 仍有不少人想以小搏大。假設有很多人對千里達及托巴哥下注, 而如同香港人所說"波是圓的"(波即ball), 若千里達及托巴哥一路過關斬將, 最後得到冠軍, 這時賭場不就大賠? 對此現象你有何評論呢? 再度, 這是要用機率理論才能好好解釋。

雖賭場設計出的賠率, 通常對賭徒不是公正賽局, 但仍有可能賭場賠錢。盛行於台灣民間的六合彩, 有時會有組頭因不堪大賠而跑路。事實上, 若資金不夠大, 較易發生賭場破產; 資金若愈大, 賭場撐不下去的機率也就愈低。這方面的討論是屬於機率論裡的**破產問題**(ruin problem)。

對一公正賽局, 我們已說明由賠率可以算出贏的機率。但若對某一球隊, 連續兩屆皆奪冠的機率有興趣, 則可否由各屆封王機率求出此機率呢?

大約沒辦法, 因並不知兩屆比賽封王事件間的關係。對於兩個事件, 若只知各自發生的機率, 而無其他資訊, 並無法求得同時發生的機率。由於有這些為釐清眞相等之情況, 有時我們須追溯事件產生的源頭, 有如尋根一般。這就是何以在機率論裡, **機率空間**(probability space)的討論是必要的。

法國隊在分組賽中表現並不太好, 但進入8強後, 卻能力克原先最被看好的巴西隊。球是圓的, 事先誰也不敢打包票那一隊必得冠軍。對即將對抗的兩支球隊, 在公正賽局下, 如果是勢均力敵, 可以認為贏的機率各為$1/2$。但如果有一隊較強, 則其贏的機率p應大於$1/2$, 至於弱的那一隊, 贏的機率q應小於$1/2$。但$p+q$應為1才有道理, 這可能是一般人的認知。儘管足球迷們對各隊強弱的評估可以不同, 但$p+q$就是該為1。也就是雖人人皆可當預言家, 誇誇其談各隊贏球機率, 但這些機率, 還是要滿足某些條件, 不是可以任意說巴西奪冠機率0.9, 且阿根廷奪冠機率為0.5等。

例3. 在4強對決前, 媒體報導賭客更加謹慎。因賽前排名1、2名的巴西及阿根廷, 在8強賽皆被淘汰, 跌破賭客們的眼鏡。在4強中, 大部分的賭客都看好德國和法國會勝出, 兩國分居封王排行榜的1、2名。

報載賭盤開出: 德國贏, 一萬賠一萬零六百; 義大利贏, 一萬賠兩萬兩千六百。我們先換算出, 德國贏是1賠1.06, 義大利贏是1賠2.26。則在公正賽局之假設下, 德國贏的機率加上義大利贏的機率為

$$\frac{1}{1.06}+\frac{1}{2.26}\doteq 1.385874。$$

兩隊得拚個你死我活, 贏的機率相加卻超過1, 這是怎麼回事? 難不成兩隊向上帝的禱告皆能奏效? 我們已說過被認為愈容易贏的, 賠率便愈小。賭場要賺錢, 因此球隊贏球機率被放大了。而賭客要刺激, 要豪賭, 對不公正的賽局仍可接受。有些被看好的球隊輸球, 慘遭民眾辱罵, 相信罵人者中有些是因賭輸而生氣。

賠率低到1賠1.06, 表示德國極度被看好, 只是在90分鐘正規比賽平手後, 於30分鐘延長賽的最後兩分鐘, 義大利連進兩球, 以2比0擊敗德國。

例4. 在4強封王賠率表中, 法國排名在義大利之前, 但在法、義冠亞軍賽前, 較多人看好義大利。知名的博奕公司, 英國的威廉希爾(William Hill), 開出的盤口為義大利勝1賠2.50, 平手1賠2.70, 法國勝1賠2.80, 這是以踢完正規的90分鐘為結果。如果你3種可能性皆押1元, 則最少淨虧0.20元, 最多淨虧0.50元。都必然是淨虧, 所以大約少有人這樣賭的。至於義大利封王賠率為1賠1.72, 優於法國的1賠2.10(沒有平手)。在公正賽局之假設下, 前者三種情況之機率和為

$$\frac{1}{2.50}+\frac{1}{2.70}+\frac{1}{2.80}\doteq 1.127513;$$

後者義大利與法國封王機率和為

$$\frac{1}{1.72}+\frac{1}{2.10}\doteq 1.057586。$$

第二種賭法似乎對賭客稍有利。

另外亦有義大利奪冠11賠8的說法。可看出這是屬於贏的話, 所下賭注仍屬於你之第二種情況。11賠8即1賠8/11, 故贏的機率為

$$\frac{1}{1+8/11}=\frac{11}{19}。$$

對應第一種情況1賠$19/11\doteq 1.727$, 與前述1賠1.72接近。也有報載義大利勝1賠1.21, 平手1賠1.81, 法國勝1賠1.66, 這也是屬於第二種情況。對應第1種情況的1賠2.21, 1賠2.81, 1賠2.66。

此戰於正規的90分鐘結束, 雙方以1比1戰成平手。延長30分鐘, 雙方皆未進球, 接著就是PK戰, 義大利以5比3擊敗法國。一旦結果揭曉, 賽前預測的機率, 便無意義。

3 生活即機率

著名的法國大數學家及天文學家, 有**法國牛頓**(Newton of France)之稱的**拉普拉斯**(Pierre-Simon, Marquis de Laplace, 1749-1827)曾說:

"We see that the theory of probability is at bottom only common sense reduced to calculation; it makes us appreciate with exactitude what reasonable minds feel by a sort of instinct, often without being able to account for it. ⋯ It is remarkable that this science, which originated in the consideration of games of chance, should have become the most important object of human knowledge. ⋯ The most important questions of life are, for the most part, really only problems of probability." ⋯ In fact, the enlightened individual had learned to ask not "Is it so?" but rather "What is the probability that it is so?"

兩百多年前, 拉普拉斯就已說大部分生活中最重要的疑問, 都只是機率的問題。拉普拉斯並未誇大, 時至今日, 機率論的確已成為幾乎所有科學、工程、醫學、法庭, 及工業中, 極基本且重要的工具。而且如拉普拉斯所指出, 人們已習於問諸如"這件事會是如何的機率?" 而不若以往問"這件事是否會如何?" 我們列出一些新聞的標題如下, 以為佐證:

1. 怎樣才能提高加薪機率?
2. 普通公務員要成為部長的機率會有多大?
3. 研究發現大腿愈粗罹心血管機率愈高。
4. 美報估計布希批扁機率在上升2月28日成關鍵時間。
5. 吃排卵藥懷三胞胎機率不到10%。
6. 電腦輻射導致癌症狀機率提高到45%。
7. 吃全素的女性產下雙胞胎機率約為常人五分之一。
8. 吃蛤蠣吃到紫珍珠機率為二百萬分之一。
9. 姚明表示他參加男籃世錦賽機率為50%。
10. 外資壓寶馬當選總統機率65%。
11. 2102年小行星撞地球機率有千分之一。

我們再引胡適在"重印乾隆壬子本紅樓夢序"裡的一段話, 供各位參

考。

> 我對容先生說: 凡作考據, 有一個重要的原則, 就是要注意可能性的大小。可能性(probability)又叫做幾數, 又叫做或然數, 就是事物在一定情境之下能變出的花樣。把一個銅子擲在地上, 或是龍頭朝上, 或是字朝上, 可能性都是百分之五十, 是均等的。把一個不倒翁擲在地上, 他的頭輕腳重, 總是腳朝下的, 故他有一百分的站立的可能性。試用此理來觀察紅樓夢裏寶玉的生年, 有二種可能···

胡適這篇序寫於1927年, 距今約80年。雖然文中對機率的有些用語, 以今日觀點並非很精準, 不過其依"可能性的大小"來做考據, 的確是頗客觀的態度。文學考證要具科學的精神, 而可能性的大小, 即為其依據之一。

可能性即機率。但做決策有時並非只依機率值的大小。以賭博為例, 前面提及的期望淨所得, 亦為一種常考量的依據。只是大部分的賭, 期望淨所得都為負。以四星彩為例, 玩法之一(正彩)是自0000至9999共10,000組有序號碼中, 任選一組。若開出的號碼恰為你所選, 則彩金為投注的5,000倍。無論中或沒中, 所下的注當然收不回。中獎機率為$1/10,000$, 只賠5,000倍。要賠10,000倍才是公正賽局, 但你也知道很難有這種彩券。雖每100元, 期望淨所得為-50元, 但仍有人願下注。每個人對金錢有不同的**效益函數**(utility function), 此函數並非皆是金錢的線性函數。有些人不在乎小錢, 而想要以簡單且快速的方法得到大錢, 這時賭就是方法之一了。有些人希望穩紮穩打, 有些人則願意豪賭。高利潤常伴隨高風險, 因此**變異**(variation)大小, 亦為做決策時會考慮到的。變異為機率論中一基本的概念。

既然生活中處處充滿著與機率相關的問題, 因此我們有必要對機率論有相當程度的了解。這也是機率論日漸成為大學中許多學系必備知識的主因。