應隨機以恆周

黃文璋
國立高雄大學應用數學系

1. 必然性與隨機性

對自然的探索，了解宇宙的奧秘，一直是人們所追求的，所謂究天人之際，通古今之變。而宇宙的運轉，穿插著必然性及隨機性。有些現象我們確知必然會發生，諸如天體運轉，及科學中的很多規律性，皆可歸為必然性。至於事先無法確定結果的情況也所在多有，此便為隨機性。

由於一代一代對知識的追求，宇宙間很多必然性，逐漸被人們了解。以數學為例，大家在中學學過平面幾何學，平面幾何學裡有各種關於圖形的必然性。信手拈來，三角形內角和為 180 度，直角三角形兩股平方和等於斜邊平方（即畢氏定理）。較複雜一點的如三角形三邊的垂直平分線交於同一點（外心）；重心（三邊中線的交點）距任一頂點距離為對應中線長之三分之二；外心、重心及垂心（三邊高的交點）三點共線等。我們不但對幾何圖形裡，那種種毫無例外的性質感到神奇，更驚訝於前人是如何發現的？尤其這些發現，多半源自距今兩千五百多年前，古希臘時代的畢達哥拉斯（Pythagoras，約西元前 580-500 年，畢氏定理即以他命名）。而後歐幾里得（Euclid，約西元前 375-300 年），把從畢達哥拉斯及其追隨者等先輩開創出來之工作，有系統的整理成幾何原本（Elements）一書。此書至少到十九世紀非歐幾何學出現之前，一直是平面幾何學的推理、定理和方法的主要源泉，今日中學平面幾何學裡的內容，大約都不超過該書的範圍。

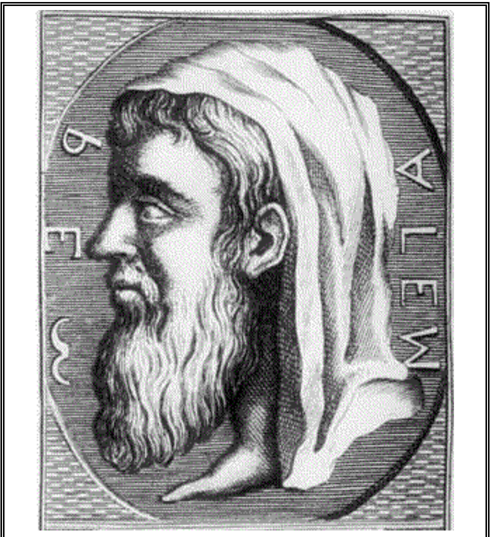

圖 1. 歐幾里得因編著幾何原本，在麥克・哈特著「影響世界歷史 100 位名人」中被列為排名第 14

平面幾何學除了教我們眾多圖形的性質，我們的邏輯推演能力也多半奠基於此門課。而這竟然是距今兩千多年前，就已被那些聰明的人發現的學問。想想那是個沒有紙筆的時代，真不知當時的數學家是如何畫圖，以及如何能如此觀察入微。不過與其歸根於觀察力，還不如說是他們抽象思考的能力很好。要知在數學裡並不需眼見為實。數學家自有一套思想體系，在這套體系裡，他們有一套如何判定一事為真之步驟。

在幾何原本第九卷的最後一命題討論完全數（perfect number）。所謂完全數即一數等於小於它所有因數之和。6 是第一個完全數，6=1+2+3。28 是第二個完全數，28=1+2+4+7+14。古希臘時代覺得這些數字具有特別的象徵和神秘的意義， 6 也確實與宗教裡的一些完美性相關連。在聖經創世記裡記載，上帝創造世界花了 6 天，在第 7 天歇工，西方人可能因此

認為 6 是一個很完美的數字。目前的曆制，一星期有 7 天，一個月是 4 星期（即 28 天）多一些，似乎 28 也是一為人所樂意接受的數字。古希臘時代只知道四個完全數，在幾何原本第九卷的最後一句話寫著“6, 28, 496, 8,128 等皆是完全數”。歐幾里得發現，這四個完全數皆可表示成 $2^{n-1}(2^n-1)$ 的型式，n 分別為 2,3,5,7。

歐幾里得也看出當 n=2,3,5,7 時，2^n-1 皆為質數。這項觀察使他在幾何原本裡證明：若 2^n-1 為一質數，則 $2^{n-1}(2^n-1)$ 為一完全數。

歐幾里得給出了偶完全數的充分條件，但是否尚有其他偶完全數呢？歐幾里得之後約兩千年，大數學家歐拉（Euler，1707-1783），給出了偶完全數的必要條件：偶完全數必呈 $2^{n-1}(2^n-1)$ 的型式，且 2^n-1 為一質數。

$$\boxed{\begin{aligned} 6 &= 2\times 3 = 2\times(2^2-1)\\ 28 &= 4\times 7 = 2^2\times(2^3-1)\\ 496 &= 16\times 31 = 2^4\times(2^5-1)\\ 8128 &= 64\times 127 = 2^6\times(2^7-1)\end{aligned}}$$

3, 7, 31, 127 皆為質數

圖 2. 首 4 個完全數

圖 3. 在改成歐元前，瑞士 10 法朗以歐拉為像

至此人們知道偶完全數是如何產生的，毫無例外的，就是 $2^{n-1}(2^n-1)$ 的型式，且 2^n-1 為一質數。2^n-1 型式的質數，稱為梅仙尼質數（Mersenne prime）。每找到一個梅仙尼質數，便找到一個偶完全數。偶完全數的尋找至今仍方興未艾，近年來，由於網際網路的興起，加速了梅仙尼質數及偶完全數的誕生。有興趣加入尋找行列者，可上網站

http://www.utm.edu/research/primes/mersenne/index.html 。

大家可能會好奇，找很困難嗎？不是只要找到一個 2^n-1 型式的質數就好了嗎？可惜這種質數很稀少，至西元 2005 年，才知道 42 個偶完全數。最大的一個是 2005 年 2 月 18 日發現的：

$$2^{25,964,950}(2^{25,964,951}-1)，$$

位數達 15,632,458 位。假設一頁可印 4,000 位，印出此數要 3,909 頁，真是天文數字。古人才找到 4 個就知道很珍貴，命名為 perfect number，其慧眼真令人敬佩。至於奇完全數是否存在呢？至今仍然未知。

宇宙間的各種變化，科學裡的各種現象，長久以來人們所追求及所突破的，可說大抵都屬必然性。例如，天體運行的規律性、幾何學裡種種美妙的性質，及偶完全數一定是什麼型式等。至於隨機性呢？雖然我們可準確地算出哈雷彗星下次來的時間，及下回金星凌日的時間，但明天會不會下雨、颱風走向，及下次地震是何時，就都不清楚了。又如讓手上的銅板以自由落體的方式落地，則那一面朝上，並無法預知，雖然只要高度固定，且忽略空氣阻力

，落地所需時間是確定的。所以人們對隨機性的了解，有很長一段時間，即使不是繳白卷，成就也很侷限。

圖 4. 金星凌日(93 年 6 月 9 日聯合報)每 243 年出現 4 次，間隔 8 年—105.5 年—8 年—121.5 年，下次出現為 2012 年 6 月 6 日

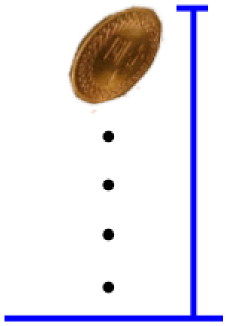

圖 5. 高度給定落地時間可求出

2. 處處有機率

其實人們對隨機性的經驗源遠流長。在聖經利未記第十六章：*為那兩隻羊拈鬮，一鬮歸與耶和華，一鬮歸與阿撒瀉勒*。民數記第二十六章，耶和華曉諭摩西：*還要拈鬮分地*。在新約聖經約翰福音裡，耶穌被釘死在十字架上後，兵丁以拈鬮來分他的裏衣。雖很早便知有隨機性，但探討則較晚才開始。涵蓋隨機性的機率與統計這兩門學問，其萌芽都遲至十七世紀。初期僅是算算排列組合或收集資料，而同時期數學的其他領域，已發展得很深入了。一般認為機率發展有下述三個階段：

1. 解決玩撲克牌、投擲骰子等實際情況中事件出現的可能性問題，
2. 建立抽象系統，解決較一般的問題，
3. 1933 年，俄國數學家柯莫果洛夫（Kolmogorov，1903-1987）以公理化的方式建立機率論的數學體系。

自此機率成為數學之一主要的領域，此距今不過七十餘年。至於現代統計學的發展始自十九世紀末，歷史也不是太長。今日統計已成為做決策之一主要的科學依據。甚至連算命、由星座看個性、心理分析，皆可說都是統計的應用。可以這麼講，統計理論，並不能保證所提供的選擇永遠是最好的，但可以保證，在所設定的條件下，沒有其他更好的策略。

數學雖然博大精深，日常生活中所用到的，大致不會讓人迷惑，如算總和、平均、利息、報稅等。稍微難一點的數學，一般人多半不敢輕易觸及，認為那是專家的工作。以前會計統計是在一起的，大學裡有會計統計學系。其實會計中用到的數學都還不算太難，只是會計師的制度存在已久，是一高收入的專業，但統計工作則常令人以為可以自行處理。諸如機率、獨立、期望值、變異數、百分之九十五的信心水準、抽樣誤差等，這些很難解釋清楚的概念，卻常出現在報章媒體上。不少人也常就在辦公室，或街頭上做起“抽樣調查”。事實上

，前述那些名詞比數學中的極限、微分、積分還難解釋明白。例如，投擲一公正的骰子，所得點數之期望值為

$$\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=3.5 \text{ 。}$$

雖然不論怎麼投擲都得不到一個非整數的值，但偏偏 3.5 被認為是"期望得到的值"。中小學的機率與統計題材置於數學課程中。一般人受多了數學中必然性的訓練，對隨機性常也想以對待必然性的手法來處理。數學中的數字，一般人會謹慎面對，但對求機率值不知怎麼，一向就較隨意。隨機像是等同於隨便。我們給一例子如下。

例. 每個投票所多一票就贏了，落選者常這樣嘆息。聽起來很容易，實際情況如何？假設有 10,000 個投票所，任一投票所至少多一票的機率假設為 0.999（算是不低)，則每個投票所皆至少多一票的機率為（假設各投票所之投票行為相互獨立）

$$0.999^{10,000} \approx \frac{4.517}{100,000} \approx \frac{1}{22,000} \text{ 。}$$

可看出一個投票所要多一票可能不難，但要每一投票所都能多一票，就不見得容易了。即使只有 1,000 個投票所，此機率也才約 0.3677，也不是很高。

上例顯示一般人雖對機率一詞朗朗上口，其實常連事件機率的大小，也不太能精確的掌握。諸如：

影響翻盤機率，

與 SARS 有關的題目，出現機率可能不低，

恐怖耶誕，全美警戒，遇襲機率與規模，911 至今最高。

其中所提到的機率，很可能並未有嚴謹的依據，但這卻都是出現在報紙上的新聞標題。

3. 隨機的概念

機率非頻率

我們常有下述講法：每 4 年有一次閏年；每 19 年有 7 次閏月；哈雷慧星每 76 年接近地球一次。對機率的表示，遂也常採類似的方式：

一期買一張樂透彩，五萬年可中頭獎，

每五名曾接受肺癌手術的病人，只有一人能存活五年，

和伊朗比十場會贏九場，但偏偏這是第十場。

久之機率與頻率混淆，以為發生機率三分之一，就是每三次觀測出現一次，變異的概念逐漸失去，而將隨機變數常數化。二事件如果發生機率相同，就以為發生頻率也要相同。北銀 42 取 6 的樂透彩，自 91 年 1 月 22 日發行，至 94 年 1 月 21 日結束，共發行 314 期，圖 6 給出 1 至 42 各號碼出現的頻率。出現最多的為 12 號，有 61 次，出現最少次數為 16 號，僅 33 次。各號碼出現機率相同，但雖開了三百多期，各號碼出現頻率之差異卻很大。

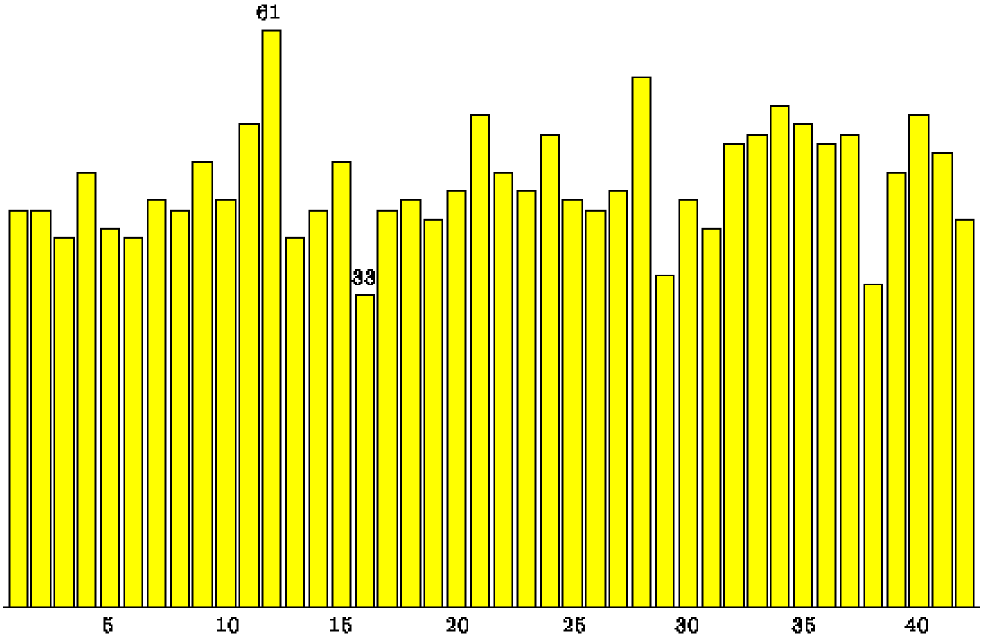

圖 6. 91 年 1 月 22 日至 94 年 1 月 21 日共 314 期北銀樂透彩頭獎號碼出現頻率

統計推論常引起迷思

數學中很多時候在證明，但對於隨機現象，我們通常無法證明其真偽：諸如銅板為公正，樂透彩頭獎號碼之出現符合隨機性，都無法依一定步驟證明對或錯。統計裡對一假設（如機率=0.5），經過檢定後，得到的推論是接受或不接受此假設（見黃文璋(2004) 統計學裡無罪推定的精神，科學發展月刊，383，68-73）。由於變異的存在，統計推論允許犯錯，而且對同一假設，如果重覆觀測，推論可能不一樣。又因常要處理涉及人的問題，例如，民意調查，或某種新藥對治療某種特定疾病是否有效等，相對於檢驗一銅板出現正面的機率是否等於 0.5，多變的人與無怨無尤的銅板，為完全不同的情況。造成的後果是常有人以為統計的工作可以輕率地執行，也有不少人以為統計的推論就如數學中的證明。因而有人不相信統計，有人過度相信統計。不論相信或不相信統計，歸根究底是不了解隨機的本質，不知隨機現象中是有變異的。

未能善解小機率的含義

前面提到統計裡的假設檢定，會先定出一個比較小可以容忍的犯錯機率，如 0.01, 0.05, 0.10。看多了小機率，難免令人誤以為小機率代表幾乎不會發生的事件。事實上生活中小機率事件是屢屢發生的。樂透彩中頭獎機率雖很小，但卻常有人中頭獎，這是因每期買的人很多之故，美國還曾有人兩次中樂透彩頭獎。民國九十年十二月，台北市新開幕的京華城購物中心，有一對夫婦中了七部休旅車，轟動一時。美國前總統雷根 2004 年 6 月去世，時代雜誌及新聞週刊，這兩家著名的雜誌，據稱都擁有上百萬張雷根的照片，卻選了同一張當做封面。一方面有些我們以為不可能的事，常常發生機率並沒有想像的低；另一方面即使機率小，一旦觀察次數夠多，便不難發生。此外，世事留意皆文章，只要有心，經常可觀察到發生機率很小的事件。

圖 7. 英雄所見略同？

4. 應隨機以恆周

顯通寺，是我國佛教聖地五臺山現存最古及最大的寺院。相傳五臺山是文殊菩薩演教和居住的地方，所以五臺山的寺院，都以供奉文殊菩薩為主。大文殊殿為顯通寺的第二進殿宇，殿外有幅對聯

德相非空非有應隨機以恆周，

法身無去無來住寂光而不動。

切記，不能以數學的方式來想機率與統計。假設 A 銅板出現正面機率為 0.6，B 銅板出現正面機率為 0.4，0.6＞0.4，是否各投擲 10 次，A 銅板出現的正面數必多於 B 銅板呢？當然不一定，這可不是數學中的比大小。那機率的大小不是沒意義嗎？也不盡然，如果比賽誰得的正面數多，你要選那一個銅板呢？顯然是 A 銅板，機率的功能此時就呈現了。另外，統計裡 95%的信賴區間也不是指實驗 100 次有 95 次值得信賴。信賴區間的意義不易解釋，但卻常出現在媒體。可能是因 95%在數學上的意思很明白吧！在隨機現象裡，事件的機率會因情況不同、新資訊的出現而改變（即條件機率），不可守著一個機率值，不知變通。隨機挑選一個人，你可假設是男是女的機率皆為 0.5。但如果告訴你，是從高雄女中挑選的，你還會認為挑中男女機率相同嗎？要將隨機融入思考中，做決策時先算算機率、期望值、變異數等，依統計方法找到最佳策略。在所要求的條件下，除非有意外，結果會令人滿意。只是隨機世界裡，永遠有意外，豈有此理之事也一向不少。出現意外，對原先相信的事，是可以信心動搖。進一步檢驗，若意外仍出現，改變選擇，是合理的決策。但會不會誤判？也不無可能。有新資料出現可否再改變選擇？答案是肯定的。萬物雖有常，但世事多變，不要挑戰機率，也不要過度倚賴機率，而要善用機率。

在這個必然性與隨機性並存的世界裡，必然性就像法身，隨機性則是德相。必然性使人們願意事先好好準備，隨機性使未來充滿著盼望與不確定性。光有必然性的世界毫無變異，光有隨機性的世界一切靠運氣，皆會使人少了努力的動機，只有其中一項，世界是無法周轉的。隨機世界中，由於有大數法則及中央極限定理等，使其中又有些可以掌握的現象存在，這就是隨機法則。我們從小學數學，熟悉數學中的法則，運用較自如。對隨機法則，就不是那麼能駕馭。了解必然性，掌握隨機性，才能適存於此隨機世界。