簽注之隨機性探討

黃文璋

國立高雄大學應用數學系

洪宛頻

國立中山大學應用數學系

摘要

四星彩每期從$0000-9999$開出一組有序的4位號碼。簽注包括正彩(四位數皆簽)在內, 共有五種玩法。由於中獎機率較高, 每期各玩法(與樂透彩相比)中獎人數較多, 雖開出的期數尚非很多, 但由各期中獎人數, 已可看出一些有趣的現象。在此除對樂透彩及四星彩開出之號碼是否符合隨機性做檢定, 並由樂透彩及四星彩每期相對中獎人數之多寡, 以分析彩迷簽注之隨機性。我們也對已開出百餘期之樂透彩, 分析彩迷簽注之隨機性是否隨著期數之增加而逐漸提高。最後, 我們以一組數據來說明, 人們是否可能會因對機率統計的更了解, 而提高隨機性的能力。

關鍵詞: 四星彩, 卡方適合度檢定, 樂透彩, 隨機性, Wilcoxon and Mann-Whitney檢定。

1. 前言

台灣政府做莊的彩券發行歷史長久, 不過購買者(以下稱彩迷)可以自行簽注號碼, 始自民國九十一年一月起台北銀行(以下簡稱北銀)發行的樂透彩, 其次是北銀於民國九十二年四月起發行的四星彩。對樂透彩開出的號碼是否隨機, 及彩迷們所簽注的號碼是否符合隨機性, 一直是我們有興趣的題材。在黃文璋等(2002)一文, 曾對至民國九十一年六月十四日止, 已開出的42期樂透彩號碼, 及所收集到的一些不同群組的人簽注的樂透彩號碼, 檢定其隨機性。結果顯示開獎號碼皆能通過隨機性的檢定, 至於所收集到的樂透彩號碼, 均極不隨機。

與前述研究已隔了一年, 樂透彩開獎多了百餘期, 且又增加發行四星彩。在本文裡, 我們再度對兩種彩券之開獎號碼做隨機性檢定。但我們較有興趣的, 是彩迷簽注之隨機性的探討。由於北銀並未公佈每期彩迷簽注號碼之統計, 我們只能由每期中獎人數的一小組樣本, 來推估簽注之隨機性。即使如此, 從其中已可發現一些有趣的現象。

另外, 在一年前之探討中, 有一群35位高雄大學應用數學系修了兩學期機率與統計課程的大二學生, 當時分析顯示這群學生隨機性的能力似乎較其他群組的人好些, 但也是無法通過隨機性的檢定。他們之中有20位升上大三後又繼續修習兩學期數理統計課程。我們做追蹤檢定, 以了解他們隨機性的能力是否有提昇。

樂透彩每週開獎兩次, 簽注是自1至42的號碼中, 任挑6碼, 不計順序。每期開出6碼及一特別號。6碼全中為頭獎, 中5碼及特別號為貳獎, 中5碼為參獎, 中4碼為肆獎, 中3碼為普獎。每期提撥之總獎金為當期總銷售金額的56%(每注賣50元)。普獎獎金(每注200元)分配完後, 將剩餘的獎金依38%, 12%, 15%, 35%的比例, 分到頭獎、貳獎、參獎及肆獎。且此四個獎項, 是由所有中該獎的號碼之擁有者, 均分該獎之獎金。若某期某一獎項無人獲得, 則該獎獎金移至下期同一獎項, 最多累積5期。若某獎連續5期無人獲獎時, 則累積之獎金併入次期之總獎金中。各獎之中獎機率, 利用排列組合的方法很容易可以求得。其計算過程可參考"機率統計網路學習館"網站, 網址為http://probstat.nuk.edu.tw。

四星彩於92年4月7日首次開獎, 之後每週一、三、五各開獎一次。與樂透彩一樣每注也是賣50元, 中獎則採固定獎金支出倍數。四星彩的玩法共有五種, 分為正彩(簽四位數)、前三彩(簽前三位數)、後三彩(簽後三位數)、前對彩(簽前二位數)及後對彩(簽後二位數)。簽注時先選填玩法, 然後依據不同的玩法由$0, 1, \cdots, 9$等10個數字中選取2至4個數字(可以重複)。正彩之獎金為投注之$5,000$倍, 前三彩及後三彩均為投注之500倍, 前對彩及後對彩則均為投注之40倍。

註: 四星彩於民國92年8月23日開始, 又推出不同的玩法, 主要是增加號碼相同但順序不同的獎項, 獎金分配方式仍採取固定獎金倍數。此新玩法不在本文討論範圍之內。

樂透彩與四星彩之獎金分配方式不同。樂透彩之獎金除了受總銷售金額的影響外, 亦與普獎中獎注數有關。因為, 普獎獎金固定每注200元, 普獎獎金分配完後, 再依上述比例分配給其他獎項, 然後還必須由所有中該獎號碼之擁有者均分該獎獎金。因此, 獎金金額是不固定的。而四星彩的獎金是採固定獎金倍數, 所以不論總銷售金額是多少, 或中獎注數多少, 每注可分得的獎金皆相同。即彩迷在簽注的同時即知道自己若中獎可以有多少獎金。

北銀為防止明牌效應所造成的非理性大量投注, 於四星彩的玩法增加了銷售管理機制, 各種玩法之每組號碼皆有銷售上限注數。一旦達到上限, 則該組號碼便停止接受簽注。正彩共有$10,000$組號碼(0000至9999), 每組簽注上限為$1,750$注。前三彩及後三彩各有$1,000$組號碼, 每組簽注上限為$8,750$注。前對彩及後對彩各有100組號碼, 每組簽注上限為$87,500$注。從期望獎金的觀點來看, 這樣的設限並無必要。猜想北銀是希望藉由號碼會停止簽注, 造成民眾搶簽的心理, 因而刺激買氣, 才採此措施。

以正彩為例, 假設某期正彩銷售注數為N, 中獎注數為x。在何種情況下北銀會賠錢呢? 管銷支出不計, 當然是該期發出之總獎金大於該期銷售總金額, 即

$$x \cdot 250,000 > N \cdot 50 \Rightarrow x > \frac{N}{5,000} = 0.0002N(\text{期望中獎注數的2倍})。$$

但正彩中獎機率為0.0001, 故期望中獎注數等於$0.0001N$。而觀察各期正彩中獎注數大多小於期望中獎注數$0.0001N$(見表1), 因此亦小於$0.0002N$。故由期望獎金之觀點來看, 北銀其實

不容易賠錢。

2. 四星彩彩迷簽注之隨機性

依四星彩玩法的設計, 每期正彩、前三彩及後三彩之期望獎金比例皆為50%, 前對彩及後對彩之期望獎金比例為40%。在此將每期各彩之獎金比例定義為

某期某彩發出之總獎金/該彩當期之銷售總金額。

由每期各彩之獎金比例, 可反映該期各彩之中獎率。而某期某彩獎金比例若低於50%(或40%, 指前對彩及後對彩), 則表示該期該彩中獎數低於期望中獎數。反之, 則該期該彩中獎數高於期望中獎數。

令N_i、X_i分別表某期正彩、前三彩、後三彩、前對彩及後對彩銷售注數, 及中獎數, $i = 1, 2, 3, 4, 5$。又令p_i分別表各彩之中獎機率, $p_1 = 0.0001$, $p_2 = p_3 = 0.001$, $p_4 = p_5 = 0.01$。由於銷售注數N_i通常很大, 且$N_i p_i$也不小, 所以二項分佈趨近至常態分佈應很精準。如果是隨機選號, 將有

$$U_i = \frac{X_i - N_i p_i}{\sqrt{N_i p_i (1 - p_i)}} \approx N(0, 1),\ i = 1, 2, 3, 4, 5。$$

U_i值介於-3與3間之機率應約為0.9974。至於$|U_i|$較大, 例如$|U_i| > 10$的可能性應是微乎其微。表1列出至第37期(92年6月30日)之開獎資料及U_1, U_2, U_3, U_4, U_5之值。若某期$|U_i|$值較大, 則表示該期彩迷簽注第i個獎之隨機性較差。

由表1可知,不少$|U_i|$值均大於3。第5期的U_4值還高達52.41。因此, 資料顯示, 彩迷對四星彩的簽注極不隨機。而且, U_i的值為負居多, 顯示中獎率較多是未達該有之比例。由於樂透彩的簽注號碼是介於1至42, 在同一注中6個號碼不計順序, 且不可重複。而四星彩的每位數字, 皆可從0至9的10個數字中任選一個數字, 計順序, 且數字可以重複。樂透彩與四星彩兩者簽注方式大不相同。由$|U_i|$值之過高, 我們猜測不少彩迷在簽注四星彩時, 可能仍保有樂透彩的簽注習性。表2列出開出號碼有無重複之實際中獎數與期望中獎數的比例, 及各彩號碼有無重複中獎比例之檢定。

由於中獎比例之分佈未知, 因此欲對各彩號碼有無重複中獎比例做檢定, 須利用非參數檢定(nonparametric test)法。非參數檢定法有許多種, 本文採取Wilcoxon and Mann-Whitney檢定(簡稱WMW檢定)的方法, 以檢定各彩開出號碼有無重複時之中獎比例。WMW檢定法可參考Engelhardt(1992)一書。

由表2得知, 除了後對彩外, 其他各彩在$\alpha = 0.05$之下, 開出號碼無重複時之中獎比例大於有重複時之中獎比例的檢定結果為顯著。至於後對彩, 雖然沒有足夠證據顯示兩者間有差異, 但由U_x(X這組樣本超過Y那組樣本之總次數)及U_y(Y這組樣本超過X那組樣本之總次

數)值來看, 開出號碼無重複時之中獎比例的確較高。相同的結果, 可由各彩a/b之值觀察得到, 其中a為某彩累積的實際中獎數, b為某彩累積的期望中獎數。印證我們的猜測: 彩迷簽注四星彩時, 尚不十分習慣簽注重複的號碼。

對於四星彩每期開出的號碼, 我們還做了以下的觀察(見表2): 將四位數字由左至右分成兩組二位數字, 觀察這兩組二位數之數字為皆遞增、皆遞減或為其他等三種情況, 並給出各種情況之實際中獎人數與期望中獎人數之比例。例如: 若開出號碼為1234, 含12及34兩組二位數。則因12為遞增$(1 < 2)$, 34為遞增$(3 < 4)$, 所以此組號碼屬於皆遞增。若開出號碼為1143, 則因11二位數字重複, 所以將之歸類於其他。我們亦將這兩組二位數與42做比較, 觀察這兩組號碼是屬於皆不大於42, 皆大於42, 前大於42後不大於42, 或前不大於42後大於42之情況。例如: 若開出號碼為1243, 則因$12 \leq 42$, $43 > 42$, 所以此組號碼屬於前不大於後大於42的情況。

由中獎人數比例之觀察發現, 兩組號碼皆遞增之中獎比例較高, 其他情況中獎比例則較低。若與42比較, 則兩組號碼皆大於42 之中獎比例較低, 其他情況則尚符合其應有之比例。再度驗證我們的猜測: 彩迷簽注四星彩號碼時, 可能會受樂透彩簽注方式之影響。

此外, 我們也對若干各彩間中獎比例做WMW檢定(見表3), 發現彩迷簽注後三彩與後對彩之中獎比例, 較正彩、前三彩及前對彩之比例來得高。但若由各彩實際中獎注數與期望中獎注數之比例觀察, 卻是前三彩與前對彩之中獎比例高些。此矛盾之結果, 很可能是因為前三彩與前對彩有某些期之中獎比例特別高, 導致整體之中獎比例較高。

至92年6月30日開獎的1至37期裡, 正彩獎金比例最高者為第22期的119.68%, 該期開出之號碼為5026。次高為第6期的88.56%, 該期開出之號碼為2816, 剛好是九九乘法表口訣中的一個$(2 \times 8 = 16)$。獎金比例最低的是第29期的5.60%, 該期開出之號碼為9948, 有兩個重複的數字(99), 且兩組二位數99及48皆大於42。次低的為第27期的8.87%, 該期開出9494, 兩組相同的號碼94, 皆大於42, 且為遞減$(9 > 4)$。

第30與31期開出的號碼分別為0011與0055, 獎金比例雖未達該有的50%, 但與其他各期相比較, 還算不差。是因這種規律的數字$(00, 11, 55)$為彩迷所喜歡嗎? 相信隨著資料的增多, 應可逐漸較正確的判定其中的原因。

3. 樂透彩彩迷簽注之隨機性

彩迷簽注樂透彩之隨機性, 亦可由中獎注數, 得到一些初步的結論。假設某期銷售M注彩券, 令X_j表該期j獎以上之中獎注數, $j = 1, 2, 3, 4, 5$。此處將普獎視為伍獎。又令p_j表j獎以上之中獎機率。則如果是隨機選號的話, 如前

$$Z_j = \frac{X_j - Mp_j}{\sqrt{Mp_j(1-p_j)}} \approx \mathcal{N}(0,1),\ j = 2, 3, 4, 5,$$

且此趨近應很精準。至於X_1則以$\mathcal{P}(\lambda_1)$分佈當作近似, $\lambda_1 = Mp_1$, λ_1即為期望中頭獎注數。

由各期之Z_j值, 可一窺彩迷簽注樂透彩之隨機性, $|Z_j|$值愈大, 表實際中獎注數與期望中獎注數之差愈大, 意即彩迷簽注愈不隨機。為了解樂透彩彩迷簽注之隨機性, 是否隨著期數之增加而提高, 我們將至92年6月6日止, 總共開出的144期分為四組, 第$1-36$期為第一組, 第$37-72$期為第二組, 第$73-108$期為第三組, 第$109-144$期為第四組, 並利用WMW檢定法, 對任兩組間$|Z_j|$值的大小, 檢定H_0 :兩組間沒有差異, vs., H_a :兩組間有差異。表4列出各檢定結果。

由檢定結果之p值, 尚無充分證據做出彩迷簽注樂透彩之隨機性有顯著的提高之結論。我們以$|Z_j|$值之大小來量測簽注之隨機性, $|Z_j|$愈小表愈隨機, $|Z_j|$愈大表愈不隨機。大致有

$$\text{第一組隨機性} < \text{第二組隨機性} < \text{第四組隨機性} < \text{第三組隨機性}。$$

若對$j = 2, 3, 4, 5$分別來看, $j = 2, 4, 5$, 各組$|Z_j|$值仍有

$$\text{第一組}|Z_j| > \text{第二組}|Z_j| > \text{第四組}|Z_j| > \text{第三組}|Z_j|。$$

對於$|Z_3|$則有

$$\text{第四組}|Z_3| > \text{第一組}|Z_3| > \text{第二組}|Z_3| > \text{第三組}|Z_3|。$$

此結果顯示, 彩迷簽注的隨機性在第1期到第108期是有逐漸提高的趨勢, 但是由第109期到第144期, 彩迷簽注之隨機性又稍降了一點。

4. 四星彩及樂透彩開出號碼隨機性之檢定

若以$Y_1, Y_2, \cdots$表四星彩各期開出之獎號, 則所謂號碼為隨機地產生, 乃指$Y_1, Y_2, \cdots$為獨立且有共同分佈(即i.i.d.), 又共同分佈為在$\{0000, 0001, \cdots, 9998, 9999\}$ $10,000$組號碼中均勻分佈。由於一般均隱含地接受$Y_1, Y_2, \cdots$為i.i.d., 所以只需檢定均勻性。即只檢定$10,000$組號碼是否均有相同$1/10,000$的機會產生。但欲以皮爾生卡方(Pearsonχ^2)對這$10,000$組號碼, 做適合度檢定(goodness of fit test), 期望頻率必須至少為5。一年以$3 \times 52 = 156$期計, 大約需$5 \times 10,000/156 \doteq 321$年的時間, 這當然極不容易達到。因此, 需輔以其它檢定, 若能通過愈多檢定, 則愈有信心接受號碼為隨機產生。本研究欲檢定之事件包括各數字出現頻率(I)、偶數個數(II)、數字和(III)、最小間距(IV)、最大間距(V)、總間距數(VI)、數字重複(VII)、千位數字(VIII)、百位數字(IX)、十位數字(X)、個位數字(XI)、前二碼為重複、遞增或遞減(XII)、後二碼為重複、遞增或遞減(XIII)、前二碼及後二碼為皆遞增、皆遞減或其他(XIV)、前二碼及後二碼與42相比(XV)。I至XV各事件之機率見表5。

由四星彩目前開出的數據進行檢定, 大致符合隨機性(見表6)。

對於樂透彩開出號碼之隨機性, 我們共對六種不同的事件做檢定, 其中一種是檢定各號碼出現的頻率。由於每期頭獎6個號碼的產生, 是屬於取出後不放回的隨機取樣, 各號碼之出現次數並不獨立, 多項分佈在此不適用, 不能用傳統的卡方檢定, 我們採用Joe(1993)發展出的檢定法。檢定之詳細資料, 請參考黃文璋等(2002)一文。表7列出第$1-144$期的檢定結果。整體而言, 樂透彩開出號碼之隨機性尚不需懷疑。

5. 是否可能打敗隨機性

人的天性是否有隨機性? 要打敗隨機性的檢定是否容易?

如前言裡所提及, 我們曾於民國九十一年五月時, 找來35位學生, 要求每人填寫126組樂透彩號碼, 並對每個人簽注之號碼進行數字頻率、偶數個數、號碼和、最小間距、總間距數及連號等六種檢定(見表8)。大多數的學生均無法通過隨機性之測驗。這群學生中的20位, 於又修習一年數理統計課程後, 在九十二年六月, 再度接受測驗。每人填寫126組樂透彩號碼, 及100組四星彩號碼。結果顯示(見表8), 有些同學對樂透彩號碼隨機性之掌握, 提高不少。

分別對前述六種檢定先後兩次得到之p值做檢定, 以了解兩次測驗結果是否有差異。仍採用WMW檢定法。結果顯示學生對於最小間距、總間距數及連號等三種檢定有相當顯著之進步, 但對於數字頻率、偶數個數及號碼和等三種檢定, 雖稍有進步不過結果並不顯著。實驗結果顯示, 隨機性的能力似乎是可經對機率統計的愈了解而改進, 但也似乎不是那麼容易就可以大幅提昇。

另外, 學生似乎較能掌握四星彩之隨機性(見表9), 因為檢定結果之p值普遍較樂透彩檢定之p值大。這或許是因為四星彩的組合數較少, 較容易掌握隨機性。

6. 結論

自樂透彩券發行後, 網路上不乏熱心人士提供求明牌的程式, 各種包牌方式亦紛紛出現, 種類之多令人目不暇給。明牌當然不會有, 黃文璋等(2002)一文也說明對於樂透彩, 追求明牌之不智。有許多彩迷根本弄不清楚各包牌方式的原則, 就覺得包牌易中。其實不論是何種包牌法, 都基於"確定"某幾個號碼會開出。這個"假設"若成立, 則包牌成功。包牌法是經銷商鼓勵彩迷一次多買的一種促銷方式, 彩迷們不應盲目跟進。

四星彩各彩的期望獎金比例分別為50%及40%, 但開獎至今, 大部分的時候, 各獎項之獎金比例低於期望值(特別是正彩)。彩迷精挑細選的結果, 反比不上讓電腦隨機選號還容易中。話又說回來, 隨機選號, 期望所得僅為投資之50%(或40%), 每投資100元, 平均失去50元(或60元)。若真在乎淨所得, 多數人可能會因此卻步, 不會去買彩券。但不少人買彩券, 是基於想以小搏大, 或自認可打敗隨機性(以為能掌握某些中獎機會較大的號碼), 並不在乎此為一不公正的賭局。不過人腦不敵電腦, 倒是一有趣的現象。

雖然目前開出的期數有限, 且僅就中獎號碼之簽注數分析, 未免是以管窺天 。不過由於中獎號碼是隨機產生, 從中仍可看出一些端倪 。我們將持續收集相關數據, 並做統計分析, 以觀察彩迷簽注隨機性的趨勢 。

致謝詞: 感謝評審仔細閱讀本文並提供許多寶貴意見, 使本文得以更臻完善 。

參考文獻

1. 黃文璋, 洪宛頻, 羅夢娜(2002). 樂透彩開出號碼隨機性之檢定 。中國統計學報, 第四十卷第三期, 249-273 。

2. Engelhardt, B. (1992). Introduction to Probability and Mathematical Statistics, 2nd ed. PWS-KENT Publishing Company, Boston, Massachusetts.

3. Joe, H. (1993). Tests of uniformity for sets of lotto numbers. *Statistics and Probability Letters*, 16, 181-188.

表1. 四星彩1－37期之開獎數據

期	號碼	正彩				前三彩				後三彩				前對彩				後對彩			
		N_1	X_1	$R_1\%$	U_1	N_2	X_2	$R_2\%$	U_2	N_3	X_3	$R_3\%$	U_3	N_4	X_4	$R_4\%$	U_4	N_5	X_5	$R_5\%$	U_5
1	4787	2187727	95	21.71	-8.37	378468	912	120.49	27.44	326959	202	30.89	-6.91	311286	5492	70.57	42.86	342721	4805	560.8	23.65
2	6651	1732652	31	8.95	-10.81	364265	160	21.96	-10.71	327587	204	31.14	-6.83	338480	1354	16.00	-35.08	376240	2549	27.10	-19.88
3	3400	1722593	58	16.84	-8.71	331541	254	38.31	-4.26	300785	85	14.13	-12.45	293273	4523	61.69	29.51	334740	1387	16.57	-34.05
4	3933	1397552	78	27.91	-5.22	283608	214	37.73	-4.14	256122	218	42.56	-2.38	266727	3031	45.45	7.08	292029	3324	45.53	7.51
5	3351	1503278	97	32.26	-4.35	290499	160	27.54	-7.66	268225	166	30.94	-6.24	283171	1782	25.17	-19.83	321903	1560	19.38	-29.39
6	2816	1338051	237	88.56	8.92	232197	354	76.23	8.00	217128	260	59.87	2.91	231692	4827	83.33	52.41	259047	2692	41.57	2.00
7	9856	1275349	81	31.76	-4.12	227824	91	19.97	-9.07	211584	183	43.25	-1.97	228557	1028	17.99	-26.44	251109	2503	39.87	-0.16
8	6717	1215191	51	20.98	-6.40	211398	342	80.89	8.99	204606	151	36.90	-3.75	209501	2312	44.14	4.76	242591	2863	47.21	8.92
9	4790	1137167	97	42.65	-1.57	189528	159	41.95	-2.22	179032	151	42.17	-2.10	183506	2254	49.13	9.83	216414	1353	25.01	-17.52
10	8495	990565	56	28.27	-4.33	174052	92	26.43	-6.22	166979	98	29.35	-5.34	171843	959	22.32	-18.41	200663	1324	26.39	-15.32
11	3564	1009685	135	66.85	3.39	169184	393	116.15	17.22	162376	114	35.10	-3.80	163260	2914	71.40	31.87	186387	1198	25.71	-15.50
12	6814	944927	75	39.69	-2.01	144380	153	52.99	0.72	135074	98	36.28	-3.19	143225	1491	41.64	1.56	157677	1491	37.82	-2.17
13	2724	916183	53	28.92	-4.03	155764	214	68.69	4.67	147207	113	38.38	-2.82	150926	2197	58.23	17.79	169899	1800	42.38	2.46
14	9870	938471	56	29.84	-3.91	154838	116	37.46	-3.12	145317	85	29.25	-5.01	157440	812	20.63	-19.31	175317	925	21.10	-19.88
15	1562	852484	94	55.13	0.95	127497	310	121.57	16.17	114943	126	54.81	1.03	125569	2049	65.27	22.50	134902	1001	29.68	-9.52
16	9373	848931	35	20.61	-5.42	142912	91	31.84	-4.34	130448	99	37.95	-2.75	132888	602	18.12	-20.04	148125	1216	32.84	-6.93
17	1929	870877	124	71.19	3.96	142434	156	54.76	1.14	131240	108	41.15	-2.03	133430	1200	35.97	-3.70	148608	2047	55.10	14.62
18	7699	814528	21	12.89	-6.70	121000	66	27.27	-5.00	110166	51	23.15	-5.64	116313	830	28.54	-9.82	129245	691	21.39	-16.81
19	5930	792884	47	29.64	-3.63	123866	83	33.50	-3.67	117427	100	42.58	-1.61	120112	962	32.04	-6.93	137406	1426	41.51	1.41
20	3834	796068	63	39.57	-1.86	125277	129	51.49	0.33	121603	107	44.00	-1.32	118467	2041	68.91	25.00	139203	1648	47.36	6.90
21	3972	767651	91	59.27	1.62	111918	95	42.44	-1.60	101847	139	68.24	3.68	108390	1270	46.87	5.68	125156	1033	33.01	-6.21
22	5026	756153	181	119.68	12.12	114941	116	50.46	0.10	111825	169	75.56	5.41	112077	1011	36.08	-3.30	131861	3558	107.93	61.98
23	0436	846577	80	47.25	-0.51	120271	58	24.11	-5.68	119744	112	46.77	-0.71	121142	1148	37.91	-1.83	156587	2333	59.60	19.48
24	2143	762290	88	57.72	1.35	99108	258	130.16	15.97	100603	69	34.29	-3.15	102457	1644	64.18	19.45	132870	1438	43.29	3.01
25	2617	774006	103	66.54	2.91	110654	96	43.38	-1.39	111763	131	58.61	1.82	107771	1067	39.60	-0.33	135509	1311	38.70	-1.20
26	3996	720179	32	22.22	-4.72	99794	46	23.05	-5.39	100766	41	20.34	-5.96	103134	1466	56.86	13.60	127815	668	20.91	-17.15
27	9494	788821	14	8.87	-7.31	101066	26	12.86	-7.47	100885	52	25.77	-4.87	106330	503	18.92	-17.27	128370	618	19.26	-18.67
28	3041	791526	60	37.90	-2.15	104518	87	41.62	-1.71	109849	43	19.57	-6.38	109071	831	30.48	-7.90	135419	902	26.64	-12.35
29	9948	892314	10	5.60	-8.39	113621	33	14.52	-7.57	117973	105	44.50	-1.19	118301	528	17.85	-19.14	149214	2825	75.73	34.68
30	0011	753735	69	45.77	-0.73	93596	36	19.23	-5.96	90744	52	28.65	-4.07	100850	461	18.28	-17.33	111101	1072	38.60	-1.18
31	0055	744988	55	36.91	-2.26	93648	37	19.75	-5.86	88418	69	39.02	-2.07	104050	331	12.72	-22.11	112067	894	31.91	-6.81
32	7315	844103	60	35.54	-2.66	96918	70	36.11	-2.74	93516	100	53.47	0.67	105014	695	26.47	-11.01	119398	1482	49.65	8.38
33	3567	689988	89	64.49	2.41	79237	129	81.40	5.59	74604	131	87.80	6.53	83201	915	43.99	2.89	91394	805	35.23	-3.62
34	9348	729969	55	37.67	-2.11	89808	56	31.18	-3.57	87647	100	57.05	1.32	93027	517	22.23	-13.62	102545	923	36.00	-3.22
35	6138	762486	113	74.10	4.21	93351	129	69.09	3.69	94175	150	79.64	5.76	99559	756	30.37	-7.63	110129	1943	70.57	25.49
36	8652	702036	53	37.75	-2.05	79183	66	41.68	-1.48	77947	61	39.13	-1.92	83814	929	44.34	3.15	99661	892	35.80	-3.33
37	6081	666926	43	32.24	-2.90	78405	30	19.13	-5.47	78922	34	21.54	-5.06	78342	435	22.21	-12.51	88730	644	29.03	-8.21
合計				38.31	-14.08			50.40	0.61			39.34	-15.73			40.72	4.26			38.08	-12.20

R_i值, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, 分別表正彩、前三彩、後三彩、前對彩、後對彩各期之獎金比例。

表2. 四星彩1－37期開獎號碼有無重複之中獎比例的比較

正彩	b	a	a/b
有重複	1790.56	886	0.49
無重複	1837.33	1894	1.03
合計	3627.89	2780	0.77

前三彩	b	a	a/b
有重複	1721.14	1055	0.61
無重複	4049.43	4762	1.18
合計	5770.57	5817	1.01

前對彩	b	a	a/b
有重複	9448.52	4456	0.47
無重複	46713.44	52711	1.13
合計	56161.96	57167	1.02

後三彩	b	a	a/b
有重複	1841.14	1128	0.61
無重複	3594.90	3149	0.88
合計	5436.04	4277	0.79

後對彩	b	a	a/b
有重複	9791.82	7368	0.75
無重複	54428.70	53776	0.99
合計	64220.52	61144	0.95

a:實際中獎數

b:期望中獎數

各彩之WMW檢定

H_0:開出號碼有重複之中獎比例=開出號碼無重複之中獎比例,

H_a:開出號碼有重複之中獎比例<開出號碼無重複之中獎比例 。

	正彩	前三彩	前對彩	後三彩	後對彩
U_x	50	57	9	62	55
n_x	16	10	5	11	5
U_y	286	213	151	224	105
n_y	21	27	32	26	32
p值	0.0001	0.0038	0.0008	0.0036	0.1333

註: n_x表有重複之期數, n_y表無重複之期數 。

前二碼及後二碼	b	a	a/b
皆遞增	839.19	875	1.04
皆遞減	648.96	405	0.62
其他	2139.75	1500	0.70
合計	3627.89	2780	0.77

前二碼及後二碼與42相比	b	a	a/b
皆不大於	1020.72	925	0.91
皆大於	1370.55	647	0.47
前大於後不大於	531.57	527	0.99
前不大於後大於	705.05	681	0.97
合計	3627.89	2780	0.77

表3. 四星彩1 − 37期若干彩間中獎比例之WMW檢定

H_0:兩彩中獎比例相等,

H_a:兩彩中獎比例不等 。

	正彩, 前三彩	正彩, 前對彩	前三彩, 後三彩	前對彩, 後對彩
U_x	617	547	683	667
U_y	752	822	686	702
p值	0.2328	0.0686	0.4935	0.4250

表4. 樂透彩$1-144$期分四組檢定各組間之$|Z_j|$值大小

H_0:兩組間沒有差異, H_a:兩組間有差異 。

$1-36$ vs. $37-72$

	$\|Z_2\|$	$\|Z_3\|$	$\|Z_4\|$	$\|Z_5\|$
U_x	713	693	734	714
U_y	583	603	562	582
p值	0.2321	0.3061	0.1164	0.2286

$37-72$ vs. $73-108$

	$\|Z_2\|$	$\|Z_3\|$	$\|Z_4\|$	$\|Z_5\|$
U_x	778	680	732	732
U_y	518	616	564	564
p值	0.0716	0.3592	0.1721	0.1721

$73-108$ vs. $109-144$

	$\|Z_2\|$	$\|Z_3\|$	$\|Z_4\|$	$\|Z_5\|$
U_x	623	544	514	560
U_y	673	752	782	736
p值	0.3891	0.1207	0.0656	0.1608

$1-36$ vs. $73-108$

	$\|Z_2\|$	$\|Z_3\|$	$\|Z_4\|$	$\|Z_5\|$
U_x	836	732	831	819
U_y	460	564	465	477
p值	0.0171	0.1721	0.0196	0.0271

$1-36$ vs. $109-144$

	$\|Z_2\|$	$\|Z_3\|$	$\|Z_4\|$	$\|Z_5\|$
U_x	827	646	682	735
U_y	469	650	614	561
p值	0.0219	0.5090	0.3509	0.1636

$37-72$ vs. $109-144$

	$\|Z_2\|$	$\|Z_3\|$	$\|Z_4\|$	$\|Z_5\|$
U_x	774	611	581	661
U_y	522	685	715	635
p值	0.0779	0.6616	0.7747	0.4418

表5. I至XV各事件之機率分佈

數字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
機率	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000

偶數個數	0	1	2	3	4
機率	0.0625	0.2500	0.3750	0.2500	0.0625

數字和	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
機率	0.0001	0.0004	0.0010	0.0020	0.0035	0.0056	0.0084	0.0120	0.0165	0.0220
數字和	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
機率	0.0282	0.0348	0.0415	0.0480	0.0540	0.0592	0.0633	0.0660	0.0670	0.0660
數字和	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
機率	0.0633	0.0592	0.0540	0.0480	0.0415	0.0348	0.0282	0.0220	0.0165	0.0120
數字和	30	31	32	33	34	35	36			
機率	0.0084	0.0056	0.0035	0.0020	0.0010	0.0004	0.0001			

最小間距	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3
機率	0.0299	0.0592	0.0873	0.1136	0.1375	0.1504	0.1438
最小間距	-2	-1	0	1	2	3	
機率	0.1202	0.0866	0.0505	0.0175	0.0034	0.0001	

最大間距	-3	-2	-1	0	1	2	3
機率	0.0001	0.0034	0.0175	0.0505	0.0866	0.1202	0.1438
最大間距	4	5	6	7	8	9	
機率	0.1504	0.1375	0.1136	0.0873	0.0592	0.0299	

總間距數	1	2	3
機率	0.0034	0.1568	0.8398

數字重複	全異	12	13	14	23	24	34	12, 34	13, 24	14, 23
機率	0.5040	0.0720	0.0720	0.0720	0.0720	0.0720	0.0720	0.0090	0.0090	0.0090
數字重複	123	124	134	234	1234					
機率	0.0090	0.0090	0.0090	0.0090	0.0010					

千位數字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
機率	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000

百位數字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
機率	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000

十位數字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
機率	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000

個位數字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
機率	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000

前二碼	重複	遞增	遞減
機率	0.1000	0.4500	0.4500

後二碼	重複	遞增	遞減
機率	0.1000	0.4500	0.4500

前二碼及後二碼	皆遞增	皆遞減	其他
機率	0.2025	0.2025	0.5950

前二碼及後二碼與42相比	皆不大於	皆大於	前大於後不大於	前不大於後大於
機率	0.1849	0.3249	0.2451	0.2451

表6. 四星彩1－37期開出號碼之隨機性檢定

數字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Q_1	d.f.	p值
O_i	13	15	10	21	15	13	17	13	12	19	6.86	9	0.65
E_i	14.8	14.8	14.8	14.8	14.8	14.8	14.8	14.8	14.8	14.8			

偶數個數	0	1	2	3	4	Q_2	d.f.	p值
O_i	4	7	18	8	0	2.35	2	0.31
E_i	2.3125	9.25	13.875	9.25	2.3125			

數字和	[0, 13]	[14, 16]	[17, 19]	[20, 22]	[23, 36]	Q_3	d.f.	p值
O_i	8	5	8	7	9	0.52	4	0.97
E_i	8.29	6.53	7.36	6.53	8.29			

最小間距	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	Q_4	d.f.	p值
O_i	1	0	5	5	8	6	4	1	4	2	1	0	0	2.11	3	0.55
E_i	1.11	2.19	3.23	4.20	5.09	5.56	5.32	4.45	3.20	1.87	0.65	0.13	0.00			

最大間距	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Q_5	d.f.	p值
O_i	0	0	2	1	3	3	5	9	6	6	0	2	0	4.98	3	0.17
E_i	0.00	0.13	0.65	1.87	3.20	4.45	5.32	5.56	5.09	4.20	3.23	2.19	1.10			

總間距數	1	2	3	Q_6	d.f.	p值
O_i	0	8	29	0.86	1	0.35
E_i	0.13	5.80	31.07			

數字重複	全異	12	13	14	23	24	34	12, 34	13, 24	14, 23	123	124	134	234	1234	Q_7	d.f.	p值
O_i	21	3	2	0	1	4	2	2	1	0	0	0	1	0	0	1.62	3	0.65
E_i	18.65	2.66	2.66	2.66	2.66	2.66	2.66	0.33	0.33	0.33	0.33	0.33	0.33	0.33	0.04			

註: 12表千位數字與百位數字相同; 12, 34表千位數字與百位數字相同, 且十位數字與個位數字相同, 餘類推 。

千位數字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Q_8	d.f.	p值
O_i	3	2	4	9	2	2	5	2	2	6	6.65	4	0.16
E_i	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7			

百位數字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Q_9	d.f.	p值
O_i	5	2	0	4	4	3	4	4	5	6	3.41	4	0.49
E_i	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7			

十位數字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Q_{10}	d.f.	p值
O_i	1	6	3	5	4	5	3	3	2	5	0.70	4	0.95
E_i	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7			

個位數字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Q_{11}	d.f.	p值
O_i	4	5	3	3	5	3	5	4	3	2	1.78	4	0.78
E_i	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7			

前二碼	重複	遞增	遞減	Q_{12}	d.f.	p值
O_i	5	18	14	0.77	1	0.38
E_i	3.7	16.65	16.65			

後二碼	重複	遞增	遞減	Q_{13}	d.f.	p值
O_i	5	15	17	0.01	1	0.91
E_i	3.7	16.65	16.65			

前二碼及後二碼	皆遞增	皆遞減	其他	Q_{14}	d.f.	p值
O_i	9	8	20	0.52	2	0.77
E_i	7.49	7.49	22.02			

前二碼及後二碼與42相比	皆不大於	皆大於	前大於後不大於	前不大於後大於	Q_{15}	d.f.	p值
O_i	10	13	6	8	2.70	3	0.44
E_i	6.84	12.02	9.07	9.07			

表7. 樂透彩1 − 144期頭獎號碼以$Q_1 - Q_6$做檢定

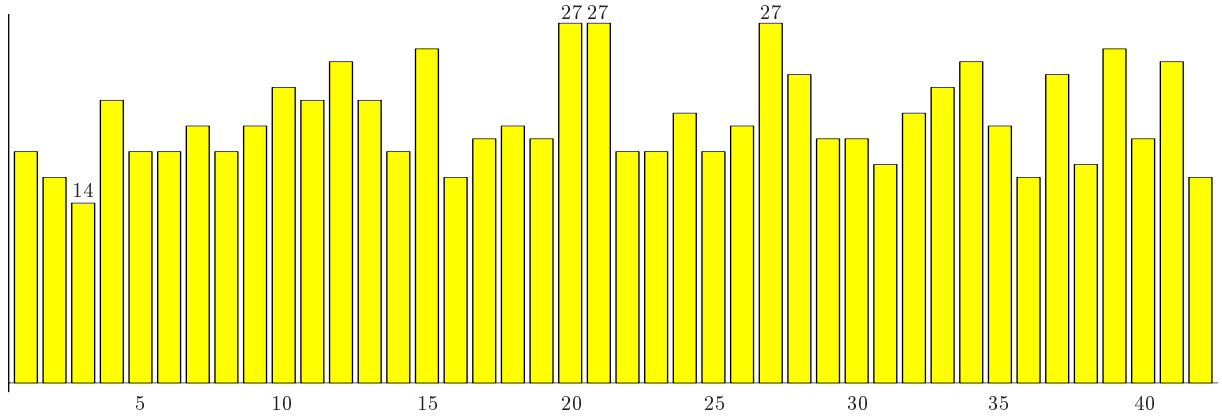

圖1. 各號碼出現頻率直方圖

各號碼

E_i	Q_1	d.f.	p值
20.57	30.13	41	0.89

偶數個數	0	1	2	3	4	5	6	Q_2	d.f.	p值
O_i	4	7	41	45	40	6	1	5.66	4	0.23
E_i	1.49	11.73	34.50	48.56	34.50	11.73	1.49			

號碼和	$[21, 99)$	$[99, 113)$	$[113, 124)$	$[124, 135)$	$[135, 146)$	$[146, 160)$	$[160, 238)$	Q_3	d.f.	p值
O_i	16	23	21	13	24	23	24	6.61	6	0.36
E_i	20.22	20.27	20.51	22.00	20.51	20.27	20.22			

最小間距	1	2	3	4	5	6	7	8	Q_4	d.f.	p值
O_i	79	44	16	5	0	0	0	0	1.91	3	0.59
E_i	80.18	38.94	16.75	6.08	1.71	0.31	0.03	0.00			

總間距數	1	2	3	4	5	Q_5	d.f.	p值
O_i	0	1	13	69	61	0.37	2	0.83
E_i	0.00	0.76	15.53	67.22	60.49			

連號	111111	21111	2211	3111	321	411	222	42	51	33	6	Q_6	d.f.	p值
O_i	65	60	12	6	1	0	0	0	0	0	0	0.79	3	0.85
E_i	63.82	59.83	10.88	7.25	1.28	0.64	0.21	0.04	0.04	0.02	0.00			

表8. 高雄大學應用數學系20位學生二次樂透彩隨機性測驗$Q_1 - Q_6$檢定之p值

代碼	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
1	0.0001(0.0000)	0.3392(0.4524)	0.0000(0.0000)	0.0400(0.6672)	0.0000(0.0035)	0.0000(0.1305)
2	0.0000(0.0000)	0.0002(0.2414)	0.1904(0.0035)	0.0377(0.4100)	0.0000(0.8409)	0.0000(0.6836)
3	0.0000(0.0000)	0.2851(0.5607)	0.0000(0.0003)	0.0182(0.0019)	0.0000(0.1104)	0.0000(0.1506)
4	0.0000(0.0000)	0.0201(0.0236)	0.6428(0.1215)	0.6662(0.1355)	0.8441(0.7615)	0.4554(0.0626)
5	0.7364(0.0000)	0.8340(0.0000)	0.3275(0.0664)	0.3158(0.5429)	0.9353(0.8384)	0.0709(0.0808)
6	0.0000(0.0000)	0.2086(0.2503)	0.0005(0.3713)	0.0010(0.9373)	0.0000(0.5431)	0.0000(0.4443)
7	0.0002(0.0000)	0.9500(0.3019)	0.5754(0.0012)	0.5201(0.3246)	0.0191(0.4797)	0.0800(0.5233)
8	0.0122(0.1937)	0.8210(0.6392)	0.0716(0.0398)	0.7372(0.0513)	0.8441(0.0000)	0.9371(0.0273)
9	0.0000(0.0000)	0.0010(0.0307)	0.7621(0.4806)	0.0000(0.0792)	0.0003(0.0041)	0.0000(0.0493)
10	0.0000(0.0023)	0.3030(0.9685)	0.0000(0.0072)	0.0000(0.1973)	0.0000(0.8397)	0.0023(0.9317)
11	0.0000(0.0012)	0.5515(0.5162)	0.1817(0.0071)	0.0021(0.0185)	0.0000(0.0000)	0.0000(0.0000)
12	0.0000(0.0000)	0.0206(0.1854)	0.0129(0.0005)	0.0747(0.0246)	0.0000(0.0000)	0.0000(0.0000)
13	0.0000(0.6974)	0.0071(0.4973)	0.0080(0.0528)	0.0000(0.0337)	0.0001(0.4535)	0.0134(0.3425)
14	0.0000(0.0000)	0.1083(0.0000)	0.0304(0.0000)	0.2754(0.4937)	0.2737(0.0482)	0.2717(0.9310)
15	0.0025(0.4215)	0.0441(0.0002)	0.0000(0.0000)	0.0000(0.0000)	0.0000(0.0000)	0.0000(0.0000)
16	0.0000(0.0000)	0.0658(0.3320)	0.1627(0.0864)	0.0010(0.3053)	0.0000(0.2635)	0.0000(0.1322)
17	0.0749(0.0241)	0.5522(0.1610)	0.1029(0.0784)	0.0390(0.0409)	0.0000(0.1969)	0.0000(0.0316)
18	0.0000(0.0000)	0.7742(0.3577)	0.0000(0.0035)	0.0064(0.0093)	0.2893(0.0000)	0.1039(0.0000)
19	0.0000(0.0000)	0.3577(0.0075)	0.0035(0.0000)	0.0093(0.4208)	0.0000(0.5243)	0.0000(0.0033)
20	0.1771(0.0000)	0.0000(0.0021)	0.0000(0.0000)	0.0000(0.0016)	0.0000(0.0003)	0.0000(0.0000)

註: 各學生之刮號外數據為民國91年5月27日之測驗結果, 刮號內為民國92年6月11日之測驗結果。

先後兩次p值之WMW檢定

H_0: 兩組p值沒有差異, vs. H_a: 第一次p值<第二次p值。

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
U_x	205	221.5	232	120.5	124.5	111
U_y	195	178.5	168	279.5	275.5	289
p值	0.5538	0.7196	0.8066	0.0158	0.0206	0.0080

表9. 高雄大學應用數學系20位學生各簽注100組四星彩號碼各檢定之p值

代碼	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV
1	0.16	0.77	0.10	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	0.76	0.04	0.22	0.00	0.07	0.12	0.15
2	0.02	0.40	0.15	0.28	0.00	0.01	0.34	0.00	0.00	0.32	0.62	0.01	0.46	0.09	0.00
3	0.00	0.01	0.00	0.11	0.25	1.00	0.20	0.10	0.68	0.00	0.00	0.06	0.00	0.03	0.00
4	0.09	0.96	0.96	0.01	0.41	0.17	0.00	0.17	0.03	0.28	0.13	0.34	0.03	0.53	0.98
5	0.00	0.62	0.59	0.42	0.27	0.58	0.01	0.33	0.08	0.70	0.20	0.01	0.11	0.30	0.92
6	0.00	0.34	0.08	0.19	0.35	0.58	0.01	0.01	0.02	0.01	0.12	0.18	0.06	0.23	0.23
7	0.19	0.44	0.70	0.00	0.10	0.03	0.00	0.10	0.06	0.12	0.51	0.80	0.13	0.10	0.17
8	0.61	0.51	0.81	0.20	0.46	0.78	0.18	0.48	0.57	0.82	0.17	0.58	0.24	0.48	0.48
9	0.00	0.43	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00	0.01	0.00	0.01	0.00	0.00
10	0.75	0.96	0.70	0.19	0.99	0.59	0.87	0.10	0.99	0.92	0.53	0.98	0.50	0.82	0.50
11	0.07	0.50	0.27	0.98	0.44	0.27	0.08	0.33	0.85	0.20	0.36	0.56	0.56	0.06	0.20
12	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.57	0.00	0.05	0.24	0.00	0.00	0.03	0.01
13	0.99	0.54	0.68	0.99	0.62	0.27	0.34	0.99	0.85	0.85	0.83	0.98	0.14	0.45	0.34
14	0.00	0.40	0.00	0.87	0.03	0.79	0.32	0.40	0.09	0.68	0.89	0.80	0.00	0.04	0.05
15	0.73	0.37	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.48	0.49	0.97	0.82	0.00	0.00	0.00	0.02
16	0.00	0.49	0.72	0.20	0.17	0.42	0.30	0.13	0.04	0.64	0.05	0.82	0.09	0.84	0.56
17	0.03	0.72	0.58	0.16	0.03	0.03	0.42	0.94	0.29	0.00	0.11	0.34	0.37	0.14	0.38
18	0.00	0.03	0.03	0.27	0.10	0.41	0.00	0.00	0.22	0.00	0.01	0.00	0.09	0.20	0.69
19	0.00	0.56	0.06	0.06	0.09	0.69	0.34	0.14	0.24	0.36	0.08	0.23	0.00	0.27	0.89
20	0.11	0.64	0.24	0.73	0.49	0.00	0.00	0.03	0.00	0.00	0.24	0.00	0.00	0.42	0.02

I: 數字頻率　II: 偶數個數　III: 數字和　IV: 最小間距　V: 最大間距　VI: 總間距數

VII: 數字重複　VIII: 千位數字　IX: 百位數字　X: 十位數字　XI: 個位數字

XII: 前二碼重複、遞增或遞減　XIII: 後二碼重複、遞增或遞減

XIV: 前二碼及後二碼皆遞增、皆遞減或其他

XV: 前二碼及後二碼與42相比

An Investigation on the Randomness of the Signed Lottery

Wen-Jang Huang

Department of Applied Mathematics

National University of Kaohsiung

Wan-Ping Hung

Department of Applied Mathematics
National Sun-Yat Sen University

ABSTRACT

The four star game draws a four digits ordered number from 0000-9999 in every game. There are five ways to play in signed lottery including the main lottery (signed all four numbers). As the probability of winning is higher compared with the regular lottery in the four star game, each time there are more winning people in each way of playing the game. Therefore although there are only few games played up to now, from the number of winning people in each game, we can already observe some interesting phenomena. In this work, we not only examine whether the regular lottery and four star game winning numbers are random, we also analyze the randomness of the lottery players according to the number of winning people each time, but also examine whether the randomization ability for the lottery players increases graduately as the number of games cumulates. Finally, we use a set of data to illustrate whether people would raise their ability in picking numbers more randomly with more understanding on probability and statistics concepts.

Key words and phrases: Four star game, chi-square fitness test, lottery game, randomness, Wilcoxon and Mann-Whitney test.