

樂透彩開出號碼隨機性之檢定

黃文章¹

國立高雄大學應用數學系

洪宛頻、羅夢娜²

國立中山大學應用數學系

摘要

樂透彩開出的號碼均強調隨機性。自民國九十一年起台北銀行發行公益彩券。本文擬對已開出的樂透彩號碼是否符合隨機性,做一些統計檢定。另外,我們亦對所收集到之不同群組的人簽注的樂透彩號碼,做統計分析,以了解人們在選取號碼時,隨機性的能力。我們想看若以個人當做隨機生成器,其表現如何。

關鍵詞: 卡方適合度檢定, 成對, 取樣不放回, 連號, 最小間距, 最大間距, 樂透彩, 號碼和, 隨機性, 總間距數。

美國數學會分類索引: 主要62F03; 次要62D05。

1. 前言

民國九十一年一月起,台北銀行(以下簡稱北銀)發行公益彩券,其中的樂透彩是最引人注目的。我們先說明一下樂透彩的玩法。

一般的樂透彩是從1至 n 的號碼中,任意挑選 r 個不同的號碼下注。我們稱此為 n 取 r 。例如,美國伊利諾州是54取6,瑞典是35取7。台北銀行目前的版本為42取6,與愛爾蘭及美國的一些州一樣。各地樂透彩的中獎方式均大同小異,每一期由發行單位隨機地產生 r 個號碼,就是頭獎號碼,另加一特別號。底下我們以北銀版本來說明。6碼全中為頭獎,與開出的號碼順序無關;中5碼及特別號為貳獎;中5碼為參獎,中4碼為肆獎,中3碼為普獎。每期提撥之總獎金,為當期總銷售金額的56%(一張樂透彩券賣50元)。普獎獎金每注200元,在普獎的獎金分配完後,將剩餘的獎金依38%, 12%, 15%, 35%的比例,分到頭獎、貳獎、參獎、肆獎。頭獎至肆獎,皆是由所有中的號碼之擁有者,均分該獎之獎金。若某期某一獎項無人獲得,則該獎之獎金移至下期同一獎項,最多累積5期。若連續5期無人獲獎時,則累積之獎金併入次期之總獎金中。各獎之中獎機率如表1。總共中獎機率約為0.02906。又一張彩券中約有8.57元充當頭獎獎金。其他有關中獎的相關資料可參考劉應興(2002),及“機率統計網路學習館”網站,網址為<http://probbat.nuk.edu.tw/>。

¹本研究由國科會支助,計畫編號: NSC 90-2521-S-390-001。

²本研究由國科會支助,計畫編號: NSC 90-2521-S-110-003。

表1. 42取6之樂透彩各獎中獎機率

頭獎	貳獎	參獎	肆獎	普獎
$\frac{1}{5,245,786}$	$\frac{6}{5,245,786}$	$\frac{210}{5,245,786}$	$\frac{9,450}{5,245,786}$	$\frac{142,800}{5,245,786}$

樂透彩雖有公益之名，但對購買者，於奉獻愛心的同時，若能幸運與愛心同在，也是很甜美的。第一希望中大獎，第二希望獎金高。如果每期頭獎號碼真的是隨機產生，則任何一組號碼，皆有 $1/\binom{42}{6}$ 的機會。亦即不論是簽“看起來”不像會中的 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，或將上一期頭獎號碼照樣簽，甚至地震牌、墜機牌，中獎機率都是 $1/\binom{42}{6}$ ，不會變大也不會變小。想要增大中大獎的機會，唯一的辦法是多買。又如果中大獎時，是獨得，或相對而言較少的人與你同得，則便可分到較多的獎金。所以提高期望所得的原則為

1. 若簽兩注以上，不要有兩注超過3碼重複，
2. 要儘量簽冷僻的號碼。

本來樂透彩由於總獎金只佔當期總銷售金額的56%，加上又要扣稅，淨所得之期望值必然是負的。但若策略正確，依據上述二原則，是有可能使淨所得之期望值為正。以一簡單的2取1之樂透彩為例。總獎金仍佔總銷售金額的56%。只有一個獎，且亦是由所有中的號碼之擁有者均分獎金。現假設有90%之投注者簽1，10%之投注者簽2，顯然此時簽注2之期望淨所得便為正。Chernoff(1981)一文，可說是較早引進避免簽注熱門號碼，而使期望淨所得為正之概念者。

Henze(1997)一文，及Henze and Riedwyl(1998)一書，收集一些各地樂透彩券之熱門號碼。德國(是49取6)1993年10月16日的那一期，最熱門的那組號碼 $\{7, 13, 19, 25, 31, 37\}$ 簽了4,004注，一直到排名20都還有1,317注。簽這種號碼如果中頭獎是不會太高興的。北銀樂透彩1至42期中，頭獎每注所得獎金最高者為第31期，該期僅有1注中頭獎(期望中獎注數為5.06)，加上第30期(該期無人中頭獎)累積的獎金，獨得獎金346,747,877元。頭獎每注所得獎金最低者為第33期，該期共有13注中頭獎(期望中獎注數為2.70)，每注分得獎金8,723,849元。這就是簽熱門號碼中獎的後果。這一期頭獎號碼為 $\{2, 9, 18, 20, 27, 36\}$ ，其中9的倍數全開出。每注頭獎獎金分得次少的為第22期，該期共有11注得頭獎(期望中獎注數為2.75)。該期頭獎號碼為 $\{7, 10, 14, 17, 27, 37\}$ ，個位數是7的號碼全部開出。上述這些現象，顯示在本地熱門號碼很可能存在。不但如此，在本文中我們將看到，“彩民”們的簽注往往很不隨機。附帶一提，每期中頭獎注數除以期望中頭獎注數，所得值愈大者，表示該期每注頭獎獎金分得愈少。

附錄1給出北銀樂透彩1至42期每期開出的號碼、銷售注數，及各獎中獎注數等相關數據。假設某期銷售 N 注彩券。令 X_i 表該期 i 獎以上之中獎注數， $i = 1, 2, 3, 4, 5$ 。此處為了方便，將普獎視為伍獎。又令 p_i 表 i 獎以上之中獎機率。則如果是隨機選號的話，由二項分佈趨

近至常態分佈，我們有

$$(1) \quad Z_i = \frac{X_i - Np_i}{\sqrt{Np_i(1-p_i)}} \approx \mathcal{N}(0, 1), \quad i = 2, 3, 4, 5,$$

並且由於 N 很大，通常超過1千萬， Np_i 也不小(除了 Np_1 外)，此趨近應很精準。至於 X_1 則以 $\mathcal{P}(\lambda_1)$ 分佈當作近似， $\lambda_1 = Np_1$ ， λ_1 即為期望中頭獎注數。 Z_i 值介於-3與3間之機率應約為0.9974，至於 $|Z_i| > 10$ 的可能性應是微乎其微。附錄1中給出各期 $\lambda_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5$ 之值。

表2以Mathematica 軟體模擬出 N 組號碼，其中 $N =$ 第30期的總銷售注數，在第30期開出的號碼之下，列出各獎中獎注數，並求出對應的 $\lambda_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5$ 。此模擬作3次。

表2. 模擬三次第30期樂透彩中獎情況

	頭獎號碼						特別號	銷售注數	中獎注數					λ值	Z值				
									頭	貳	參	肆	普	λ ₁	Z ₂	Z ₃	Z ₄	Z ₅	
模擬I	7	15	17	18	28	36	8	13210954	0	14	523	23902	359496	2.52	-0.86	-0.41	0.60	-0.06	
模擬II	7	15	17	18	28	36	8	13210954	2	11	531	23753	359210	2.52	-1.10	-0.11	-0.31	-0.76	
模擬III	7	15	17	18	28	36	8	13210954	5	20	513	23777	359305	2.52	1.76	-0.36	-0.19	-0.58	

附錄1中的 Z_5 最大為297.97，最小為-237.86。除了第35期以外，沒有一個 Z_5 介於-13與13間。 $|Z_3|$ 與 $|Z_4|$ 也都偏大，只有 $|Z_2|$ 小些。由於普獎只要中3碼，中獎注數最多，因此 Z_5 之變異較大；貳獎本來中獎注數就不致太多，因此 $|Z_2|$ 尚不會太偏離。由 $|Z_i|$ 值之過大，顯示彩民們簽注號碼過於集中，當開出的號碼落在其集中處， Z_i 便為正且 $|Z_i|$ 較大，當開出的號碼不落在其集中處， Z_i 便為負且 $|Z_i|$ 較大。至於表2中三組模擬產生之 $|Z_i|$ 之值均不太大，皆介於-2與2之間。頭獎中獎注數由於通常每期均不太多，與期望中獎注數 λ_1 之絕對差不致於太大。但若42期一起看，總共中頭獎注數126，便遠小於總共期望中頭獎注數145.83。此值對應之 Z 值為-1.64顯然偏低。這告訴我們彩民們瘋狂追求明牌的後果，不如讓電腦選注，可能還較易中頭獎。第33期的 Z_3 (對應至少中5碼)及 Z_4 (對應至少中4碼)，分別達到 $\{Z_3\}$ 及 $\{Z_4\}$ 之極大值及次大值，顯示該期頭獎號碼中有好幾個是極熱門的。至於第40期的 Z_4 則達到 $\{Z_4\}$ 之極大值，也是熱門號碼所造成。

Haigh (1995)曾探討英國樂透彩(UK National Lottery)彩民之選號。他們是49取6，玩法則與北銀樂透彩相同。該文列出首30期之 Z_5 的值，其中最大者為704，最小者為-430。其選號之集中亦相當明顯。

附錄1尚顯示一有趣的現象。我們先定義最小間距(smallest spacing, 又稱minimum gap, 簡寫為MG)。所謂最小間距，是指一組號碼經排序後，兩相鄰號碼間距的最小值。例如，若

有號碼{2, 9, 13, 21, 30, 41}, 則 $MG = 4$ 。在 n 取 r 的樂透彩, 可推導出 (見 Henze(1995))

$$P(MG = l) = \frac{\binom{n-(l-1)(r-1)}{r} - \binom{n-l(r-1)}{r}}{\binom{n}{r}}, \quad l = 1, \dots, \left\lfloor \frac{n-1}{r-1} \right\rfloor,$$

其中 $\lfloor \cdot \rfloor$ 表最大整數函數。在 42 取 6 的樂透彩, 可得到 $MG = l$ 之機率如表 3。

表 3. 42 取 6 之樂透彩 $MG = l$ 之機率

l	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(MG = l)$	0.5568	0.2704	0.1163	0.0422	0.01186	0.002183	0.0001748	0.000001334

$MG = 1$ 時對應連號, 連號機率超過二分之一, 可能違反一般人的直觀。由附錄 1 得到表 4a, 可看出本地彩民們顯然傾向簽注稍分開的號碼: $MG = 3, 4$ 時, J/M 皆大於 1, $MG = 1, 2$ 時, J/M 皆小於 1, 其中 $J =$ 累積實際中頭獎注數, $M =$ 累積中頭獎注數之期望值。不過若與表 4b 英國的數據 (見 Haigh(1995)) 相比, 他們在 $MG = 4$ 時, J/M 之比值高達 26.6。除了 $MG = 3$ 外, 表 4a 中的 J/M 之值皆較表 4b 中的 J/M 之值更接近 1 ($J/M = 1$ 表示簽中頭獎注數與期望值吻合)。所以台灣彩民們, 對樂透彩各種事件之機率, 雖未能正確掌握, 但似仍勝英國彩民一籌。

表 4. 樂透彩最小間距之觀測頻率及期望頻率

a. 北銀 42 期

MG	期數	J	M	J/M
1	25	58	89.08	0.65
2	12	41	42.77	0.96
3	4	22	10.36	2.12
4	1	5	3.62	1.38

b. 英國 30 期

MG	期數	J	M	J/M
1	15	28	63.6	0.44
2	11	31	49.6	0.625
3	3	18	14.2	1.27
4	1	133	5	26.6

由上討論知, 每期樂透彩, 彩民全部簽注的號碼, 很可能是相當不隨機的。這一方面說不定是追求明牌的心理因素所造成, 一方面說不定是人們選填號碼, 原本就是不隨機。Boland and Pawitan(1999) 曾對愛爾蘭一群 234 位學生測試, 每人各寫一組樂透彩號碼, 其號碼之觀測頻率 (observed frequency), 並未能通過隨機性的檢定。在第 3 節中, 我們將對所收集到的不同群組簽注的樂透彩號碼, 做各種統計檢定, 以了解人們在選取號碼時, 隨機性的能力。我們想了解究竟以個人當做隨機生成器是否適當。

要注意的是, 假若想以皮爾生卡方 (Pearson χ^2) 對每 6 個一組的號碼, 做適合度檢定 (goodness of fit test), 由於每組號碼之期望頻率 (expected frequency) 應至少為 5, 故總

共要觀測 $5 \cdot 5,245,786 = 26,228,930$ 次開獎。以每週二期，一年104期計，需要25萬年以上，這當然不可行。又若要對1至42共42個號碼，檢定各號碼出現的機率是否均為 $1/7 (= 6/42)$ ，由於每期頭獎6個號碼是屬於取出後不放回，各號碼之出現次數並不獨立，多項分佈在此不適用，不能用傳統的卡方檢定。Joe(1993)發展出一套檢驗在 n 取 r 的樂透彩裡，各號碼、成對號碼 (i, j) 及3碼 (i, j, k) ，是否均勻地出現的檢定法。特別地，在號碼為隨機產生的假設下，

$$(2) \quad Q_1 = \frac{n-1}{n-r} \sum_{i=1}^n \frac{(O_i - E)^2}{E}$$

有近似的 χ_{n-1}^2 分佈，其中 $E = Nr/n$ 為任一號碼之期望頻率，又 N 為觀測期數， O_i 為號碼 i 之觀測頻率。當 Q_1 較大時，拒絕 H_0 ：號碼為隨機地產生。對42取6的樂透彩，

$$(3) \quad Q_1 = \frac{41}{36} \sum_{i=1}^{42} \frac{(O_i - N/7)^2}{N/7}。$$

因要滿足 $E \geq 5$ ，故得 $N \geq 35$ 。即至少要觀測35期以上，才適合採此檢定法。

Q_1 值較大固然顯示號碼之產生極可能非隨機。但 Q_1 值較小時，並不一定導致號碼為隨機產生，此與一般假設檢定的原理類似。例如，簽42注，號碼依序為

$$\begin{aligned} &1, 2, 3, 4, 5, 6; 7, 8, 9, 10, 11, 12; \dots; 37, 38, 39, 40, 41, 42; \\ &\quad \vdots \\ &1, 2, 3, 4, 5, 6; 7, 8, 9, 10, 11, 12; \dots; 37, 38, 39, 40, 41, 42。 \end{aligned}$$

易見在(3)式中， $O_i = 6, N/7 = 6$ ，故 $Q_1 = 0$ 。但這42組號碼如此規律，絕對不會符合隨機。因此僅檢定42個號碼之出現是否符合 $1/7$ 的機率是不夠的！我們須佐以其他有關隨機性的檢定。由於彩民們對北銀樂透彩，各號碼之出現是否真為隨機常半信半疑，第2節我們就討論一些關於樂透彩號碼隨機性的檢定。

2. 樂透彩頭獎號碼隨機性之檢定

若以 Y_1, Y_2, \dots 表各期之頭獎號碼，則在 n 取 r 的樂透彩，所謂頭獎號碼為隨機地產生，乃指 Y_1, Y_2, \dots 為獨立且有共同分佈(即 i.i.d.)。又共同分佈為在 $\{\{1, 2, \dots, r\}, \dots, \{n-r+1, n-r+2, \dots, n\}\}$ 均勻分佈。一般均隱含地接受 Y_1, Y_2, \dots 為 i.i.d.，所以只需檢定均勻性。即只檢定 $\binom{n}{r}$ 組號碼是否有相同 $1/\binom{n}{r}$ 的機率產生。

但如前言裡所指出，要做這樣的檢定是極不易達成的。採用 Joe(1993) 之檢定法，對42取6的樂透彩，在“ H_0 ：號碼為均勻地產生”的假設下，若 $N \geq 35$ ，則(3)式所定義之 Q_1 有近似的 χ_{41}^2 分佈，其中 O_i 為號碼 i 之觀測頻率。若 Q_1 較大時要拒絕 H_0 。

前言裡亦指出 Q_1 較小時，並不一定導致號碼為隨機產生。為了更保險起見，我們必須對在 H_0 之下的一些現象，也做檢定。能通過愈多的檢定，便愈有信心接受號碼為隨機

產生。譬如說，所有成對的號碼 (i, j) 是否均勻地出現。但目前無法對此做檢定。此因共有 $\binom{42}{2} = 861$ 對，而開出頭獎6碼中，共有 $\binom{6}{2} = 15$ 對，欲符合期望頻率皆至少為5，要至少觀測

$$\frac{861 \cdot 5}{15} = 287(\text{期})。$$

即要等北銀公益彩券發行大約兩年10個月後才行。底下我們列出一些可能的檢定。

在42取6的樂透彩，6碼中偶數個數 W 的機率分佈極易求出：

$$P(W = i) = \frac{\binom{21}{i} \binom{21}{6-i}}{\binom{42}{6}}, \quad i = 0, 1, \dots, 6。$$

表5給出 $P(W = i)$ 。令

$$(4) \quad Q_2 = \sum_{i=0}^6 \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i},$$

在 H_0 之下， Q_2 有近似的 χ_6^2 分佈。

表5. 42取6樂透彩 $W = i$ 之機率

i	0	1	2	3	4	5	6
機率	0.01034	0.08146	0.23959	0.33720	0.23959	0.08146	0.01034

我們也可對頭獎6個號碼之和 S 做檢定。在42取6的樂透彩， S 可從21(= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)至237(= 37 + 38 + 39 + 40 + 41 + 42)。在 H_0 之下，表6給出 S 落在7個機率大致相等區間的機率。令

$$(5) \quad Q_3 = \sum_{i=1}^7 \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i},$$

在 H_0 之下， Q_3 有近似的 χ_6^2 分佈，其中 O_i 為區間 i 之觀測頻率， $E_i = Nq_i$ ， N 為開獎期數， q_i 為 S 落在區間 i 之機率。如同一般的原則，要分成愈多類(cell)愈好，以增加自由度(自由度比類數少1)。但又要使每類期望頻率至少為5，才適用卡方檢定。若有些未達到，則要將相鄰的幾類合併，而自由度也隨之減少。底下的幾個檢定也要比照處理。

表6. 42取6樂透彩 S 落在各區間之機率

區間	[21, 99)	[99, 113)	[113, 124)	[124, 135)	[135, 146)	[146, 160)	[160, 238)
機率	0.14039	0.14079	0.14244	0.15276	0.14244	0.14079	0.14039

最小間距 MG 也可用來檢驗隨機性。 $MG = l$ 之機率已給在表3。令

$$(6) \quad Q_4 = \sum_{i=1}^8 \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i},$$

在 H_0 之下, Q_4 有近似的 χ_7^2 分佈。

總間距數(number of different spaces) D 亦可拿來檢定。在大多數的國家裡, 簽注號碼時, 等差級數往往為彩民們所偏好, 此總間距數便為1。如{6, 13, 20, 27, 34, 41}之總間距數為1, 而{6, 10, 14, 20, 24, 32}之總間距數為3。Henze(1997)給出在 n 取 r 的樂透彩,

$$P(D=1) = \binom{n}{r}^{-1} \cdot \left[\frac{n-1}{r-1} \right] \cdot \left(n - \frac{r-1}{2} \cdot \left(\left[\frac{n-1}{r-1} \right] + 1 \right) \right),$$

$$P(D=i) = \binom{n}{r}^{-1} \cdot \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_i \geq 1 \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_i = r-1}} \frac{(r-1)!}{\alpha_1! \cdots \alpha_i!} \cdot \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_i} \binom{n - \sum_{j=1}^i \alpha_j k_j}{i}^+,$$

$$i = 2, 3, \dots, r-1,$$

其中 $x^+ = \max(x, 0)$ 。在42取6的樂透彩, 可得到 $D=i$ 之機率分佈如表7。令

$$(7) \quad Q_5 = \sum_{i=1}^5 \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i},$$

在 H_0 之下, Q_5 有近似的 χ_4^2 分佈。

表7. 42取6樂透彩 $D=i$ 之機率

i	1	2	3	4	5
機率	0.000030	0.005250	0.107826	0.466809	0.420086

連號情況也可檢定。令111111表無連號, 21111表恰有一組二連號, 餘類推。在42取6的樂透彩, 表8給出各情況(共11種)之機率。令

$$(8) \quad Q_6 = \sum_{i=1}^{11} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i},$$

在 H_0 之下, Q_6 有近似的 χ_{10}^2 分佈。

表8. 連號情況之機率

情況	111111	21111	2211	222	3111	321
機率	0.44317	0.41547	0.07554	0.00148	0.05036	0.00889
情況	33	411	42	51	6	
機率	0.00013	0.00444	0.00025	0.00025	0.000007	

成對 (i, j) 出現之機率也可以統計量 Q_7 來檢定。只是 Q_7 的型式複雜, 在此略過, 可參考Joe(1993)或Genest et al.(2002)。在 H_0 之下, Q_7 有近似的 χ_{860}^2 分佈。

有最小間距亦有最大間距(largest spacing, 又稱maximum gap), 以 L 表之。也就是號碼經排序後, 兩兩相鄰號碼間距的最大值。Henze(1995)給出在 n 取 r 的樂透彩,

$$P(L = k) = \binom{n}{r}^{-1} \sum_{i=1}^{r-1} (-1)^{i-1} \binom{r-1}{i} \left(\binom{n-i(k-1)}{r}^+ - \binom{n-ik}{r}^+ \right),$$

$$k = 1, \dots, n - r + 1.$$

在42取6的樂透彩, 可得到 $L = k$ 之機率如表9。對大部分的 k , 其機率均很小。令

$$(9) \quad Q_8 = \sum_{i=1}^{37} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i},$$

在 H_0 之下, Q_8 有近似的 χ_{36}^2 分佈。

表9. 42取6樂透彩 $L = k$ 之機率

k	1	2	3	4	5	6	7	8
機率	0.000007	0.000203	0.001272	0.004276	0.010326	0.020233	0.034169	0.051322
k	9	10	11	12	13	14	15	16
機率	0.069558	0.085374	0.095205	0.097488	0.093070	0.084134	0.072984	0.061337
k	17	18	19	20	21	22	23	24
機率	0.050294	0.040461	0.032071	0.025100	0.019396	0.014778	0.011083	0.008167
k	25	26	27	28	29	30	31	32
機率	0.005898	0.004163	0.002862	0.001908	0.001227	0.000755	0.000440	0.000240
k	33	34	35	36	37			
機率	0.000120	0.000053	0.000020	0.000006	0.000001			

目前北銀樂透彩開出的期數仍少, 尚不易以 Q_7 或 Q_8 來做檢定。

附錄2針對上述 $Q_1 - Q_6$ 等6個統計量, 對1至42期樂透彩頭獎號碼做檢定。在型I錯誤0.05之下, 均能通過隨機性之檢定。要注意的是, 42個號碼之觀測頻率, 最少為2次, 最多為11次。表面上看起來雖有不小差異, 但這是正常的。要是每個號碼之觀測頻率都差不多, 才是令人懷疑的。隨機產生號碼, 結果看起來不太均勻, 雖違反直觀, 但卻是常態。更多的例子可參考黃文章(2002a)一書第2.2節。

又必須一提的是, 每期樂透彩其實開出7個號碼(含特別號)。單獨對特別號之出現機率做檢定, 目前尚不易做, 因期數仍少。但可對7個號碼, 做與6個號碼下類似之 $Q_1 - Q_8$ 檢定, 不過本文並不在此檢定。

3. 不同群組簽注號碼之檢定

上節我們討論樂透彩開獎機制之隨機性，本節我們則探討一個人若寫很多組號碼，以及一群人若各寫一組號碼，是否會符合隨機性。

自第16期後，每期樂透彩總銷售注數以一千四百萬注左右佔多數。我們以Mathematica軟體模擬產生一千四百萬組號碼，並以統計量 Q_1, \dots, Q_8 做8種檢定，共模擬100次，藉此觀察各種統計量的表現。附錄3給出這100次模擬試驗 $Q_1 - Q_8$ 的PP-圖(probability-probability plot)。8個圖形大致成一直線，表示模擬的結果尚符合其該有的機率分佈。不過 Q_3 的PP-圖線性顯得較差，可能是因為號碼和共有217種可能，而我們只將這些結果分成7類，分得不夠細，造成一些偏差。若依各可能的號碼和，分成217類，則會得到較佳的線性圖形。 Q_6 的PP-圖也不夠好。我們另對 Q_3 及 Q_6 做500次模擬，線性效果改善許多。結果見附錄4。

設總銷售注數為14,000,000，表10給出各獎中獎注數之期望頻率。令

$$(10) \quad Q_9 = \sum_{i=1}^6 \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i},$$

在 H_0 之下， Q_9 有 χ_5^2 分佈。

表10. 銷售14,000,000注各獎中獎注數之期望頻率

獎	頭獎	貳獎	參獎	肆獎	普獎	無中獎
E_i	2.67	16.01	560.45	25220.24	381105.90	13593094.72

附錄5給出1 - 42期實際中獎注數之 Q_9 值，均過大， p 值皆幾乎為0。另以模擬產生14,000,000注號碼，分別去對14及20期(這是隨機抽出的二期)樂透彩頭獎號碼。附錄6給出二PP-圖，均大致成一直線，顯示模擬的 p 值大致表現出其該有之頻率。

綜上所述，以 $Q_1 - Q_9$ 來檢定樂透彩開出號碼的隨機性可說是合適的。

若以前言提及的 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; \dots; \{37, 38, 39, 40, 41, 42\}$ 等42注號碼，對 $Q_1 - Q_6$ 做檢定，前二者當然可通過，得到 p 值1，後四者之 p 值就近乎是0了。

我們曾分別對高雄大學大學部12個學系的學生及教職員(合計718人)、高雄市中山高中高一、高二、高三的學生(合計246人)、中山大學應用數學系大學部及研究所(合計89人)、高雄大學高中數學資優班的學生(27人)，分別由他們每人寫一組樂透彩號碼，並做檢定。由於高雄大學有六個學系只有大一一班，簽注人數較少，因此將其中文法三個學系合併計算，將理工的三個學系合併計算。附錄7給出部分結果。

附錄7顯示，除了群組IV及群組VIII外，普遍以 Q_1 做的檢定 p 值均很小。而以 Q_2 及 Q_5 做檢定，似乎能得到較大的 p 值。又文法學系的學生選號似較理工學系的學生隨機些。但總共1,080人一起看，則 p 值近乎是0。

最後，由高雄大學應用數學系大二35位學生，每人各寫126組號碼，並以 $Q_1 - Q_6$ 做檢定，其結果列於附錄8。除了少數學生外， Q_1 之 p 值均很低， Q_2 之 p 值則好些。整體而言，每位學生之 $Q_1 - Q_6$ 檢定，比附錄7中1,080個人，每人各寫一組號碼所做之 $Q_1 - Q_6$ 檢定是較好。這35位學生均上了近一年之機率與統計課程，似乎對隨機性的能力較好些。

4. 結論

顯通寺，為五臺山現存最早最古及最大的寺院。由於五臺山是文殊菩薩演教和居住的地方，所以在五臺山的寺院中，都以供奉文殊菩薩為主。大文殊殿即為顯通寺的第二進殿宇，其殿外有幅對聯，上聯為“法身無去無來住寂光而不動”，下聯為“德相非空非有應隨機以恆周”。

位於山西的五臺山，為中國四大佛教聖地之一，而文殊是管智慧的菩薩。應隨機以恆周！東方佛教裡的智慧菩薩，早就向我們強調隨機的重要。

樂透彩雖打著公益之名，但常有人質疑政府帶頭設賭局，購買者中以低收入戶佔多數，以及未中獎者與中獎者各自會製造一些社會問題。其實台灣平均每人花在樂透彩的金額，是遠比不上美國的(見黃文璋(2002b))，而彩券購買者是否以低收入戶為主，也似尚未有定論。浙江大學經濟學院的朱希傳(2001)，曾對杭州市民購買彩券的動機，及影響購買者行為的相關因素做調查，得到的結論是大陸發展彩券的負面效果並非十分嚴重。周玉平(2000)對南京市的調查，結論亦類似。

負面的因素不論，樂透彩對全民的了解機率應有幫助，特別是了解隨機性的本質。數學教師可藉求與樂透彩有關的各種機率，引發學生學習機率的興趣。另一方面，樂透彩雖只有部分結果公開(全部簽注號碼並未公開)，但所公開者是很明確且很完整的數據：頭獎及特別獎號碼，各獎中獎人數，當然還有獎金分配方式及各獎中獎機率。不像一般的調查，除了有效問卷等認定問題，還常讓人懷疑抽樣過程是否隨機，題目設計是否有誘導性，以及是否所有資訊均公開。不但如此，一週進行兩次大規模(每次簽注數均超過1千萬)的試驗，是很難得的數據，是見數據心喜的統計工作者，不會輕易放過的。Johnson and Klotz(1993)曾對美國的Lotto America Megabucks Lottery 200期之開出號碼(為54取6)，檢定各號碼是否均勻地產生，該文認為號碼並非均勻地產生，且小號碼(號碼球依序由小至大放進機器中)出現之機會較高。我們將持續進行北銀樂透彩開出號碼隨機性之分析，以及追蹤人們選填號碼隨機性的能力是否有可能經由訓練而改進。有人可打敗測謊機，而我們想知道，要打敗隨機檢定是否容易？

5. 誌謝詞

作者感謝兩位評審所提出的寶貴意見，使本文得以更臻完善。也感謝蘇南誠先生在計算及模擬方面的協助，及高雄市中山高中葉姿岑老師協助收集資料。

附錄1. 1-42期北銀樂透彩頭獎號碼等相關數據

期	頭獎號碼							特別號	銷售注數	中獎注數					λ值		Z值				
										頭	貳	參	肆	普	λ ₁	Z ₂	Z ₃	Z ₄	Z ₅		
1	4	9	10	13	32	33	37	15525475	0	6	338	20014	379547	2.96	-3.23	-11.77	-48.83	-77.56			
2	6	16	28	30	31	35	2	19246613	4	26	791	37519	541204	3.67	0.85	0.88	15.26	27.34			
3	7	9	29	34	36	39	16	19090503	4	22	882	45077	649885	3.64	0.10	4.21	57.66	192.12			
4	13	25	28	29	30	39	21	20532843	3	19	446	24049	391202	3.91	-1.03	-13.09	-68.55	-237.86			
5	1	3	11	15	17	39	34	20849634	0	15	834	38109	577097	3.97	-2.43	-0.15	2.78	13.14			
6	2	4	15	16	29	33	39	39984359	12	33	1462	67228	1037937	7.62	-1.14	-3.61	-18.25	-52.21			
7	20	25	29	37	38	39	28	38127125	1	31	1121	54714	929167	7.27	-2.65	-10.68	-54.35	-118.69			
8	1	6	7	12	20	42	35	29142569	2	15	902	44161	677357	5.56	-3.51	-8.25	-37.25	-137.38			
9	7	12	19	20	24	36	26	31175481	8	25	1280	53031	805172	5.94	-1.33	0.65	-12.97	-49.67			
10	2	10	15	23	30	32	36	23689096	2	33	1284	48519	700083	4.52	0.60	10.83	29.62	75.10			
11	6	20	29	35	38	40	41	23405269	0	19	811	39179	612652	4.46	-2.19	-4.44	-15.05	-33.97			
12	12	20	30	32	35	40	34	35378892	3	38	1266	54713	849800	6.74	-0.90	-4.09	-35.97	-122.55			
13	4	10	14	23	29	39	36	19006505	5	32	744	37256	560660	3.62	2.31	-0.19	16.11	63.19			
14	4	5	14	21	27	40	12	18701352	1	16	550	25439	423805	3.57	-1.59	-7.43	-45.60	-129.03			
15	8	12	16	26	34	36	5	16995659	2	25	824	36356	503263	3.24	0.91	5.58	33.30	67.14			
16	5	10	13	15	29	36	1	15469215	4	19	707	33507	488681	2.95	0.52	3.56	33.97	110.96			
17	2	5	9	16	25	32	7	14826893	6	12	570	26353	395108	2.83	-0.40	-1.02	-2.31	-13.74			
18	6	9	21	27	31	32	2	13021529	1	10	390	18156	300520	2.48	-1.53	-5.93	-35.15	-97.97			
19	5	18	25	26	35	42	29	14711719	0	8	426	23305	357138	2.80	-2.63	-7.08	-20.50	-72.50			
20	19	21	22	25	31	34	13	26781545	2	16	648	33726	594572	5.11	-2.97	-13.28	-67.41	-171.89			
21	13	20	26	30	32	37	4	16096901	3	28	694	30088	457279	3.07	2.05	2.29	6.68	30.03			
22	7	10	14	17	27	37	28	14425077	11	55	1285	33235	433182	2.75	10.66	30.88	49.13	76.03			
23	6	20	21	26	36	37	27	14479206	2	20	633	29867	405877	2.76	0.61	2.29	23.53	24.35			
24	12	14	15	24	36	39	1	14722388	4	17	897	40757	578286	2.81	0.31	12.52	88.38	297.97			
25	10	12	17	21	22	29	25	14405480	1	24	659	40947	467189	2.75	1.32	3.61	92.67	141.36			
26	5	6	9	24	27	39	15	14457871	3	22	555	30177	538669	2.76	1.30	-0.74	25.23	233.60			
27	1	2	4	7	8	18	9	14522994	2	27	755	23582	348869	2.77	2.19	7.48	-14.67	-76.34			
28	15	19	22	23	33	34	20	13603055	1	11	511	27523	398894	2.59	-1.44	-1.67	18.83	50.96			

續附錄1

期	頭獎號碼							特別號	銷售注數	中獎注數					λ值	Z值				
	頭	貳	參	肆	普	λ ₁	Z ₂			Z ₃	Z ₄	Z ₅								
29	11	23	31	33	36	37	34	13517409	1	7	334	18398	307581	2.58	-2.36	-9.18	-39.13	-107.76		
30	7	15	17	18	28	36	8	13210954	0	13	389	21455	343711	2.52	-1.10	-6.18	-15.96	-30.14		
31	21	25	26	33	37	41	20	26547218	1	21	764	38597	659961	5.06	-2.26	-9.42	-43.17	-83.46		
32	7	15	17	27	30	42	5	14150234	4	17	528	27554	427529	2.70	0.49	-1.50	12.56	70.20		
33	2	9	18	20	27	36	4	14151182	13	28	2109	41353	488928	2.70	5.09	64.67	108.00	191.68		
34	2	14	21	23	27	32	35	14041910	2	11	378	19702	318734	2.68	-1.33	-7.88	-35.99	-110.08		
35	3	4	12	19	32	35	29	13239613	1	9	413	21633	362590	2.52	-1.82	-5.33	-15.01	-0.26		
36	6	10	19	22	27	34	7	13447242	3	23	804	30244	435823	2.56	1.90	11.61	40.01	123.47		
37	18	19	27	34	39	41	40	13205497	1	6	238	13564	229830	2.52	-2.53	-12.89	-67.54	-229.62		
38	8	11	14	24	31	36	23	11629199	2	9	662	26329	356115	2.22	-1.15	8.75	38.09	78.76		
39	10	15	16	26	27	42	3	11414978	1	18	395	21533	357152	2.18	0.97	-2.68	6.29	83.39		
40	13	18	19	28	34	38	9	11503192	4	29	914	38582	440617	2.19	4.50	21.60	126.02	255.92		
41	13	21	23	27	29	41	17	11066160	4	6	367	19212	316464	2.11	-1.24	-3.78	-5.63	25.80		
42	4	11	14	15	20	41	10	11504136	2	9	327	23199	374587	2.19	-1.11	-6.32	16.07	111.90		
和								765004172	126						145.83					

$$\lambda_1 = Np_1$$

$$Z_i = \frac{X_i - Np_i}{\sqrt{Np_i(1-p_i)}}$$

$$Z_0 = \frac{X_0 - N_0p_1}{\sqrt{N_0p_1(1-p_1)}} \doteq -1.64$$

X_i : i 獎以上之中獎注數

N : 當期總銷售注數

X_0 : 累積頭獎注數

N_0 : 累積總銷售注數

p_i : i 獎以上中獎機率

附錄2. 1-42期北銀樂透彩頭獎號碼以 $Q_1 - Q_6$ 做檢定

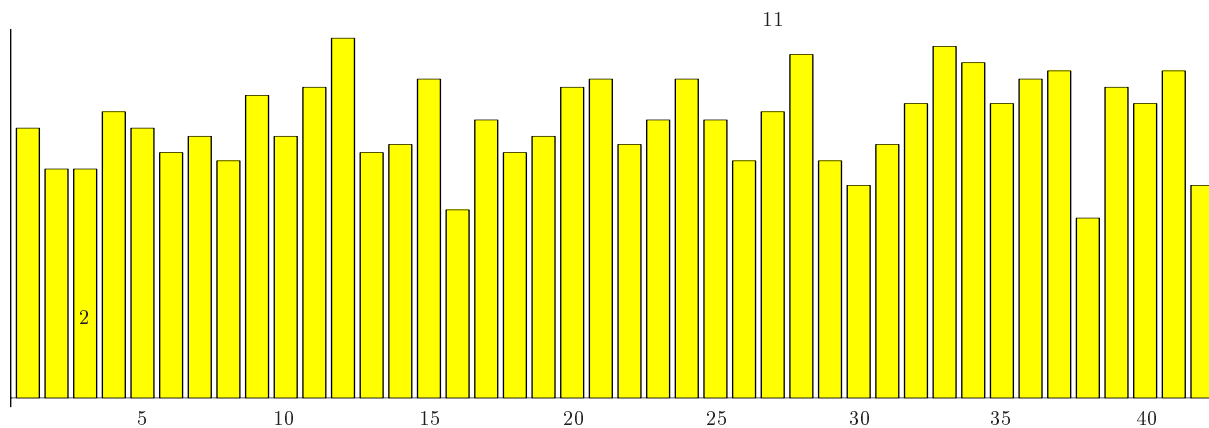


圖1. 各號碼出現頻率直方圖

各號碼

E_i	Q_1	d.f.	p 值
6	34.17	41	0.77

偶數個數

偶數個數	0	1	2	3	4	5	6	Q_2	d.f.	p 值
O_i	2	2	11	11	14	1	1	1.10	2	0.58
E_i	0.43	3.42	10.06	14.16	10.06	3.42	0.43			

號碼和

號碼和	[21, 99)	[99, 113)	[113, 124)	[124, 135)	[135, 146)	[146, 160)	[160, 238)	Q_3	d.f.	p 值
O_i	4	11	5	3	3	9	7	10.27	6	0.11
E_i	5.90	5.91	5.98	6.42	5.98	5.91	5.90			

最小間距

$MG = l$	1	2	3	4	5	6	7	8	Q_4	d.f.	p 值
O_i	25	12	4	1	0	0	0	0	0.85	2	0.65
E_i	23.39	11.36	4.89	1.77	0.50	0.09	0.01	0.00			

總間距數

總間距數	1	2	3	4	5	Q_5	d.f.	p 值
O_i	0	0	3	20	19	0.18	1	0.67
E_i	0.00	0.22	4.53	19.61	17.64			

續附錄2

連號

連號	111111	21111	2211	3111	321	411	222	42	51	33	6	Q_6	d.f.	p 值
O_i	17	18	5	2	0	0	0	0	0	0	0	0.35	2	0.84
E_i	18.61	17.45	3.17	2.12	0.37	0.19	0.06	0.01	0.01	0.01	0.00			



附錄3. 模擬100次14,000,000注號碼以 $Q_1 - Q_8$ 做檢定之PP-圖

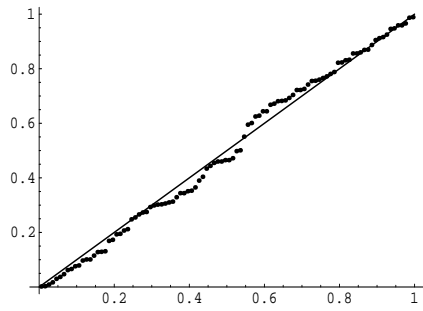


圖2. Q_1

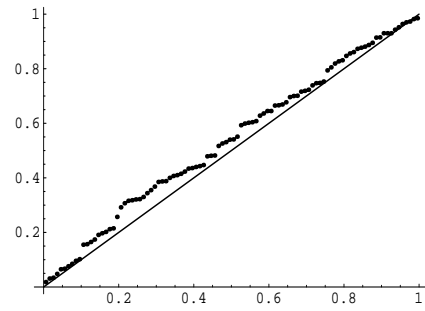


圖3. Q_2

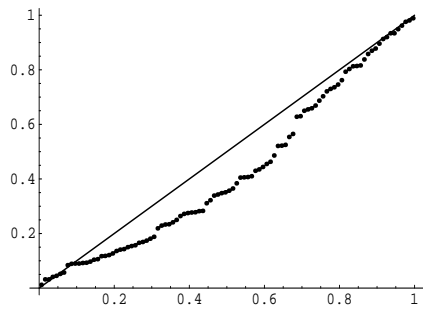


圖4. Q_3

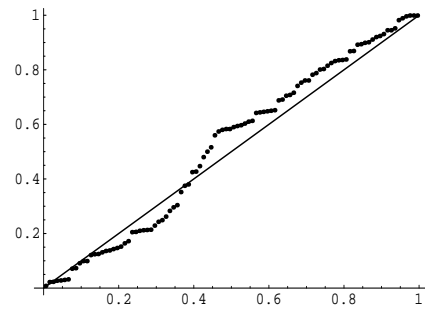


圖5. Q_4

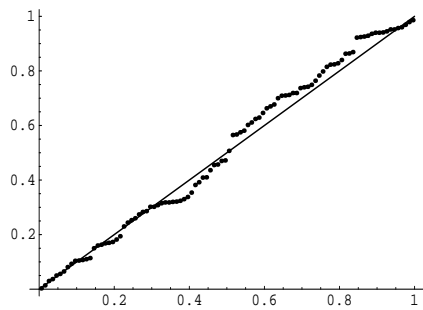


圖6. Q_5

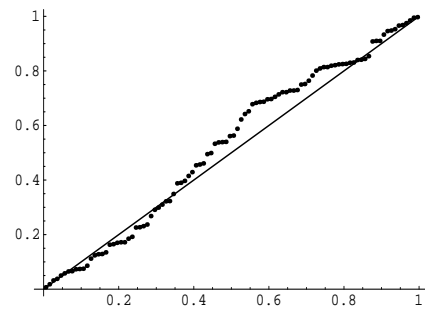


圖7. Q_6

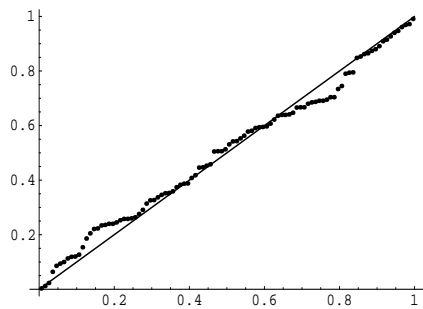


圖8. Q_7

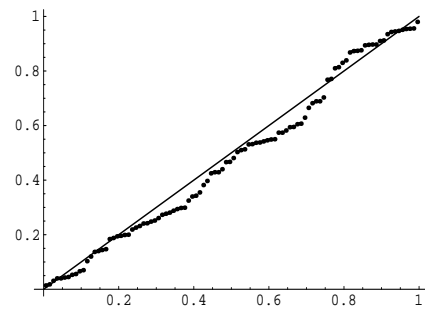


圖9. Q_8

附錄4. 模擬500次14,000,000注號碼以 Q_3 及 Q_6 做檢定之PP-圖

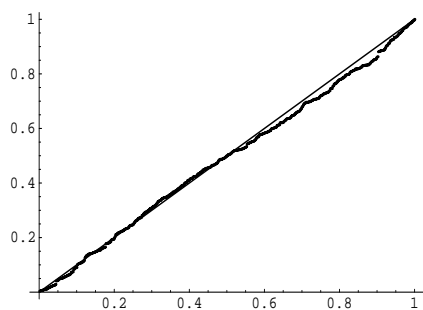


圖10. Q_3

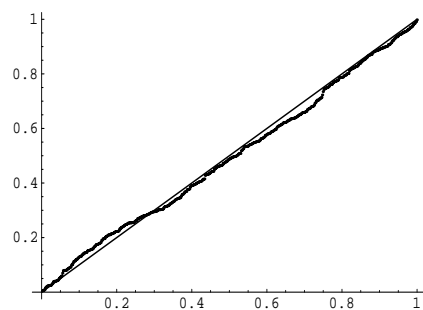


圖11. Q_6

附錄5. 1-42期樂透彩實際中獎注數之檢定

期	Q_9	d.f.	p 值
1	6969.17	4	0.000
2	826.44	4	0.000
3	37034.95	4	0.000
4	56683.40	4	0.000
5	179.11	4	0.000
6	2761.45	5	0.000
7	14756.89	5	0.000
8	18894.46	5	0.000
9	2478.75	5	0.000
10	5812.39	4	0.000
11	1207.27	4	0.000
12	15055.39	5	0.000
13	4005.92	4	0.000
14	16845.59	4	0.000
15	4802.55	4	0.000
16	12357.66	4	0.000
17	190.67	4	0.000
18	9723.74	4	0.000
19	5281.23	4	0.000
20	30208.12	5	0.000
21	907.06	4	0.000

期	Q_9	d.f.	p 值
22	7348.68	4	0.000
23	920.19	4	0.000
24	89009.78	4	0.000
25	23621.81	4	0.000
26	55738.45	4	0.000
27	5943.64	4	0.000
28	2659.20	4	0.000
29	11788.00	4	0.000
30	999.80	4	0.000
31	7513.19	5	0.000
32	4965.56	4	0.000
33	43080.66	4	0.000
34	12204.30	4	0.000
35	248.55	4	0.000
36	15369.37	4	0.000
37	52851.97	4	0.000
38	6586.25	4	0.000
39	7190.23	4	0.000
40	69659.55	4	0.000
41	829.40	4	0.000
42	12746.85	4	0.000

附錄6. 模擬100次14,000,000注號碼對第14及20期樂透彩頭獎號碼以 Q_9 做檢定之 PP -圖

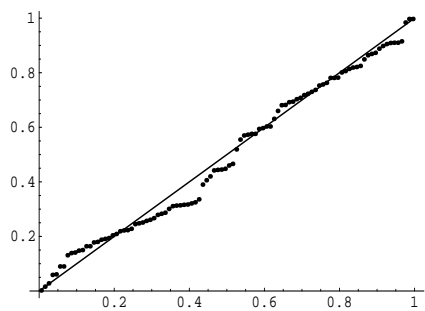


圖12. 第14期

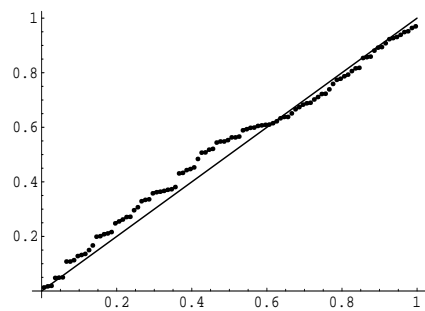


圖13. 第20期

附錄7. 各群組做 $Q_1 - Q_6$ 之檢定

單位	Q_1	d.f.	p值	Q_2	d.f.	p值	Q_3	d.f.	p值	Q_4	d.f.	p值	Q_5	d.f.	p值	Q_6	d.f.	p值
I	83.4	41	0.000	12.9	4	0.012	17.0	6	0.009	21.1	2	0.000	1.6	2	0.449	19.7	2	0.000
II	98.5	41	0.000	13.5	4	0.009	23.8	6	0.001	10.9	2	0.004	1.1	2	0.565	6.2	2	0.044
III	103.6	41	0.000	24.0	4	0.000	8.9	6	0.182	16.2	2	0.000	2.0	2	0.370	5.4	2	0.067
IV	31.7	41	0.851	4.4	4	0.351	22.2	6	0.001	51.0	2	0.000	1.4	2	0.490	14.4	2	0.001
V	71.3	41	0.002	27.2	4	0.000	10.9	6	0.092	12.7	2	0.002	0.7	2	0.697	11.2	3	0.011
VI	109.7	41	0.000	11.5	4	0.022	6.8	6	0.341	16.0	3	0.001	15.0	2	0.001	11.8	3	0.008
VII	124.3	41	0.000	9.3	4	0.055	21.0	6	0.002	27.4	3	0.000	9.3	2	0.010	8.9	3	0.031
VIII	55.1	41	0.069	6.3	4	0.176	9.4	6	0.150	14.4	2	0.001	9.5	2	0.008	13.6	3	0.004
IX	105.9	41	0.000	4.9	4	0.297	44.8	6	0.000	2.7	2	0.257	6.3	2	0.043	3.6	2	0.167
X	88.9	41	0.000	8.4	4	0.076	12.2	6	0.058	14.1	3	0.003	4.0	2	0.138	11.5	3	0.010
XI	85.4	41	0.000	4.8	4	0.304	19.9	6	0.003	0.6	2	0.745	22.9	2	0.000	5.0	2	0.080
XII	130.9	41	0.000	12.0	4	0.017	44.0	6	0.000	3.1	2	0.210	14.8	2	0.001	29.3	3	0.000
XIII	327.1	41	0.000	6.4	4	0.169	60.2	6	0.000	13.4	3	0.004	43.8	2	0.000	80.5	3	0.000
XIV	612.7	41	0.000	94.5	6	0.000	153.8	6	0.000	135.8	4	0.000	765.3	3	0.000	549.1	5	0.000

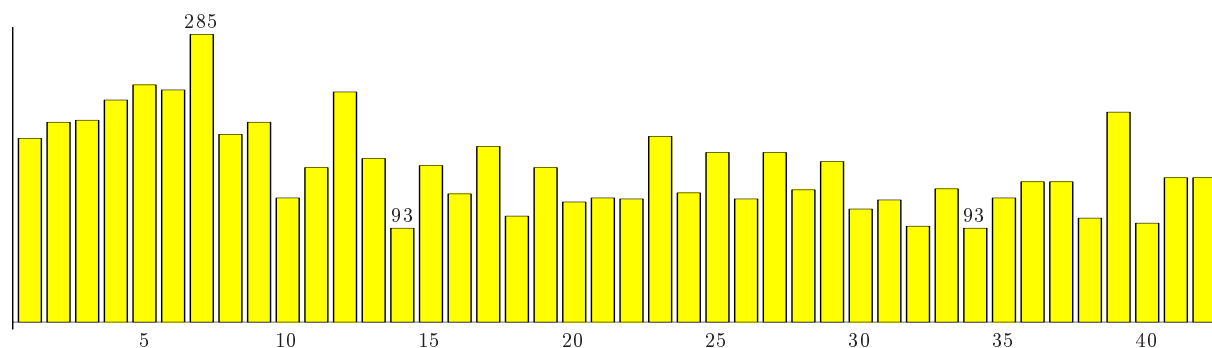


圖14. 各號碼出現頻率直方圖

- I: 高雄大學西洋語文學系(64人) II: 高雄大學法律學系(73人)
 III: 高雄大學政治法律學系(67人) IV: 高雄大學應用經濟學系(74人)
 V: 高雄大學應用數學系(81人) VI: 高雄大學電機工程學系(91人)
 VII: 高雄大學運動與健康休閒學系+財經法律學系+亞太工商管理學系(108人)
 VIII: 高雄大學應用化學系+土木與環境工程學系+生命科學系(88人)
 IX: 高雄大學教職員(72人) X: 中山大學應用數學系所(89人)
 XI: 中山高中高三學生(70人) XII: 中山高中高二學生(86人)
 XIII: 中山高中高一學生(90人) XIV: I, ..., XIII及高雄大學高中數學資優班(共1,080人)

附錄8. 高雄大學應用數學系大二學生以 $Q_1 - Q_6$ 做檢定

代號	Q_1	d.f.	p值	Q_2	d.f.	p值	Q_3	d.f.	p值	Q_4	d.f.	p值	Q_5	d.f.	p值	Q_6	d.f.	p值
1	86.9	41	0.000	6.4	4	0.174	23.1	6	0.001	20.7	3	0.000	59.1	2	0.000	53.3	3	0.000
2	85.4	41	0.000	4.5	4	0.339	37.3	6	0.000	8.3	3	0.040	377.1	2	0.000	149.5	3	0.000
3	137.7	41	0.000	21.7	4	0.000	8.7	6	0.190	8.4	3	0.038	221.4	2	0.000	174.6	3	0.000
4	100.0	41	0.000	5.0	4	0.285	34.5	6	0.000	10.0	3	0.018	181.8	2	0.000	165.3	3	0.000
5	221.7	41	0.000	11.7	4	0.020	4.3	6	0.643	1.6	3	0.666	0.3	2	0.844	2.6	3	0.455
6	34.9	41	0.736	1.5	4	0.834	6.9	6	0.328	3.5	3	0.316	0.1	2	0.935	7.0	3	0.071
7	196.6	41	0.000	5.9	4	0.209	24.2	6	0.001	16.3	3	0.001	56.7	2	0.000	70.5	3	0.000
8	123.8	41	0.000	7.9	4	0.096	30.5	6	0.000	6.4	3	0.094	101.1	2	0.000	34.7	3	0.000
9	80.2	41	0.000	0.7	4	0.950	4.8	6	0.575	2.3	3	0.520	7.9	2	0.019	6.8	3	0.080
10	79.1	41	0.000	0.6	4	0.960	36.2	6	0.000	35.6	3	0.000	99.2	2	0.000	201.3	3	0.000
11	73.3	41	0.001	13.0	4	0.011	46.8	6	0.000	24.0	3	0.000	284.0	2	0.000	260.0	3	0.000
12	94.0	41	0.000	10.5	4	0.032	9.2	6	0.162	2.7	3	0.443	114.5	2	0.000	79.2	3	0.000
13	64.0	41	0.012	1.5	4	0.821	11.6	6	0.072	1.3	3	0.737	0.3	2	0.844	0.4	3	0.937
14	128.3	41	0.000	4.1	4	0.390	59.3	6	0.000	15.7	3	0.001	37.5	2	0.000	24.8	3	0.000
15	529.2	41	0.000	18.4	4	0.001	3.4	6	0.762	25.0	3	0.000	16.0	2	0.0003	52.5	3	0.000
16	191.7	41	0.000	48.9	4	0.303	47.4	6	0.000	22.9	3	0.000	87.4	2	0.000	109.7	3	0.000
17	135.9	41	0.000	9.7	4	0.047	13.6	6	0.035	6.7	3	0.082	4.4	2	0.110	14.5	3	0.002
18	132.0	41	0.000	3.0	4	0.552	8.9	6	0.182	14.6	3	0.002	85.9	2	0.000	110.6	3	0.000
19	110.0	41	0.000	11.6	4	0.021	16.2	6	0.013	6.9	3	0.075	90.4	2	0.000	50.4	3	0.000
20	181.6	41	0.000	14.9	4	0.005	7.0	6	0.325	5.7	3	0.129	53.6	2	0.000	38.0	3	0.000
21	236.0	41	0.000	13.9	4	0.008	31.5	6	0.000	25.2	3	0.000	21.7	2	0.000	59.1	3	0.000
22	98.7	41	0.000	7.1	4	0.129	9.5	6	0.148	13.8	3	0.003	6.2	2	0.046	16.3	3	0.001
23	258.3	41	0.000	14.1	4	0.007	17.4	6	0.008	30.6	3	0.000	18.5	2	0.000	10.7	3	0.013
24	353.9	41	0.000	7.6	4	0.108	13.9	6	0.030	3.9	3	0.275	2.6	2	0.274	3.9	3	0.272
25	223.3	41	0.000	10.7	4	0.031	17.8	6	0.007	10.3	3	0.016	98.8	2	0.000	64.1	3	0.000
26	71.0	41	0.003	9.8	4	0.044	45.7	6	0.000	37.0	3	0.000	132.1	2	0.000	218.0	3	0.000
27	122.2	41	0.000	8.8	4	0.066	9.2	6	0.163	16.2	3	0.001	91.4	2	0.000	89.5	3	0.000
28	54.7	41	0.075	3.0	4	0.552	10.6	6	0.103	8.4	3	0.039	30.1	2	0.000	62.9	3	0.000
29	215.0	41	0.000	2.0	4	0.740	18.8	6	0.005	8.1	3	0.045	7.9	2	0.019	38.0	3	0.000

續附錄8

代號	Q_1	d.f.	p 值	Q_2	d.f.	p 值	Q_3	d.f.	p 值	Q_4	d.f.	p 值	Q_5	d.f.	p 值	Q_6	d.f.	p 值
30	173.5	41	0.000	1.8	4	0.774	30.9	6	0.000	12.3	3	0.006	2.5	2	0.289	6.2	3	0.104
31	238.4	41	0.000	22.5	4	0.000	18.8	6	0.005	35.2	3	0.000	163.4	2	0.000	261.8	3	0.000
32	273.6	41	0.000	9.0	4	0.062	38.0	6	0.000	21.5	3	0.000	62.6	2	0.000	52.8	3	0.000
33	177.0	41	0.000	4.4	4	0.358	19.4	6	0.004	11.5	3	0.009	21.5	2	0.000	57.1	3	0.000
34	142.6	41	0.000	6.9	4	0.142	8.4	6	0.213	4.2	3	0.239	3.2	2	0.206	4.8	3	0.190
35	49.2	41	0.177	50.6	4	0.000	44.9	6	0.000	25.4	3	0.000	517.5	2	0.000	629.6	3	0.000

參考文獻

1. 朱希傳(2001). 用統計方法研究彩票。中國統計2001年12月號, 50及56。
2. 周玉平(2000). 彩票: 特別的風采特別的愛。中國統計2000年12月號, 26-27。
3. 黃文璋(2002a). 數理統計。國立高雄大學應用數學系。
4. 黃文璋(2002b). 挑戰機率。誠品好讀月刊21期(2002年5月號), 46-47。
5. 劉應興(2002). 美夢成真的機率有多少。科學發展月刊(2002年5月號), 48-55。
6. Boland, P. J. and Pawitan, Y. (1999). Trying to be random in selecting random numbers for lotto. *Journal of Statistics Education*, 7(3), 1-9.
7. Chernoff, H. (1981). How to beat the Massachusetts numbers game. *Mathematical Intelligence*, 3, 166-172.
8. Genest, C., Lockhart, R. A. and Stephens, M. A. (2002). χ^2 and the lottery. *The Statistician*, 51, 243-257.
9. Haigh, N. (1995). Inferring gambler's choice of combinations in the national lottery. *Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications*, 31(9-10), 132-136.
10. Henze, N. (1995). The distribution of spaces on lottery tickets. *The Fibonacci Quarterly*, 33(5), 426-431.
11. Henze, N. (1997). A statistical and probabilistic analysis of popular lottery tickets. *Statistica Neerlandica*, 51(2), 155-163.

12. Henze, N. and Riedwyl, H. (1998). *How to Win More, Strategies for Increasing a Lottery Win*. A K Peters, Ltd. Natick, Massachusetts.
13. Joe, H. (1993). Tests of uniformity for sets of lotto numbers. *Statistics and Probability Letters*, 16, 181-188.
14. Johnson, R. and Klotz, J. (1993). Estimating Hot Numbers and Testing Uniformity for the Lottery. *Journal of the American Statistical Association*, 88, 662-668.

黃文璋

國立高雄大學應用數學系

高雄市楠梓區高雄大學路700號

e-mail: huangwj@nuk.edu.tw

洪宛頻

國立中山大學應用數學系

高雄市鼓山區蓮海路70號

e-mail: hungwp@math.nsysu.edu.tw

羅夢娜

國立中山大學應用數學系

高雄市鼓山區蓮海路70號

e-mail: lomn@math.nsysu.edu.tw