

夢幻七部車

黃文璋

國立高雄大學應用數學系

民國90年12月6日，多家媒體均刊登一如夢的新聞。中國時報的標題為

夫婦八天內連續抽中六部車

次日中時電子報又有一則標題為

京華驚奇槓上開花 徐家連中7台車

的新聞。

原來台北市京華城生活購物中心，開幕後為了促銷，推出“一百名休旅車抽獎活動”。從11月26日起，一連十天，每天送出每量單價約43萬元的汽車。購物滿2,000元就可兌換一張抽獎券。一對徐姓夫婦(太太是商職數學老師)，在八天內抽中六部，夫妻倆才在想“是在作夢嗎?”在最後一天又抽中了一部，合計共抽中7部車，價值約300萬元。

依據報載，這對夫婦共花了三百多萬元，換來1,543張抽獎券。本來每天寫八十八張(取“發發”的好彩頭)投入抽獎箱，持續二天後嫌太麻煩，第三天把抽獎券寫完一口氣投入抽獎箱。結果竟先後中了7部車。不少民眾質疑抽獎過程是否有作假?新聞媒體也好奇是否因88這個特殊的數字帶給他們幸運?又抽獎券分投在各抽獎箱，或集中在一箱是否有差異?早上投一些，下午投一些，晚上投一些是否又較有利?

各媒體報導不盡相同。例如，有寫他們花三百三十六萬元(如12月7日民視新聞)，有寫他們花四百萬元(如12月6日聯合晚報第7版)。不過前者佔多數。累積的抽獎券有說超過15萬張(如90年12月6日聯合晚報第7版)，亦有說14萬張(如12月8日東森新聞)。至於每日的抽獎券數，報導較少，且不完整。

由於京華城指出每天的抽獎過程均有律師見證，並拍照存證，作假問題應可不用考慮。又是由消費者的手中抽出(90年12月6日中國時報第10版)。再加上抽獎者也不見得是從下層、中層或上層抽出，因此特殊的數字或特殊的投法，並沒有證據顯示會較容易中獎。從機率的角度的來看，愈早將所擁有的抽獎券，全投入箱中，愈會提高中獎機率。

雖然我們不知道每天累積的抽獎券數，但猜想京華城也沒有精確地去計算。如果是因抽出汽車而帶動購物風潮，有可能一開始人數較少，例如，第1天有1萬張抽獎券，後來逐漸增加。假若是這樣，第一天徐姓夫婦抽獎券所佔比例約為

$$\frac{88}{10,000} = 0.0088$$

(他們11月23至25日花了兩百多萬，換來888張抽獎券，但抽獎是由11月26日起，因此抽獎的第一天，他們在票箱裡的票似應至少有888張)。至於最後所佔比率(如果全部抽獎券為15萬張)

$$\frac{1,537}{150,000} = 0.010247,$$

或(如果全部抽獎券為14萬張)

$$\frac{1,537}{140,000} = 0.010979,$$

其中 $1,537 = 1,543 - 6$ ，因最後一天時，他們已被抽出6張，所以箱內尚有他們的1,537張抽獎券。

對徐姓夫婦，每日之中獎率並不相同。中間會有幾天中獎率較高，最後一天較低。若以 X 表徐姓夫婦總共中的汽車數(即抽出他們的獎券數)，則在所知的資訊下， X 的分佈並無法求出。

我們考慮一簡化後的情況：箱內共有15萬張獎券，徐姓夫婦有1,500張，要自其中抽出100張。由於獎券抽出後並不放回，因此他們所抽中的獎券數 X 有超幾何分佈 $\mathcal{H}(150,000, 1,500, 100)$ 。即

$$P(X = 7) = \frac{\binom{1,500}{7} \binom{148,500}{93}}{\binom{150,000}{100}}。$$

此機率當然是繁瑣地讓人不想嘗試去算它。

因100與150,000比起來很小，不妨假設抽獎券抽出後皆再放回，則每次會抽中這對夫婦之獎券之機率為 $1,500/150,000 = 0.01$ ，而抽100次。在此情況下， X 有二項分佈 $\mathcal{B}(100, 0.01)$ 。再利用波松近似，因 $100 \cdot 0.01 = 1$ ，得 X 有近似的波松分佈 $\mathcal{P}(1)$ 。因此，這對夫婦十天中，至少會中一部車的機率為

$$1 - e^{-1} \doteq 1 - 0.367879 = 0.632121。$$

實在不算小。主要是他們的獎券數相當多，約佔全部的百分之1。即使每日來看(每天抽10部車)，每天會被抽中的次數以 $\mathcal{B}(10, 0.01)$ 來估計，則每天至少會中1部汽車的機率約為

$$1 - \binom{10}{0} 0.99^{10} \doteq 1 - 0.904 = 0.096。$$

要注意的是，有7天皆中一部車的的機率，並非約為 $(0.096)^7 \doteq 7.514 \cdot 10^{-8}$ 。此為“連續”7天，每天至少中一部車的機率之近似值，與我們所討論的並不同。

前面說過，抽獎是每天抽10部汽車，並非一口氣抽100部。而10天中有幾天，他們的中獎率，可能是超過0.01的，尤其如果總獎券數是14萬張的話。不過我們就考慮100部汽車是最後一天一起抽，且採用波松近似。在各個不同的 λ 之下，我們列出會中的汽車數 X 之機率的近似值。

如果取 $\lambda = 1.5$ ，則徐姓夫婦會中7部車的機率約為0.000756，約1,323分之一。當然是不大，但卻沒有想像的小。至於要中至少4部車的機率，約為

$$1 - 0.223130 - 0.334695 - 0.251021 - 0.125511 = 0.065643，$$

約15分之一，算是不太難發生。讀者也可試以 $\lambda = 1.2$ 的波松分佈，來估計徐姓夫婦所得汽車數之機率，應不至於太離譜。在資訊如此不完整的情況下，波松分佈在此扮演一簡潔而有效的粗略估計角色。總之，中7部車的機率雖很小，但絕不是如0.01的7次方般的小(此約為每天只抽1部車，“連續”7天皆中的機率)。

表1 對 $P(\lambda)$ 分佈，不同 λ 下的 $P(X = k)$ 之值， $k = 0, 1, \dots, 7$

$k \setminus \lambda$	1.0	1.2	1.5	1.8	2.0
0	.367879	.301194	.223130	.165299	.135335
1	.367879	.361433	.334695	.297538	.270671
2	.183940	.216860	.251021	.267784	.270671
3	.061313	.086744	.125511	.160671	.180447
4	.015328	.026023	.047067	.072302	.090224
5	.003066	.006246	.014120	.026029	.036089
6	.000511	.001249	.003530	.007809	.012030
7	.000073	.000214	.000756	.002008	.003437

雖然中7部車的機率並不高，但從新聞的觀點，只要有一這類幸運發生(也不一定要7部，只要5部以上大約就有新聞價值了)，並不限京華城，任何一家百貨公司，或任何一種抽獎活動(或彩券)皆行，當然幸運者也不需姓徐。如此一來發生的機率就更高了，甚至可說是一必然發生的事件。可參考“純屬巧合”一文的例5。

最後，附帶一提，如果徐姓夫婦的採購是集中在第1天，且1,543張抽獎券都在第1天便投入箱中。又假設全部有150,000張抽獎券，且每天箱中增加15,000張，則每日之中獎率依序比下列數列均大

$$\begin{aligned} \frac{1}{10} &= 0.1, & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} &= 0.05, & \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} &\doteq 0.0333, & \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10} &= 0.025, \\ \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10} &= 0.02, & \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10} &\doteq 0.0166, & \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{10} &\doteq 0.0142, \\ \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{10} &= 0.0125, & \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{10} &\doteq 0.0111, & \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} &= 0.01. \end{aligned}$$

其中第1個 $1/10$ 是由 $1,500/15,000$ 而得。在此情況下，第一天會中的車數約有 $B(10, 0.1)$ 分佈，仍以二項分佈取代超幾何分佈，反正只是要知道約略的機率。因此會中1, 2, 3, 4部車的機率，分別約為0.3874, 0.1937, 0.0574, 0.0112。至於第2天會中1, 2, 3, 4部車的機率，分別為0.3151, 0.0746, 0.0105, 0.0010。如此一來有可能前兩天便已中了好幾部汽車了。