賭國風雲

黃文璋

國立高雄大學應用數學系

1 天性好賭

考古的證據顯示, 賭博的歷史源遠流長, 幾乎自人類文明之始就有了。中外歷史小說及電影裡, 也常有賭的情節, 賭似乎是與生活分不開的。賭還不一定是賭錢。如金庸(1996a)射鵰英雄傳中(第十九、二十及二十二回), 愛賭的老頑童周伯通, 與西毒歐陽鋒賭是否眞能把海上鯊魚盡數殲滅, 一時輸了, 只好遵守諾言, 跳到海裡。結果周伯通後來找到一隻未死的鯊魚, 且爲了扳回勝局, 與那隻鯊魚在大海中共存了好一些日子。另外, 在金庸(1996b)天龍八部第八回中, 黃眉僧爲了救段譽, 要挑戰四大惡人之首的段延慶圍棋, 又爲了爭取先手, 要段延慶猜他七十歲後, 兩隻腳的足趾, 是奇或偶? 連這個也可以賭, 眞是匪夷所思, 而賭注是下棋的先手。你想知道究竟誰賭贏嗎? 結局也很奇特, 建議讀者不妨去查看原書。宋書羊玄保傳, 說他"善奕碁, 碁品第三, 太祖與賭郡, 戲勝, 以補宣城太守"。下圍棋贏了皇帝可當太守, 這種賭還眞不錯。有趣的賭尚有很多。如有一首曲名爲"瀟灑走一回"的歌, 其中有句歌詞"我拿青春賭明天"。

電影裡不論是以賭爲主題, 或有賭的情節, 更是不勝枚舉。本文題目亦爲一部電影的片名, 由莎朗史東(Sharon Stone)及勞勃狄尼洛(Robert De Niro)主演, 英文片名Casino(1995)即爲賭場的代名。

美國有兩大著名的賭城。其一在西部, 即距洛杉磯(Los Angeles)約四小時車程的拉斯維加斯(Las Vegas), 在內華達(Nevada)州。其二在東部, 即距紐約(New York)市約四小時車程的大西洋城(Atlantic City), 在紐澤西(New Jersey)州。蘇珊莎蘭登(Susan Sarandon)與畢蘭卡斯特(Burt Lancaster) 兩位曾主演一部片名就叫大西洋城(1980)的電影, 當然是以該城爲背景。另外, 讓尼可拉斯凱吉(Nicolas Cage)獲奧斯卡金像獎最佳男主角(1995)的遠離賭城(Leaving Las Vegas), 那個賭城不是別的, 就是拉斯維加斯。在此二大賭城的吃與住都很便宜。許多賭場還有精彩的表演, 有些賭場還每小時發遊客1美元, 可連發7小時。一個目的, 都是吸引遊客流連忘返, 持續地賭。

開賭場當然是爲了賺錢, 利用機率來設計出一些讓賭場立於不敗之地的賭戲。至於若你具備特異功能, 賭場卻不會有好的風度。如在雨人(Rain Man)那部奧斯卡金像獎最佳影片(1988)中, 達斯汀霍夫曼(Dustin Hoffman, 這部電影也讓他贏得奧斯卡金像獎最佳男主角), 演一位患有自閉症但很會記牌的人, 與演他弟弟的湯姆克魯斯(Tom Cruise), 聯手玩二十一點(即Blackjack), (合法地)贏了八萬多美元, 賭場便請他們離開, 不准他們再玩了。

除了那些聲光十色的賭場, 我們周圍隨時都有各種賭在進行。如合法發行的各種彩券、樂透獎(lottery)、賽馬、運動比賽場外下注等。至於地下賭場, 及種種小規模的賭更是不知有多少, 好賭是人的天性。每個人都希望能一夜致富(民國88年7月3日中國時報第13版指出, 威力球彩券由於獎金超高而吸引大批民眾購買, 其歷年來最高獎額是西元1998年開出的兩億九千五百七十萬美元)。

平生著作極多, 筆名牛哥的李費蒙, 其第一部作品, 書名就叫賭國仇城。十賭九輸, 賭爲萬惡之源, 我們完全支持少賭爲妙。

南方朔(1999)一文對賭博在中國的歷史, 做了很好的回顧。在論語陽貨篇, 子曰"飽食終日, 無所用心, 難矣哉! 不有博奕者乎? 爲之猶賢乎已!"又在孟子離婁篇下, 孟子曰"世俗所謂不孝者五:惰其四肢, 不顧父母之養, 一不孝也; 博奕, 好飲酒, 不顧父母之養, 二不孝也; ···"。博是一

種兩人對局的勝負遊戲, 奕即圍棋。遊戲裡要加上彩金才夠刺激。因此博奕不被視爲正途。孔子時代尚以爲博奕雖不好, 但比“飽食終日無所用心者”好些, 孟子時代就視博奕爲不孝的一種。到東漢末年, 韋曜寫過一篇“戒博奕論”, 勸世人不要玩博奕。可見很早以前博奕已成爲賭博之同義詞, 且被認爲是一該戒掉的遊戲。民國88年6月15日, 立法院審查“公益彩券發行條例”, 結果挾帶過關所謂“博奕條款”, 即“爲舉辦國際認可的競技活動, 得申請主管機關核准發行特種公益彩券”, 舉國譁然。

既然少賭爲妙, 那爲什麼還要討論賭呢? 此一方面爲了獲知贏的策略, 賭戲在機率論早期的發展中, 曾扮演重要角色。以今日而言, 了解賭局輸贏的機率, 當有助於爲少賭找到理論依據。另一方面, 賭與冒險關係密切。具冒險性格的人, 天生多半有好賭的基因。人類文明的進步, 當然有賴多數孜孜不倦, 腳踏實地的人。但少數冒險家, 一旦成功, 常可大幅提昇文明的進步。歷史上張騫通西域, 哥倫布(Christopher Columbus, 1451-1506)發現美洲, 愛迪生(Thomas Edison, 1847-1931)的致力於發明, 都屬頗有冒險精神者。即使不見得志在提昇人類文明, 社會上仍可接受一些願意冒險對自我挑戰的人, 如攀登喜馬拉雅山之類的。在他們冒險前, 算算成功機率, 將可做爲要花多大功夫以事先準備的參考。許信良脫離民進黨以選總統, 有人說他是天生的賭徒, 此次的豪賭, 賭注是自己的政治前途。旁人也許覺得不值得, 但對許信良來說, 他必是覺得划得來。所以即使是少賭, 但了解賭的內涵, 對我們做各種決策, 將爲一重要的依據。

附帶一提, 在舊約聖經出埃及記第二十章, 載有十誡。在諸多“不可”的規定中, 卻無不可賭博。事實上聖經裡有不少“拈鬮”的事蹟。如在利未記第十六章, “爲那兩隻羊拈鬮, 一鬮歸與耶和華, 一鬮歸與阿撒瀉勒。”即使是獻給上帝的羊, 也並非挑較肥大者, 而是拈鬮, 讓上帝也碰運氣。又在民數記第二十六章, 耶和華曉諭摩西說“···, 還要拈鬮分地。”連上帝都提議拈鬮。至於耶穌被釘死在十字架上後, 兵丁也是以拈鬮來分他的裏衣(見新約聖經約翰福音第十九章)。在英文裡鬮爲lot, 如果查大英百科全書(Encyclopedia Britannica), 在Lottery項下有:

History of lotteries. The practice of determining the distribution of property by lot is traceable to ancient times. Dozens of references can be found in the Bible to the practice. In one example from the Old Testament (Num. 26:55-56), God instructed Moses to take a census of the people of Israel and to divide the land among them by lot.···

拈鬮(lot)就發展成今日的樂透獎(lottery)。通過抽籤搖彩, 憑機會以分配獎金, 自西元1530年義大利的佛羅倫斯(Florence)設立第一個公開發行彩券的機構, 今日樂透獎以各種不同的方式, 風行於世界許多國家。又gamble(賭博)是由game(遊戲、比賽)演變來的。所以對gamble似也不須太排斥, 不妨當作賭戲。只要不著迷, 賭不過是一種遊戲, 一充滿樂趣的遊戲。至於casino則起源於casa, 爲渡假娛樂小屋。

2　致勝策略

在面臨各種挑戰時, 致勝策略是大家所追求的。有人認爲"退此一步即無死所", 有人認爲"退一步海闊天空"。到底該不該退, 要視不同的情況而定, 大原則是要致勝, 而非堅持到底退還是進。在天龍八部中, 那困住多少圍棋高手的珍瓏棋局是如何被解出的? 乃是由棋藝低淺的虛竹, 閉了眼睛, 亂下一子, 殺死自己的一塊白棋後, 而天地一寬, 終於破解(見三十一回)。任何人所想的, 總是如何脫困求生, 從沒有人故意往死路上去想。但結果死路卻導致豁然開朗, 終於勝利。要致勝, 便不能拘泥於某種形式, 所謂隨機應變是也。又有些賽局並無必勝策略, 此時致勝策略便是尋求最大的獲勝機率。

我們先給兩個簡單的例子。讀者在看解答之前, 不妨直觀上先猜測答案究竟爲何?

例1.在越戰獵鹿人(The Deer Hunter,1978)那部電影裡, 有一描述虐待戰俘的方法。在一可裝6發子彈的左輪手槍(revolver)裡, 只放一顆子彈, 隨機地一轉後, 要二戰俘輪流用手槍向自己的頭部發射, 直到有一名戰俘中槍, 另一名戰俘才逃過一劫。這就是所謂俄羅斯輪盤(Russian roulette)的遊戲。你認爲先發射者是否較不利呢?

解.事實上若子彈的位置在1,3,5, 則先發射者會死亡, 若子彈在2,4,6的位置, 則後發射者會死亡。子彈一放定後, 就確定了何者會死亡。而放在1,3,5及2,4,6的位置之機率各爲1/2。所以先發射或後發射, 死亡的機率皆爲1/2。

此問題尚有不少推廣, 可參考Sandell(1997)。

例2.A, B二人組一隊與C下棋。賽法如下:A, B輪流與C 下, 若在三局中C連勝二局, 則C贏, 否則C輸, 但C可挑選先與A 下或先與B下。若已知A的棋技較B爲佳, C該如何選擇呢?

解.乍看之下, C若先與B下, 則與A只要下一局, 似乎較有利。另一方面由於要連勝兩局, 第二局非勝不可,故似乎又該選擇與B下第二局, 因此先與A下似乎較有利, 我們來推導看看。

設C勝A的機率爲a, 勝B的機率爲b, 且設$a < b$。C要連勝兩局, 則必須是勝勝勝, 勝勝敗, 或敗勝勝。故先與A下, 贏的機率爲$aba + ab(1-a) + (1-a)ba = ab(1-a)$。若先與$B$下, 贏的機率爲$bab + ba(1-b) + (1-b)ab = ab(2-b)$。而因$a < b$, 故先與$A$下贏的機率較大。

底下爲一尋找最佳策略的例子(取自Rawsthorne(1989))。由此例可看出, 所謂“最佳”往往須先做些限制, 否則是不會存在最佳策略的。

例3.有一賭徒, 身上一文不名。賭場老闆好心地讓他玩100回。每回他可選擇下述二賭法之一: (1)無條件地獲得1元, (2)先取一整數 $n \geq 2$, 然後有 $2/(n+1)$ 之機率獲得 n 元, 有$(n-1)/(n+1)$ 之機率失去1元。選擇賭法(2)之先決條件是他身上至少要有1元。若此賭徒希望玩100回後, 可獲得至少200元, 則其最佳策略(即達到目的的機率要最大)爲何? 並問對採用該策略, 其成功之機率爲何?

解.首先看賭徒若每次皆採賭法(1),則可穩獲100元, 但他顯然並不滿意。不論採賭法(1)或賭法(2), 每次之期望值皆爲1元($n \cdot 2/(n+1) - 1 \cdot (n-1)/(n+1) = 1$)。玩100次後之所得, 以 W 元表之, 則 W 之期望值爲100。賭徒是想得到至少是期望值二倍的錢才滿足, 野心不小。

賭徒可採如下策略:在奇數回採賭法(1), 在偶數回(如第 k 次)採賭法(2), 並取 $n = 99 + k$。繼續採此策略, 直到一旦贏一偶數回, 自此起便皆採賭法(1)。可看出只要贏一偶數回, 則100回後之總所得恰爲200元, 但若一次偶數回皆未贏, 則最後之總所得爲0元。而50次偶數回皆輸的機率爲

$$\frac{100}{102}\frac{102}{104}\cdots\frac{196}{198}\frac{198}{200} = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}。$$

故採用此策略, 有1/2之機率, $W = 200$, 有1/2之機率 $W = 0$(期望值仍爲100)。

因不論採用那一策略, $W \geq 0$ 必成立(爲什麼?), 且 $E(W) = 100$也必成立, 故 $W \geq 200$ 之機率不可能超過1/2, 否則 $E(W) > 100$。故 $W \geq 200$ 之機率要等於1/2, 唯一的可能是 $W = 200$ 及$W = 0$ 之機率各爲$1/2$。

讀者不難理解, 若欲望增大(亦即將200元的底限提高), 則達到目的之機率必然降低, 因所得之期望值總是維持100元。

在Rawsthorne(1989)中, 亦如下證明前述策略爲唯一的最佳策略。可惜其證明有誤。在習題中, 我們會讓讀者以較少的回數, 來了解最佳策略是不唯一的。底下爲了簡潔,將"元"皆略去。

因已指出 $W = 200$ 或 $W = 0$ 爲最佳策略下, 唯一可能的結局, 故99回結束後, 累積所得必爲1或199, 且在第100回, 賭徒必須分別選賭法(2)且 $n = 199$ 或賭法(1)。若1與199爲99回結束後, 僅可能的累積所得, 則98回結束後, 累積所得必爲0或198, 且在第99回, 賭徒須選賭法(1)。一般而言, 若0與 $100 + k$ 爲第 k 回結束後, 僅可能的累積所得, 且 k 爲偶數, 則在此回之前的累積所得, 必須是1或 $99 + k$, 且在第 k 回賭徒須分別選賭法(2)且 $n = 99 + k$ 或賭法(1)。同理, 若1與 $100 + k$ 爲第 k 回結束後, 僅可能的累積所得, 且 k 爲奇數, 則在此回之前的累積所得, 必須是0或 $99 + k$, 且在第 k 回賭徒須選賭法(1)。即得證最佳策略之唯一性。

奮勇爭先不一定都是好的, 有時不妨讓一步, 見下例。

例4. 設有 A, B, C 三人決鬥, 每人每次可發射一槍, 由於 A 的技術最差, 讓 A 先發射, B的技術次之, 因此 B 第二位發射。C 則爲一死亡射手, 命中

率百分之百, 他第三位發射。如此依序發射, 直至只餘一人存活。每次輪到某位發射, 他可選擇向一位對手開槍, 或對空發射(因此不會傷及任何人)。死亡射手則不允許對空發射。問 A 之最佳策略爲何?

解. 令 A, B, C 三人每次發射射中(假設射中後便令對手致命)對手之機率分別爲p_1, p_2 及1, $0 < p_1 < p_2 < 1$。A 先發射,可選擇對空、對 C, 或對 B 發射等三種策略。底下我們分別計算在三種策略下,A 獲勝之機率。

(一)空發射。我們列出使 A 贏之各可能的後續如下:

(i)B 射中 C, A 射中B。

(ii)B 射中 C, "A 未射中 B, B 未射中A"循環 r 次($r \geq 1$), A 射中 B。

(iii)B 未射中 C, C 射中 B, A 射中 C。

令 P_1 表若採策略(一), A 贏之機率。則

$$
\begin{aligned}
P_1 &= p_2 p_1 + \sum_{r=1}^{\infty} p_2((1-p_1)(1-p_2))^r p_1 + (1-p_2)p_1 \\
&= p_1 + \frac{p_1 p_2 (1-p_1)(1-p_2)}{1-(1-p_1)(1-p_2)} \\
&= \frac{p_1(1-(1-p_1)(1-p_2)^2)}{1-(1-p_1)(1-p_2)} 。
\end{aligned}
$$

(二)A 射向 C。採用此策略, 在 A 射出後, 有兩種使 A 贏之可能性。其一爲 A 未射中 C, 則此後便如同(一)之發展。其二爲 A 射中 C, 則後續之發展爲: B 未射中 A, "A 未射中 B,B 未射中 A"循環 r 次($r \geq 0$), A 射中 B。

令 P_2 表採策略(二),A 贏之機率。則

$$
\begin{aligned}
P_2 &= (1-p_1)P(A\text{贏}|A\text{第一發未射中}) \\
&\quad + \sum_{r=0}^{\infty} p_1(1-p_2)((1-p_1)(1-p_2))^r p_1 \\
&= (1-p_1)\frac{p_1(1-(1-p_1)(1-p_1)^2)}{1-(1-p_1)(1-p_2)} + \frac{p_1^2(1-p_2)}{1-(1-p_1)(1-p_2)} \\
&= \frac{p_1(1-p_1)(1-(1-p_1)(1-p_2)^2) + p_1^2(1-p_2)}{1-(1-p_1)(1-p_2)} 。
\end{aligned}
$$

(三)A 射向 B。在 A 射出後有兩種可能性。其一爲 A 射中 B, 則 A 隨

即被 C 射中,因此 A 不可能贏。其二爲 A 未射中 B, 則 A 要贏, 此後便如同(一)之發展。

令 P_3 表採策略(三),A 贏之機率。則

$$
\begin{aligned}
P_3 &= (1-p_1)P(A\text{贏}|A\text{第一發未射中}) \\
&= (1-p_1)P_1\text{。}
\end{aligned}
$$

因 $1-p_1<1$, 故不論 p_1, p_2 之值爲何, 策略(三)劣於策略(一)。所以 A 不可能採取策略(三)。至於策略(一)與策略(二)何者較佳, 就看 P_1 與 P_2 何者較大。而

$$P_1-P_2=\frac{p_1^2(p_2-(1-p_1)(1-p_2)^2)}{1-(1-p_1)(1-p_2)}\text{。}$$

故 $P_1>P_2$, 若且唯若

$$p_2>(1-p_1)(1-p_2)^2\text{。} \tag{1}$$

因 $1-p_1<1$, 經由解 $p_2>(1-p_2)^2$, 得不論 p_1 之值爲何, 當 $p_2>(3-\sqrt{5})/2 \doteq 0.382$, 則 A 採策略(一)較好。而因 $1-p_1>1-p_2$, 經由解 $p_2<(1-p_2)^3$, 得p_2 約小於0.318時, A 採策略(二)較好。可以這麼講, 當 p_2 較大時, A 放棄先手, 讓B 先解決 C, 再與 B 拼命。但若 p_2 較小, 則 C 不易被 B 射中, 此時 A 要協助 B 先對付 C。至於 $0.318<p_2<0.382$(這是一不太大的區間)時, 就要檢驗(1)式是否成立, 以決定是否採策略(一)。

在歷史上, 當三國鼎立, 且是一弱二強時, 最弱者通常是慫恿次強者挑釁最強者, 而最弱者最好是先袖手旁觀, 待次強者打敗最強者後, 最弱者再與次強者一拼; 若是二弱一強, 那二弱就要先聯手打強者, 最弱者此時絕不能置身事外, 否則次弱者被最強者消滅後, 最弱者立即不保。這是最弱者在夾縫中生存之道。

前述決鬥問題還可做不同的假設, 可參考Gardner(1972/73)。

3 破產問題

賭博雖帶給人們很大的娛樂效果, 如果賭到破產則是一件令人傷感的事。本節我們來看幾個跟破產有關的問題。

底下考慮一賭博的模式。在隨機過程(Stochastic processes)裡的馬可夫過程(Markov processes)中, 常稱此爲古典破產問題(classical ruin problem), 也屬於隨機漫步(random walk)中的問題。

設每次之賭注爲1元, 贏與輸之機率分別爲p及q, $p+q=1$。又設一開始有r元, $0\le r\le n$, 若全輸光或賭資達到n元便停止不玩了。我們假設(見黃文璋(1995)第二章)“最後”必定是輸光或達到n元。令u_r表輸光(即破產)之機率, $v_r=1-u_r$則表達到目標之機率, $n=\infty$則表賭博之對手(如莊家)有無限的資金。則由假設可得下述方程組:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= q+pu_2, \\
u_i &= qu_{i-1}+pu_{i+1}\ ,\ 2\le i\le n-2, \\
u_{n-1} &= qu_{n-2}\text{。}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

而$u_0=1$, $u_n=0$爲二邊界條件。(2)式爲一差分方程組(difference equations), 若$p\neq q$, 可如下求解。

先將(2)式改寫爲

$$u_i-u_{i-1}=\frac{q}{p}(u_{i-1}-u_{i-2}), i=2,3,\cdots,n\text{。} \tag{3}$$

再將(3)式由$i=2$至$i=j$, 左、右分別乘起來並消去共同項得

$$u_j-u_{j-1}=(\frac{q}{p})^{j-1}(u_1-1), j=1,2,\cdots,n\text{。} \tag{4}$$

將(4)式由$j=1$至$j=r$, 左、右分別相加得

$$u_r-1=\frac{1-(q/p)^r}{1-q/p}(u_1-1), r=1,2,\cdots,n\text{。} \tag{5}$$

利用$u_n=0$, 由上式可得$u_1-1=-(1-q/p)(1-(q/p)^n)^{-1}$, 代入(5)式即求出$p\neq q$時

$$u_r=\frac{(q/p)^n-(q/p)^r}{(q/p)^n-1}, r=1,2,\cdots,n-1\text{。} \tag{6}$$

若$p=q$,(4)式成為

(7) $$u_j-u_{j-1}=u_1-1, j=1,2,\cdots,n\text{。}$$

由此得

(8) $$u_r-1=r(u_1-1), r=1,2,\cdots,n\text{。}$$

利用$u_n=0$解出當$p=q$時

(9) $$u_r=\frac{n-r}{n}, r=1,2,\cdots,n-1\text{。}$$

至於v_r, 由$u_r+v_r=1$立即可求出來。

另外, 若$n=\infty$, 則u_r之解為

(10) $$u_r=\begin{cases}1 & ,\text{若}q\geq p,\\ (q/p)^r & ,\text{若}q<p\text{。}\end{cases}$$

若$p=q$, 由$v_r=1-u_r=r/n$, 可知若一賭徒帶了$r=999$元去賭, 則有0.999之機率在輸光全部錢之前贏得1元。若$p=0.4, q=0.6$, 此賭局雖對賭徒不利, 但此時在輸光全部錢之前贏得1元之機率近似2/3:

$$\begin{aligned}1-\frac{(3/2)^{1,000}-(3/2)^{999}}{(3/2)^{1,000}-1} &= 1-(\frac{3}{2}-1)\frac{(3/2)^{999}}{(3/2)^{1,000}-1}\\ &\doteq 1-(\frac{3}{2}-1)\frac{1}{3/2}=\frac{2}{3}\text{。}\end{aligned}$$

一般而言, 一賭徒若一開始之賭資r夠大, 則在破產前要贏到一不算大的錢$n-r$之機率並不小。稍後我們會做一些比較, 底下先看一有趣的例子。

某人每年都去一趟摩納哥(Monaco, 位於法國東南海岸之一小國)的蒙地卡羅(Monte Carlo, 俗稱賭城)度假幾天, 當然賭是免不了的。幾年下來, 他總是可贏到足夠的錢, 來支付旅費及一切開銷。個中原因他無法猜透, 以為冥冥中有股奇妙的力量在幫他。事實上此並非一太令人驚訝的現象。假設$p=q=1/2$, 且他帶的錢約為旅費的9倍, 則每年在破產前要贏到旅費的機率約為9/10。連續10年要贏到旅費之機率為$(9/10)^{10}$, 此值約為0.3486並不算太小。而且因每年達到目標的機率9/10很大, 若偶爾那一

年沒達到目標, 可能會只當做運氣不好, 而不會太在意(10年中至少贏9次的機率約爲0.7361) 。要知通常人們有了先入爲主的印象後, 往往找證據支持該印象, 而有意無意地忽略對該印象不利的證據 。

由上述討論知, 富者要愈富是較容易的 。只是通常少有人覺得自己已是富者, 儘管資金充裕(r 不小), 但由於野心也很大(n 更大), 因此破產的可能性未能減小 。

我們再看若改變賭注的大小會如何? 若將每次賭注1元改爲每次1/2元, 此與一開始有$2r$元, 輸光或贏至$2n$元便停止, p及q維持不變, 是等價的 。則破產的機率u_r^*爲(利用(6)及(9)式)

$$(11)\qquad u_r^* = \begin{cases} \frac{(q/p)^{2n}-(q/p)^{2r}}{(q/p)^{2n}-1} = u_r\frac{(q/p)^n+(q/p)^r}{(q/p)^n+1} & > u_r \ \ ,\text{若}q > p, \\ & < u_r \ \ ,\text{若}q < p, \\ u_r & \ \ ,\text{若}q = p\text{。} \end{cases}$$

即若$p = q$, 改變賭注不影響破產之機率; 若$q > p$, 賭注減半破產機率變大; 若$q < p$, 賭注減半破產之機率變小 。賭注若加倍情形則反過來 。一般而言, 在r與n不變之下, 若賭局對賭徒有利($p > q$), 則賭注愈小對賭徒愈有利, 反之若賭局對賭徒不利($p < q$), 則賭注愈大對賭徒愈有利 。例如, 由表1(此表取自Feller(1968) p.347), 可看出設$p = 0.45 < q = 0.55$, 且$r = 90$,$n = 100$, 若每次賭1元, 則破產機率約爲0.866; 若每次賭10元(等價於$r = 9, n = 10$), 則破產機率降至約0.210 。此現象可解釋歷史上, 兩軍作戰時, 居劣勢的一方往往採孤注一擲的策略, 要與對方拼命, 而居優勢的一方則往往是用蠶食的方法 。在史記項羽本記裡, 楚漢久相持未決, 項王謂漢王(劉邦)曰"天下匈匈數歲者, 徒以吾兩人耳, 願與漢王挑戰決雌雄, 毋徒苦天下之民父子爲也 。"漢王笑謝曰"吾寧鬥智不能鬥力 。"其時項羽已漸居下風, 劉邦是不會願意與其決死戰的 。當天下大亂, 群雄並起, 逐鹿中原, 其中卻只有一能成而爲王, 其餘皆敗而爲寇 。此時須得設法減小爲寇(破產)的機率 。

我們也可以選舉來説明 。佔優勢的政黨, 往往易在小選區中獲勝(如村里), 小政黨在小選區是難有機會的 。但在大選區中(如縣市, 甚至全國),

表1 在不同 p,q,r,n 下之破產機率

p	q	r	n	u_r	D_r
0.5	0.5	9	10	0.1	9
0.5	0.5	90	100	0.1	900
0.5	0.5	900	1,000	0.1	90,000
0.5	0.5	950	1,000	0.05	47,500
0.5	0.5	8,000	10,000	0.2	16,000,000
0.45	0.55	9	10	0.210	11
0.45	0.55	90	100	0.866	765.6
0.45	0.55	99	100	0.182	171.8
0.4	0.6	90	100	0.983	441.3
0.4	0.6	99	100	0.333	161.7

小政黨有時就有機會獲勝了。讀者不妨想想台灣的選舉現況。

除了破產及贏錢的機率, 我們對一賽局會持續多久之期望值也很有興趣。也就是我們想知道平均可玩多少次? 令 A_r 表一開始有 r 元, 至此賽局結束所需玩之次數。則 $D_r = E(A_r)$ 爲有限(證明見Feller (1968) Chapter XIV.4), 並滿足下述非齊性差分方程式

$$
\begin{aligned}
D_r &= q(D_{r-1}+1)+p(D_{r+1}+1) \\
&= qD_{r-1}+pD_{r+1}+1,\ 1\le r\le n-1, \qquad (12)
\end{aligned}
$$

且有邊界值

$$D_0 = D_n = 0 \text{。} \qquad (13)$$

其解爲先找出齊性方程式的解, 再找一特別解, 兩者相加要滿足邊界值。

計算過程省去了, 解爲

$$D_r = \begin{cases} \frac{r}{q-p} - \frac{n}{q-p}\frac{(q/p)^r-1}{(q/p)^n-1} & ,p\ne q, \\ r(n-r) & ,p=q \text{。} \end{cases} \qquad (14)$$

此期望值較我們想像中的大。例如, 若某人有 $r = 1$ 元, 而 n =1,000, 且 $p = q$, 則 $D_1 = 999$, 雖破產機率高達0.999, 但在破產前, 卻可玩不少次。其他例子見表1。另外

$$\lim_{n\to\infty} D_r = \begin{cases} \infty & ,若\ q \le p, \\ \frac{r}{q-p} & ,若\ q > p。 \end{cases} \tag{15}$$

輪盤賭(roulette)流行於賭場中的歷史已很久。Isaac(1995)p.57對它如下地描述: Roulette is perhaps the most glamorous and ramantic of casino games.

在美國此遊戲大致是這樣子: 在一輪子上有38格, 其中有36格爲數字1至36(18個紅色18個黑色), 另外兩格爲綠色, 一個爲0, 一個爲00。主持人轉動輪子, 凹槽裡的球也跟著轉動, 最後停在某一格。有各種賭法, 如賭紅色或黑色, 奇數或偶數, 某一數字, 或某一群數字(如1-18,19-36,1-12, 13-24,25-36等)。獲勝的期望值很容易求, 如

$$P(紅) = P(黑) = P(奇數) = P(偶數) = \frac{18}{38} \doteq 0.47368,$$
$$P(1) = \frac{1}{38} \doteq 0.02631\ 。$$

賭紅、黑、奇、偶之賠率皆爲1賠1, 賭任一數字之賠率爲35賠1。莊家贏就是靠0及00二格。如果賭注是1元,賭紅色之期望淨所得爲

$$1 \cdot \frac{18}{38} - 1 \cdot \frac{20}{38} = -\frac{2}{38} \doteq -0.05263,$$

賭任一數字之期望淨所得爲

$$35 \cdot \frac{1}{38} - 1 \cdot \frac{37}{38} = -\frac{2}{38} \doteq -0.05263,$$

二者相同。

有經驗的賭徒在下賭之前, 常會先在場邊觀察一陣子。如果連續好多回黑色都未出現, 由於好賭者多半也懂點機率, 則依據大數法則(Law of large numbers), 他認爲黑色“應”會快出現了, 於是押了一大筆錢在黑色,

結果黑色仍未出現。不服氣再押黑色, 仍輸了。事實上每次的旋轉爲獨立, 輪盤並無記憶。大數法則只是說, 如果轉動的次數夠多, 黑色出現的相對頻率接近18/38的機率很大。所以我們確知黑色"總是"會出現的, 但大數法則並未告訴我們何時黑色會出現, 當然更沒告訴我們下一次的旋轉, 黑色是否"較易"出現。

誤解機率的涵義是破產的開始。設以 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 分別表各次之淨所得, 且以 $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 表至第 n 次之累積淨所得。大數法則指出當 n 很大時,

$$\frac{S_n}{n}\text{接近} -\frac{2}{38}\text{的機率很接近1。}$$

由此可看出, 當 n 很大時, S_n 不但是負的, 且絕對值很大的機會很大。換句話說, 對前述輪盤賭, 大數法則告訴我們, 只要持續地賭, 再多的錢都輸光的機會很大。

4 公正賭局

一賭局(或賽局)若賭徒淨所得之期望值爲0, 便稱此爲一公正的賭局(fair game)。不公正的賭局有兩種情況, 依淨所得之期望值爲正或爲負, 而稱爲有利(favorable)或不利(unfavorable)。必須一提的是, 若淨所得之變異數爲無限大時, 公正的賭局就絕對是一誤用的名詞, 見Feller(1968) Chapter X 之說明。

丟一公正的骰子, 出現幾點就給你多少元。因點數的期望值爲3.5, 所以如果每玩一次要先付.5元, 則此爲一公正的賭局。

吃角子老虎(slot machine), 這是賭場裡常可見到的一種機器, 簡單好玩。從那一排一排的機器中, 挑一台坐到其面前, 即使還沒開始投錢, 左鄰右舍嘩啦嘩啦錢掉下來的聲音, 帶給你很大的聽覺享受, 彷彿那些錢是你的。再加上不少人一直任掉下來的錢堆在面前, 每次從其中挑幾個丟, 全輸光再去換零錢。由於每個人面前都是錢, 看起來似乎都已贏了不少錢(起身去換錢的過程當然少有人留意到), 視覺上的享受

也不小。美國賭場吃角子老虎的最小賭注是0.25元(即一quarter)。曾有人算過(見Weaver(1982)一書p.158), 每丟一單位的錢, 期望的回收是5,888/8,000=0.736。看起來並不太壞。因賭客會想, 賭場也有經營成本, 而且這是給人如此刺激的娛樂。所以一單位的錢還可拿回0.736已算不錯了。假設一分鐘平均玩12次, 且每次只丟最少的0.25美元, 則一小時下來, 平均要輸47.52美元。如果輸錢後想扳回, 提高賭注, 每次1元, 則平均1小時要輸190.08美元。可不要小看那一台機器, 的確是吃角子老虎。

二十一點算是對賭客較不吃虧的賭戲。它有兩條規則對賭客算是較有利:

(i)平點算和局;

(ii)莊家不到17點必須補牌, 達到17點後則不能補牌, 不可參考牌桌上賭客的牌而做決定。

如果牌桌上除莊家外有4位賭客, 點數分別爲13,14,15,16, 而莊家把底牌翻開後共16點, 則他必須補牌。但顯然他爆掉的機會很大。另外, 如果牌桌上其他4位賭客的牌, 點數分別爲17,19,20,21, 而莊家把底牌翻開後共17點, 則卻不能補牌。由於一次有多副牌混在一起, 要記牌並不容易, 賭場如果發現有"記牌者"(card counter), 會將其請出賭場(像雨人那部電影中一樣)。但沈著應付, 二十一點是兼具娛樂價值, 又不致輸太多錢的賭戲。

一般而言, 賭場裡可以說很難存在公正的賭局。去賭場下賭的人, 追求的是刺激, 或大贏的喜悅。各國政府發行彩券當然也不會是公正的。彩券上常寫有類似"一券在手希望無窮"的話。一般人花小錢, 沒中就算了, 損失也不大, 但若中了, 很可能是筆極大的錢, 往後生活可整個改變。

保險, 在某種意義下可看成賭局。不難理解也不會是公正的賭局。但買保險者往往有其他層面的考慮, 此賭局雖不公正, 他們是不會介意的。

撇開這些, 底下我們給一關於公正賭局的有趣例子。

例5.錢包詭論(Wallet paradox)。

考慮下述賭局:A, B 二人皆將錢包放在桌上, 誰的錢包裡錢較少, 便獲得兩個錢包裡所有的錢。至於若錢一樣多, 則各自拿回自己的錢。

A, B 二人都這樣想:我如果輸是輸掉原有的錢, 但贏的話, 則得到較原有的更多的錢。所以這是對我有利的賭局。

兩人均認爲對自己有利, 竟有這種賭局? 這是此賭局被稱爲詭論的原因。事實上若輸的話, 通常是錢包中有較多的錢。對樂觀者而言, 只看到贏是得到較多的錢, 對悲觀者而言, 他會看到輸是輸較多的錢。所以不能由這種"心理上"的感覺來說有利或不利。

我們試以機率的方法來解此問題。令 X 及 Y 分別表 A, B 二人錢包中所有的錢, 且令 $W_A = W_A(X, Y)$ 及 $W_B = W_B(X, Y)$ 分別表 A 及 B 之淨所得。則

$$W_A(X,Y) = \begin{cases} -X & ,\text{若} X > Y, \\ Y & ,\text{若} X < Y, \\ 0 & ,\text{若} X = Y, \end{cases}$$

而 $W_B(X, Y) = -W_A(X, Y)$。當 $E(W_A) = 0$,則此爲一公正的賭局。

若不知 X, Y 之分佈, 就無法求 $E(W_A)$。所以對 X, Y 之分佈要做些假設。最自然的假設是X, Y 爲獨立、有共同分佈, 且取值在 $[a, b]$ 或 $[a, \infty)$, 其中 $0 \le a < b < \infty$。在此假設下, (X, Y) 及 (Y, X) 之分佈相同。爲了簡便, 假設 (X, Y) 爲連續型的隨機變數, 其機率密度函數爲 f。則

$$\begin{aligned}
& E(W_A) \\
&= \int_a^b \int_a^b W_A(x,y) f(x,y) dy dx \\
&= \int_a^b \int_a^b W_A(y,x) f(y,x) dy dx \\
&= \int_a^b \int_a^b W_B(x,y) f(x,y) dy dx \\
&= E(W_B)\text{。}
\end{aligned}$$

其中用到變數代換 $(x, y) \to (y, x)$。至於第三個等號爲何成立, 留給讀者自行思考。若區間是 $[a, \infty)$ 結果也相同。有了上述結果, 再加上因

$W_B = -W_A$, 因此 $E(W_B) = -E(W_A)$, 即得 $E(W_A) = 0$ 。故得證此爲一公正的賭局 。

舉個例子來看 。設 X,Y 皆在區間 $[0,1]$ 上均勻分佈(uniformly distributed) 。給定$X = x$, 若$Y \in (x, 1]$, 則A會贏Y元; 若$Y \in [0, x)$, 則A 會輸x元 。因此

$$E(W_A|X = x) = \int_x^1 ydy - \int_0^x xdy = \frac{1-3x^2}{2} 。 \tag{16}$$

故

$$E(W_A) = \int_0^1 E(W_A|X = x)dx = \int_0^1 \frac{1-3x^2}{2}dx = 0 。$$

有趣的是, 由(16)式,$E(W_A|X = 1) = -1$,且 $E(W_A|X = 0) = 1/2$ 。也就是說, 若錢包裡有1元, 則要準備失去; 而若錢包裡沒錢, 則可期望贏1/2元(錢包裡可能會有的錢之期望值) 。但若錢包裡有1/2元(期望值), 則 $E(W_A|X = 1/2) = 1/8$, 即期望淨所得爲正 。至於爲什麼爲正, 相信不難想通 。

附帶一提, 若僅是 $E(X) = E(Y)$, 則此並不一定爲公正的賭局 。反例可見Merryfield(1997) 。

再看一個公正賭局的例子 。

例6. 下述賭法曾困擾許多賭徒多年: 丟一公正的銅板, 正面出現則賭徒贏, 否則莊家贏 。賭徒採用的策略是每次賭注加倍, 直到贏一次便停止 。假設第一次的賭注爲 a 元, 由於銅板每次均出現反面的機率爲0, 即至少出現一次正面的機率爲1 。則賭徒最後必(機率爲1)帶著 a 元離開 。事實上, 若第一次正面是在第 n 次丟擲銅板才出現, 則前 $n-1$ 次共輸的錢數爲 $a + 2a + 4a + \cdots + 2^{n-2}a = (2^{n-1} - 1)a$, 而第 n 次的賭注爲 $2^{n-1}a$ 元, 所以淨所得是 a 元 。

當然我們看到上述討論中有一陷阱, 即賭徒須有無限的時間及無限的資金才能採用此策略 。例如, 設賭徒一開始有 $2^m - 1$ 元, 且 $a = 1$ 。又設賭局不允許欠債 。易見此時若賭徒首 m 次賭局皆輸, 便輸光了 。此情況發生的機率爲 2^{-m} 。而若首 m 次中出現一次正面(此機率爲 $1 - 2^{-m}$), 便

淨贏1元。故他淨所得之期望值爲

$$1 \cdot P(\text{贏}) - (2^m - 1)P(\text{輸}) = 1 \cdot (1 - 2^{-m}) - (2^m - 1)2^{-m} = 0 \text{。}$$

故雖贏錢的機率爲正, 且當 m 很大時此機率不小 $(1 - 2^{-m})$, 但淨所得之期望值卻爲0。仍是一公正的賭局。

這類例子很多。譬如說, 有人賭之前先給自己訂個規矩: 如果淨所得達到10,000元便停止不玩了。採用此策略不是都贏著錢離開? 不可能的任務竟然如此輕易完成?

隨機過程裡有一主題叫"平賭過程", 其英文名稱martingale, 乃源自於例6中, 賭注加倍直到贏一次便立即停止之源於法國的一種賭博策略。在平賭過程的討論中, 會證明在資金或時間非無限的情況下, 而且不能未卜先知(即策略只能與至目前的結果有關), 則沒有一賭博系統, 能將公正的賭局, 轉換成有利的賭局。

我們再看另一著名的詭論。

例7. 聖彼得堡詭論(The St. Petersburg paradox)。

聖彼得堡詭論(又稱The Petersburg paradox)可說是機率裡相當有名且極饒富趣味的一個謎題(puzzle)及詭論。這是Daniel Bernoulli(1700-1782)所提出的, 他是James Bernoulli(1654-1705, 大數法則之首位證明者)的姪兒。

一次聖彼得堡賭局(St. Petersburg game), 是這樣的:投擲一公正的銅板, 直至出現一正面才停止, 若停止是在第 r 次發生, 可得 2^r 元。則因第 r 次停止的機率爲 2^{-r}, 故每次賭局所得之期望值爲 $\sum_{r=1}^{\infty} 2^{-r}2^r = \infty$。所以不論每次之賭注多大, 只要是一有限值, 對賭徒均有利。只是若賭注愈大, 便要賭愈多次才有可能得到正的淨所得。因此每次之賭注須爲無限大, 才是一公正的賭局。但是否有人願意付無限多的錢來參與此賭局? 這是此問題成爲一詭論的原因。

以A, B分別表賭徒及莊家。不論A付B多少錢, B一定不願讓A玩。但此賭局是否眞值無限多元呢? 由於此賭局是在第 r 次停止的機率爲 2^{-r},

而有沒有人願意先付100萬元以玩此賭局呢? 答案很可能是否定的。此因如此一來, 前19次投擲都不能出現正面才可能贏錢(524,288= $2^{19} < 1,000,000 < 2^{20} = 1,048,576$)。而此機率爲 $2^{-19} \doteq 1.907 \cdot 10^{-6}$, 小於五十萬分之一, 非常小。但對 B 來說, 即使 A 付100萬元, 他還不願讓 A 玩呢?

這樣想好了, 設有人提議投擲一個公正的銅板, 若出現正面則給你200元。則顯然付100元玩此賭局是合理的。因100元你出的起, 而若你贏了, 也相信莊家付的起200元。

至於對聖彼得堡賭局, 雖然100萬元比起合理該付的錢非常地少, 但一方面, 對多數人來說, 100萬元並不是小數目; 另一方面, 所謂期望值是無限大, 但莊家是否有無限多的錢來支付呢?

事實上莊家就是沒有無限多的錢, 而任何人若有無限多的錢, 又何必來賭? 假設莊家 B 只有 2^m 的錢, 且若銅板在第 m 次以後才出現正面, 則 B 皆付 A 2^m 元。在此比較實際的假設下, A 之期望所得爲

$$\sum_{r=1}^{m} 2^{-r}2^r + \sum_{r=m+1}^{\infty} 2^{-r}2^m = m + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots) = m + 1 \text{。}$$

即此賭局值 $m+1$ 元, A 可付 $m+1$ 元以玩此賭局。例如, 若 B 有65,536= 2^{16} 元, 則A 付 B 17元; 若 B 有43億元左右(2^{32} =4,294,967,296), 則 A 付 B 33元以玩此賭局。如此一來 A 應願意玩了。

其次我們來看, 在聖彼得堡詭論中, 若將第 r 次停止可得 2^r 元改爲可得 1.95^r 元會如何? 即倍數稍小於2。乍看之下可能以爲結果差不多, 還是要付無限多的錢且也還是公正賭局。會這樣想是誤以爲前幾次投擲便會出現正面, 所以 1.95^r 與 2^r 的差異不大。1.95/2是很接近1(=0.975), 但 0.975^r 隨著 r 之增大, 愈來愈小。對此賭局,A 之期望所得爲

$$\sum_{r=1}^{\infty} 2^{-r}1.95^r = \sum_{r=1}^{\infty} 0.975^r = \frac{0.975}{1-0.975} = 39 \text{。}$$

換句話說, 此時 A 只願付39元以玩此賭局。至於若將1.95改爲1.8, 則 A 只願付9元了。指數的威力是不容忽視的。

如何將公正賭局的定義稍作修改, 以使聖彼得堡賭局, 能在一適當的賭注下, 而成爲公正的賭局, 可參考Feller(1968)pp.251-253 。

5 風險評估

整個人類的歷史, 整個人的一生, 可說是充滿著賭局 。在三國演義第九十五回, 司馬懿引大軍攻向西城的孔明 。時孔明身邊並無大將, 只有一班文官及兩千五百守軍 。於是使出空城計, 所謂武侯彈琴退仲達 。仲達爲司馬懿的字 。司馬懿退兵後, 孔明說“此人料吾平生謹愼, 必不弄險,見如此模樣, 疑有伏兵, 所以退去 。吾非行險, 蓋因不得已而用之 。”孔明可說贏了此賭局 。

股票的買賣, 任何財務的投資, 一新政策的推出, 都是在進行一賭局 。賭贏賭輸有時影響深遠, 因此事先的風險評估(risk assessment)很重要 。風險評估的主要依據, 自然是機率及統計的各種理論與方法 。

有些人以爲風險是可以被控制的 。例如, 在輪盤賭中, 如果我們掌握充分的資訊, 則結合物理 、數學及計算機專家, 應可準確地預測球會停在那一格 。問題是不用說輪盤的那些機械結構不易完全了解, 各種數據(包含起始的旋轉力)也難以精確地量測 。所以即使預測的方程式爲正確, 但若起始條件(initial conditions)有些偏差, 很可能得到偏差很大的預測值 。

因此我們僅能善用機率統計, 對各種風險給出隨機模式, 並做出統計上最好的預測 。

習 題

1. 在例2中, 若比賽改爲三戰兩勝制, 則 C 要先與 A 或先與 B 下? 若改爲下 n 局, $n \geq 3$, C 連勝兩局則贏, 此時 C 該先與誰下?
2. 在例3中, (i) 分別對玩6回, 及8回, 求不同最佳策略數; (ii) 在玩的回數固定下, 不同的最佳策略數有何相同處?

3. 在例4中, (i)若 A 採策略(一), 分別求此時 B 及 C 贏之機率; (ii)若 A 採策略(二), 分別求此時 B 及 C 贏之機率 。

4. 在例4中, 若改爲$0 < p_1 < p_2 < p_3 < 1$, 其中p_3表C之命中率, 此時結果有何不同?

5. 設修改聖彼得堡賭局爲最多只能投擲銅板 N 次, 且若第1次至第 N 次投擲皆得反面, 便一無所得 。問賭注爲何, 才爲一公正賭局?

6. 試求在聖彼得堡賭局中, 若將第 r 次停止可得 2^r 元改爲可得 a^r 元, 其中 $1 \leq a < 2$, 此時每次之賭注爲何, 才是一公正賭局?

7. 下述三種選擇你的優先順序爲何, 並說明其原因: (i)保證獲得一千元, (ii)有千分之一的機會獲得一百萬元, (iii)有十萬分之一的機會獲得一億元 。

參考文獻

1. 金庸(1996a). 射鵰英雄傳, 第三版 。遠流出版社, 台北 。

2. 金庸(1996b). 天龍八部, 第三版 。遠流出版社, 台北 。

3. 南方朔(1999).「博奕」不離人性不如從管理角度著眼 。新新聞周報第642期(1999年6月24日-6月30日), 96-97 。

4. 黃文璋(1995). 隨機過程 。華泰書局,台北 。

5. Feller, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol.1, 3rd ed. John Wiley & Sons, New York.

6. Gardner, M. J. (1972/73). Strategy for life−a guide to decision making. *Mathematical Spectrum* **5**, 54-58.

7. Isaac, R. (1995). *The Pleasures of Probability.* Springer Verlag, New York.

8. Merryfield, K. G., Viet, N. and Watson, S. (1997). The wallet paradox. *The American Mathematical Monthly* **104**, 647-649.

9. Rawsthorne, D. (1989). How to gamble if you must (Problems and Solutions E 3219). *The American Mathematical Monthly* **96**, 163-164.

10. Sandell, D. (1997). Fair Russian roulette. *The Mathematical Scientist* **22**, 52-57.

11. Weaver, W. (1982). *Lady Luck: The Theory of Probability.* Dover Publications, Inc., New York.