隨機法則

黃文璋
國立高雄大學應用數學系

1 有沒有規則

在目前通行的某版本高中數學(甲)下(即自然組高三下學期)課本中, 於介紹數列的極限時, 先舉5個例子, 我們一字不改列於下:

(1) 連續擲一粒公正的骰子n次, 出現的點數依序是$5, 4, 1, 6, 6, 3, 2, \cdots$, 這是一個沒有規則的數列。

(2) 無理數$\pi = 3.14159\cdots$, 把它的數字依序排列:$3, 1, 4, 1, 5, 9, \cdots$, 這也是一個沒有規則的數列。

(3) 抽樣調查某種產品製造的良率, 若抽出的產品是"良品"用1表示, 是"不良品"用0表示, 有一"抽樣的過程"是$1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, \cdots$, 這也是一個沒有規則的數列。

(4) 丟一個均勻硬幣, 每一次都出現正面的機率, 依序是

$$\frac{1}{2}, (\frac{1}{2})^2, (\frac{1}{2})^3, \cdots, (\frac{1}{2})^n, \cdots,$$

這是一個有規則的數列。

(5) 本金爲a, 年利率爲r, 每年以複利計息一次, n年後的本利和設爲a_n, 則

$$a_n = a(1+r)^n, \quad 0 < r < 1,$$

$a_1, a_2, a_3, \cdots$形成一個數列。這也是一個有規則的數列。

該課本將上述5個數列, 分爲有規則及沒有規則兩種。但是所謂規則與否, 其實是因人而異。有人覺得毫無規則, 有人卻覺得頗有規則。在金庸所著射鵰英雄傳裡, 桃花島主黃藥師精研易經, 擅長布置庭園、陣法。黃蓉與郭靖到了歸雲山莊, 半夜聽到聲音, 遂出去瞧瞧。我們引底下三段。

莊中道路東轉西繞, 曲曲折折, 尤奇的是轉彎處的欄干亭榭全然一模一樣, 幾下一轉, 那裏還分辨得出東西南北? 黃蓉卻如到了自己家裏, 毫不遲疑的疾走, 有時眼前明明無路, 她在假山裏一鑽, 花叢旁一繞, 竟又轉到了迴廊之中。有時似已到了盡頭, 那知屏風背面、大樹後邊卻是另有幽境。當路大開的月洞門她偏偏不走, 卻去推開牆上一扇全無形跡可尋的門户。

郭靖愈走愈奇, 低聲問道"蓉兒, 這莊子的道路眞古怪, 你怎認得?"黃蓉打手勢叫他噤聲, 又轉了七八個彎, 來到後院的圍牆邊。黃蓉察看地勢, 扳著手指默默算了幾遍, 在地下踏著腳步數步子, 郭靖聽她低聲唸著"震一、屯三、頤五、復七、坤$\cdots$"更不懂是什麼意思。黃蓉邊數邊行, 數到一處停了腳步, 説道"只有這裏可出去, 另外地方全有機關。"説著便躍上牆頭, 郭靖跟著她躍出牆去。黃蓉才道"這莊子是按著伏羲六十四卦方位造的。這些奇門八卦之術, 我爹爹最是拿手。陸莊主難得到旁人, 可難不了我。"言下甚是得意。

黃蓉知道依這莊園的方位建置, 監人的所在必在離上震下的"噬嗑"之位, "易經"曰"噬嗑, 亨, 利用獄。""象曰: 雷電, 噬嗑, 先王以明罰敕法。"她父親黃藥師精研其理, 閒時常與她講解指授。她想這莊園構築雖奇, 其實明眼人一看便知, 那及得上桃花島中陰陽變化、乾坤倒置的奧妙?

其後在神鵰俠侶一書裡, 黃蓉爲了阻擋金輪法王, 布置亂石陣。這是從諸葛亮的八陣圖中變化出來的。當年諸葛亮在長江之濱用石塊布成陣法。杜甫有題爲“八陣圖”的詩, 以評諸葛亮之功業:

功蓋三分國, 名成八陣圖, 江流石不轉, 遺憾失吞吳。

聰明如金輪法王, 雖精通奇門妙術, 對那堆亂石, 看了半天, 剛似瞧出了一點端倪, 略加深究, 卻又全盤不對, 左翼對了, 右翼生變, 想通了陣法的前鋒, 其後尾部卻又難以索解。

對別人而言, 陣仗是如此變化多端, 但對黃蓉來說, 其實是有規則可循的, 也就是“明眼人一看便知”。

上述這類設置機關的場景, 在哈里遜福特(Harrison Ford)主演的法櫃奇兵(Raiders of the Lost Ark)三部曲裡, 也常出現。在尋寶時, 愈接近寶物便愈危險。走錯一步, 可能便射出一支長矛, 或掉下陷阱中。但電影中那位Indiana Jones博士, 似乎總是知道怎麼走才安全。

女兒四、五歲的時候, 有一拼圖, 由一些小木片組成, 約十來塊, 每一木片上還附著一小柄, 讓小孩好拿。每拿一小木片, 就像用叉子叉上一小片三明治, 準備往嘴裡放。女兒雖然已很熟練, 經常還是習慣性地拼一下。有次有位朋友來家裡, 看到女兒一面看電視螢幕上的卡通錄影帶, 一面拼圖。告訴我們, 女兒看也不看拼圖板, 就一塊塊地拼好了。

有人覺得拼圖毫無頭緒, 有人卻“不看便知”。

小孩哭鬧、耍賴, 父母生氣孩子沒有規矩, 爺爺奶奶卻不以爲意, 認爲小孩就是這樣, 你們小時候不也如此? 人隨著年紀增長, 會遵循某些“規矩”, 是被訓練出來的。不同的地方, 不同的時代, 會有不同的“規矩”。規矩不過是人定出來的。

LKK者覺得年輕人用詞、造句, 常是無厘頭式的, 難以理解。對他們的做事方式, 更視爲毫無章法。年輕人自己倒是習慣的很。大家可能也聽過叢林法則吧! 在叢林裡, 各種動物間, 長久以來, 也自然形成一些各自須遵守的規則, 而達到一種平衡的狀態。誤闖叢林的兔子, 下場通常不會太好。

在古代, 人們對於太陽突然不見(日蝕), 月亮突然不見(月蝕), 慧星的出現, 常感到不安, 以爲有什麼事惹毛了上天。在世說新語雅量篇中, 有一則提到“太元末, 長星見, 孝武心甚惡之。”太元爲晉孝武帝之年號, 長星即慧星。古人認爲慧星出現, 將有帝王或諸侯、大臣會死亡。後來人們終於明白, 日蝕、月蝕及有些慧星(如哈雷慧星)的出現, 其實是天體運行下, 一可計算出何時會發生的必然現象。於是上天的喜怒難測, 轉爲只不過是極有規律的天文景象。

再如絕句與律詩, 同屬近體詩, 講究格律。不論句數多寡, 用字平仄, 及押韻的方式, 均有嚴格的限制, 不像古體詩那樣自由。對那些仄仄平平仄, 平平仄仄平等平仄的格式, 若不懂其中的規則, 就可能以爲是隨意寫的。

上述這些例子顯示, 對某些現象, 有時可能出於知識的不夠, 以爲沒有規則, 或不清楚其中的規則, 有時則可能因未定義清楚何謂規則, 所以認爲沒有規則。無論如何, 論斷一件事是否有規則, 要謹慎行之。

2 心中有機率

一艘俄國的核子潛艦向美國釋出投誠的訊息。在尾隨其後的美國一艘潛艦上, 美方一分析家相信他們眞的要投誠, 但艦長半信半疑, 爲先發制人, 隨時準備發射魚雷。在深海中狹窄的水道中航行, 到一出口, 分析家爲了讓艦長相信他的判斷準確, 說“你看他們要右轉。”果然是右轉, 艦長立刻下令攻擊取消的命令。好奇地問分析家怎知他們要右轉? 分析家說“我用猜的, 二分之一的機會。”

這是電影獵殺紅色十月(The Hunt for Red October)中的情節, 史恩康納萊(Sean Connery)飾演那位俄國艦長, 亞歷鮑德溫(Alec Baldwin)則是那位擅用機率的分析家。

二分之一的機會是值得一猜。只是二分之一的意義是什麼? 是每兩次會發生一次嗎? 生男生女的機率各爲二分之一, 有人卻連生10個女兒, 有人連生10個兒子。二分之一, 甚至一般所說的機率爲p, 意義到底是什麼?

每天一早打開報紙, 列有各地降雨的機率。依降雨機率大小決定出門是否帶傘。就算不看報上的降雨機率, 而是出門前看看雲層, 以判斷是否可能會下雨, 心中所想的也是機率: 由過去的經驗, 以決定這樣的雲層下雨的機率大不大。只是當降雨機率爲90%卻沒有下雨, 降雨機率爲10%反而傾盆大雨, 時有發生氣象局預測不準的情況。有些人會以專家的口吻告訴你, 不能只由一天、兩天的結果, 就下結論說準或不準, 要看很多天。就像二分之一的機率, 表銅板投擲1百萬次, 就約有50萬次是正面, 50萬次是反面。眞的是這樣嗎?

有人說中樂透彩頭獎比被雷打中的機率還低, 但自發行以來, 已有許多人中了頭獎。機率很低怎麼一再發生?

北銀樂透彩發行後不久, 便曾連續5期開出39號, 造成一陣轟動。因爲39號連續出現這麼多次, 超過我們所"預期"。另外, 彩迷們統計過去開出的號碼, 常覺得某些號碼的出現有些"異常"。會有預期, 會覺異常, 表示我們對各數字的出現, 心中是有一些想法的。我們其實並不認爲數字的出現是毫無規則的。數字沒有照我們以爲的一類規則出現, 才會覺得它們異常。以上一節中擲骰子出現點數的數列爲例。既然是公正的骰子, 也許我們無法預知下一次投擲會出現的點數, 但每次投擲各點數均有六分之一的機率會出現。這就是我們認爲點數的出現該遵循的規則。舉例而言, 我們不期望投擲100次, 會得到點數全是1的情況。如果出現這樣的結果, 由於點數的出現不守規則, 我們可能因此懷疑這不是一公正的骰子。

在這隨機世界, 生活中充滿著機率。做決策時, 常得依賴機率。算算機率, 算算期望值, 這是在做評估時, 不可缺少的。可以這樣講, 人們心中隨時都有機率。

3 大數下的迷思

雖然機率與我們的生活息息相關, 但一般人對機率的含義常無法正確的掌握, 對隨機世界裡的規則也就常誤解。另一方面, 諸如機率、期望值、樣本數夠大、接近, 又似乎已成爲口語中常提到的名詞, 大家彷彿不

認爲它們都是有嚴謹的定義。本節及下節, 我們便舉一些大家易犯的錯誤。本節先看幾個牽涉到大數的例子。

民國九十二年春天, SARS疫情讓台灣幾乎陷入瘋狂狀況。台大醫院骨科醫師, 也是陳水扁總統的女婿趙建銘, 算出走在街上感染SARS的致死機率, 大約是八十萬分之一, 相當於中樂透彩二獎的機率。他勸民眾應小心謹慎, 但不要過度恐慌。趙建銘解釋八十萬分之一, 是在台灣有1,000個感染SARS的患者沒有被隔離, 一個人走在街上一天接觸500個人, 台灣約有兩千萬人, 以及致死率5%的假設下, 算出一個人每天走在街上被感染SARS而死亡的機率。(92年4月29日聯合報第10版, 記者許峻彬, 宮泰順)

先不論趙建銘的假設及計算正確否(依其假設, 求出之機率爲八百分之一, 而非八十萬分之一, 讀者可自行算算), 八十萬分之一的機率, 且與樂透彩中二獎的機率相當, 到底算不算高?

光從數字大小來看, 八十萬分之一的機率也許不算高。彩迷們常覺得連要中普獎(對三碼, 機率約三十七分之一)都不容易。但對台灣有兩千三百萬人, 每個人每天通常要出門, 八十萬分之一的機率就不算小了。

要注意的是, 八十萬分之一是一個人一天走在街上被感染致死的機率。台灣目前人口, 就依兩千萬人計, 則按趙建銘的計算, 平均一天便約有25人因SARS而致死。一個月約750人。而SARS在台灣自第一位指標病例, 勤姓台商三月八日感染以來, 直到四月二十二日都還是所謂“三零”的紀錄, 之後疫情嚴重。就從四月二十四日台北市和平醫院封院起算, 至五月十九日, 在此26天的期間, 死亡病例爲40人。這樣子已讓全台人心惶惶。但依趙建銘的計算, 26天間可是約650人會感染致死。原意是想以機率來緩和民眾緊張的心理, 卻可能適得其反。再說樂透彩二獎之中獎機率

$$\frac{6}{\binom{42}{6}} = \frac{6}{5{,}245{,}786}$$

約八十七萬分之一, 是很低。樂透彩每期中二獎注數, 平均爲中頭獎注數的6倍。每期中獎注數是隨機的, 也與銷售數有關。但一週開兩期, 通常每期都有數注中獎(91年第60期曾有94注中二獎者)。而非26天才40注

中二獎。由此觀之, 以大家較熟悉的樂透彩中獎機率, 來跟每天上街感染SARS而致死的事件相比, 並不妥當, 是無法讓一般人覺得SARS致死的可能性還不算太高。

上例顯示, 純以數字而言, 八十萬分之一是很小, 但若此爲一機率值, 在大樣本(如兩千萬人)下, 給人的感受(1天25人致死), 就不見得是一很小的機率值了。

諸如賭博或彩券裡, 當然也不乏大樣本下的機率問題。

十餘年前大家樂很風行, 賭徒藉著台銀每期開出的愛國獎券中獎號碼來對獎。經常有沒簽中的賭徒對愛國獎券之搖獎機率產生懷疑。報章雜誌遂刊登一些教導大家"正確"了解機率的文章。我們引用底下一段話, 供大家參考(見趙慕嵩等(1987))。原文一字不易:

> 事實上, 所謂失常的機率只是在機率學中必然性的短暫現象, 其實還是正常的。譬如一顆六面的正方形骰子, 上面有一到六的點數, 理論上每擲一次就應該使得每個數字各有六分之一的出現機會, 那麼連擲六次, 是否1, 2, 3, 4, 5, 6等數字剛好各出現一次? 當然不會, 可是如果連擲六億次, 每個點數出現的次數就非常接近一億次, 而滿足於六分之一的理論機率。
>
> 如果按照理論的機率, 愛券連開十五萬次獎, 開出105萬組號碼, 那麼00 到99這一百組號碼就有可能各出現一萬零五百次, 而接近於理論機率。

開獎次數愈多, 各組號碼出現之相對頻率, 即出現的次數除以開獎的次數, 有"很大的機會"很接近1/100, 這就是大數法則(Law of large numbers)。但各數字出現的次數與期望次數(10,500)之差, 很可能會很大。

以投擲銅板(兩個面)爲例。投擲一公正銅板兩次, 正反面各出現一次之機率爲1/2; 投擲四次, 正反面各出現二次之機率爲3/8; 投擲六次, 正反面各出現三次之機率爲5/16; $\cdots$; 投擲10次, 正反面各出現5次之機率爲252/1,024。隨著投擲數的增加, 愈不容易得到正反面次數相同。投

擲$2n$次, 正反面各出現n次之機率爲

$$\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

此處近似是用到Stirling公式(Stirling formula, James Stirling, 1692-1770, 蘇格蘭著名的數學家)。這是用來估算$n!$之大小的一有用公式。當$n = 100$, 此機率約爲0.08; 當$n = 10^6$, 此機率約爲萬分之5.64。又符號"$\sim$"表近似相等(asymptotically equal)。$a_n \sim b_n$表n很大時, a_n/b_n很接近1。

前面引用民國76年刊登於時報周刊的報導。也許你會認爲娛樂性雜誌, 本來就不能太當眞。而且那是十餘年前的事, 現在大家對機率可能較懂了。那再看底下一則報導:

> 北銀彩券部表示, 樂透彩每一次的開獎都是「獨立事件」, 四十二個號碼出現的機率是一樣的。若以每周開獎二次來估算, 經過五萬年, 「四十二選六」所有的號碼組合(即五百二十四萬餘種)都會開出一次, 每一號碼被開出的次數就會十分接近。(91年3月31日聯合報第6版, 91年5月25日聯合報第6版, 記者黃雯雯)

由於樂透彩上市後, 開出的號碼有所謂冷門及熱門, 遂有此報導。如果上述報導眞的是北銀彩券部的看法(但顯然該記者是相信的, 否則大概也不會登了兩次), 那眞是令人失望的, 毫無變異的概念。不要說不會每一組號碼都開出一次, 且1至42, 每一號碼被開出的次數之差異, 也會隨著開獎次數之增加而變大(較嚴謹的說法是, 差異會變大的機率很大), 而不會十分接近。

如果你覺得報章雜誌所刊登的報導, 無論如何就很難要求專業, 那我們再給一例。

人本教育札記, 這是一份自認是爲評析教育政策, 及解讀教育問題及理念而辦的雜誌, 並曾獲三屆雜誌類金鼎獎。民國九十二年二月號, 特別企劃的主題是"從賭博的機率現象談數學教育", 其中有一篇題目爲"機率

的一體兩面–既偶然又規律", 作者是傅子豪。我們引文中的一段文字如下, 也是一字不改:

> 根據數學預測的估計值告訴我們, 擲骰子一萬次, 將出現一千六百六十七個"一點", 出現比率大約爲百分之十六點九。之後, 又有數學家做實驗, 當骰子擲超過十萬次之後, 出現"一點"的次數大約比估計值多出五百次, 但百分比只差百分之０.五, 所以我們可以推論, 擲骰子的次數越多, 就越接近數學的預測, 這就是所謂"隨機的規律"。

這一段的講法當然也是不對的(至少得將百分之十六點九改成百分之十六點七), 即使是刊登在一份教育性雜誌所特別企劃的文章。

機率的意義, 大數法則, 變異的概念, 以及到底隨機中的規則是什麼, 第5節起我們將陸續說明。

4 期望值引發之謬誤

由於人們對小的數往往不易理解究竟小到什麼程度, 於是有時改以大的數或換算成時間來說明。

例如, 要形容投擲一銅板連得10個正面之不容易, 可以說"假設某人每天投擲一銅板10次, 則差不多要3年, 才可能得到10個正面。"這裡便是用到連得10個正面之機率爲1/1,024, 而3年共約有1,095天, 1,095乘上1/1,024約等於1。

其實不只對小機率事件, 對很大的數, 有時也會換以時間來描述。如美國微軟(Microsoft)公司總裁比爾蓋茲(Bill Gates)富可敵國。某段時間, 其所擁有財產達880億美元。人們用各種方式來說明880億美元究竟是多富有: 如果每秒鐘賺2,500美元, 則一年可賺788.4億美元; 我國一般公務員, 月薪若以6萬台幣計, 每年發薪13.5個月, 1美元以換32元台幣計, 則不吃不喝要約350萬年才有與其相當的財富。

大部分的人滿意於這樣的解釋。機率與時間(次數)遂經常被互換, 謬誤因此而生。

民國83年6月21日, 聯合報第3版有下述三段報導。

1.綠基會:百座核電廠二十年內出現機率四成五爐心熔毀機率 美國解密資料

【記者林如森/台北報導】環保團體綠色消費者基金會昨天公布一份該基金會從美國得來的解密資料指出, 美國一百座核電廠在二十年內出現的爐心熔毀機率累積值可達百分之四十五, 若加上不確定因素, 其機率則在百分之九十九至百分之六間, 這個機率遠比核能界所宣稱的十萬爐年一次高很多(一個反應爐運轉一年爲一爐年),···

2.台電:不是百分之四五 而是零點四五次 核四廠十萬年才會發生一次

【記者李文娟/台北報導】台電公司昨天指出, 綠色消費者基金會說美國一百座核電廠未來二十年內出現爐心熔毀的機率值可達百分之四十五是不對的, 應該說"累積發生爐心熔毀次數是零點四五次"而且就算發生了, 影響也不大。

台電說, 這種算法是假設每一個反應器的爐心熔毀機率是每一萬年發生二點二五次, 然後推估一百座核電機組連續運轉二十年, 累積發生爐心熔毀次數爲零點四五次, 以此類推, 如果一百座核電機組連續運轉四十年, 累積發生爐心熔毀次數爲零點九次, 也就是說, 一百座核電機組連續運轉四十年, 爐心熔毀一次也不會發生。···

3.數據需要科學解釋

【記者李彥甫/特稿】綠色消費者基金會引用美國核能管制委員會的報告指出, 未來一百座核電廠運轉二十年將有百分之四十五的爐心熔毀率。這個驚人的數據正說明, 核四問題一定要用正確的科學方法解釋, 而不要輕易掉入正反雙方的統計陷阱。

百分之四十五的爐心熔毀率是假設每一爐年(每一反應爐運轉一年)發生的機率是萬分之三, 乘上一百座核電廠運轉二十年所得, 但從機率理論來看, 能否直接乘這些數值, 要看母體的大小, 換句話說, 以美國核管會報

告的算法, 全世界數百座核電廠運轉數十年的爐心熔毀將超過百分之百, 這是不合邏輯的。

綠色基金會以台北市一個月的車禍率爲十萬分之一爲例, 並非每輛車會出十萬分之一的車禍, 而是台北市三百萬輛車有三十輛會在一個月內出事。時間與母體群大小在這種風險機率計算中非常重要, 一般來說只有大母體才能使用, 例如車禍就是大母體計算很好的例子, 但核電廠數目屈指可數, 似乎不宜適用大母體計算。

但這件事也給社會大眾一個警惕, 台電宣稱爐心熔毀率每爐年只有十萬分之一, 其實是不完整的資訊, 台灣有六部核電機組, 也都運轉了好幾年, 發生爐心熔毀的機率絕不只十萬分之一, 眞實的數目爲何, 大概只有專家才算得出來, 台電有責任告訴社會大眾事實的眞相, 科學是不容一筆帶過的輕描淡寫。

這三段報導都是不知所云。在第一段中, 還有機率在百分之九十九至百分之六這麼大的區間。至於那位跳出來將兩方各打50大板的記者既沒有"隨機"的概念(說"三百萬輛車有三十輛會在一個月內出事"), 又胡亂堆砌一些"時間"及"母體群大小"等字眼。

至於第二段, 爲台電的反駁。依台電的說法, 我們猜測他們是假設一反應器每年會發生爐心熔毀的機率爲2.25/10,000。假設每年及每台反應器之運轉爲獨立, 則100個反應器連續運轉40年, 皆未發生爐心熔毀之機率爲

$$(1-\frac{2.25}{10{,}000})^{4{,}000}\text{。}$$

利用微積分裡的結果:當$|a_n|$很小,而b_n很大,則

$$(1+a_n)^{b_n} \doteq e^{a_n b_n}, \tag{1}$$

只要數列$\{a_n b_n\}$不會趨近至∞。由(1)式即得

$$(1-\frac{2.25}{10{,}000})^{4{,}000} \doteq e^{-0.9} \doteq 0.4066\text{。}$$

亦即至少會發生一次爐心熔毀的機率約爲

$$1-0.4066 = 0.5934\text{。}$$

台電(以及一般人)基本上是犯了類如下的錯誤: 對一出現正面機率爲0.1的銅板, 投擲9次不會出現正面, 第10次才會出現第1個正面。這是不少人有的看法。西元1998年, 世界杯足球賽在巴黎舉行。美國隊於分組預賽時, 輸給伊朗。美國足球協會主席羅森伯格認爲這支美國隊比上屆還強, 理由是"和伊朗比十場會贏九場, 但偏偏這是第十場"(見87年6月23日中國時報第7版)。看多這種口語式的講法後, 一般人對機率與次數, 便常不正確的互相轉換。

事實上, 對一出現正面機率爲0.1之銅板, 令X表得到第1個正面所需之投擲數, 則X有參數0.1, 自1開始之幾何分佈, 即$P(X = k) = 0.1 \cdot 0.9^{k-1}$, $k = 1, 2, \cdots$。因此X之期望值$E(X) = 1/0.1 = 10$。10是期望值, 而非眞的需要投擲10次才會得到一個正面。運氣好, 投擲第一次便得到正面, 運氣不好, 投擲1,000次也得不到一個正面。所需次數的期望值與眞正所需的次數不要混爲一談。本節一開始提及的每日投擲銅板10次的例子也是類似。10次皆爲正面之機率爲1/1,024, 每日投擲10次, 故得到10個正面所需之日數, 亦爲自1開始, 參數爲1/1,024之幾何分佈, 因此期望日數爲1,024。在這類例子中, 由於幾何分佈的關係, 成功機率的倒數, 便爲期望次數。

現令Y表發生爐心熔毀所需之爐年, 則Y有參數2.25/10,000, 自1開始之幾何分佈。因此

$$E(Y) = \frac{10{,}000}{2.25} \doteq 4444.4\text{。}$$

期望值的確大於4,000, 只是當然不表經4,000爐年仍不會發生爐心熔毀。

這類誤將期望時間(或次數)當做所需時間的例子不少。追根究底, 還是缺乏變異的概念, 以爲期望時間, 就是所需時間。或許"期望值"此一名詞沒取得很好, 會讓人誤以爲會"期望得到"此值。投擲一公正的骰子, 所得點數之期望值爲$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)/6 = 3.5$, 但不論如何投擲, 都得不到一個點數3.5。

另外, 有些人以時間來表示機率, 卻流於文字及數字遊戲, 連要想替其找個合理的解釋都很困難。例如, 在王天戈(1985)一文, 爲了說明核能電

表1 一些災害與核能電廠安全之比較

事故種類	造成100人死亡的機會	造成1,000人死亡的機會
(1)人爲因素		
飛機失事	每2年一次	每2,000年一次
火災	每7年一次	每200年一次
爆炸	每16年一次	每120年一次
毒氣中毒	每100年一次	每1,000年一次
(2)自然因素		
龍捲風	每5年一次	甚小
颶風	每5年一次	每25年一次
地震	每20年一次	每50年一次
隕星衝擊	每100,000年一次	每1,000,000年一次
(3)核子事故		
100個核能電廠	每100,000年一次	每1,000,000年一次

廠之安全, 將核能工業與其他工業或天然災害比較。他引用表1, 而得到核能電廠“事實上可能”造成的災害, 要比一般人“以爲可能”造成的災害要小得多。

表1中之事故, 有些是實際上會發生, 且曾發生的, 有些則是從不曾或不知是否曾發生過的。曾發生的事故, 以大家較熟悉的飛機失事及地震爲例, 所列之幾年一次, 遠低於實際的發生頻率。光是台灣的中華航空公司, 在西元1994年(名古屋)、1998年(大園), 及2002年(澎湖), 七年間就發生三次死亡人數均超過200人的空難(表1中的飛機失事造成100人死亡的機會每2年一次, 應不是針對一家航空公司, 否則太驚人了)。地震方面, 西元1990年至1999年, 十年間世界上死亡人數超過百人的地震就已至少有15次, 超過千人則有十次之多, 即使台灣, 自西元1900年以來, 百年間死亡超過百人的地震也有6次之多(見新新聞週報655期, 1999年9月23日-9月29日)。至於不曾發生的事故, 所謂幾年一次, 實難了解其含義。之前我們將投擲銅板連得10個正面, 換成要投擲3年, 也須講清楚是每天投擲一

銅板10次, 否則光說每3年發生一次, 只會令人莫名其妙。而表1中之事故的幾年一次, 一方面沒有說明其代表的意義, 另一方面, 也沒有交代那些數字是如何產生的。

我們從小學習數字, 對數字大小的概念較清楚。機率雖也涉及數字, 但由於隨機的概念一般人較模糊而不自知。因此才有本節及上節所提的一些誤解發生。

5 機率的意義

我們屢屢提到機率, 機率的意義到底是什麼? 不同的書或不同的作者, 往往有不同的定義方式。我們大致說明如下。

(i) 古典的定義

這是將機率的概念, 以相同的可能性(equal possibility 或equally likely)來解釋。令Ω表一試驗之所有可能的結果之集合, Ω稱爲樣本空間, Ω之一子集合稱爲事件。例如, 投擲一骰子一次, 則$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 而事件$A = \{1, 3, 5\}$代表投擲出現奇數的事件。

在古典的模式裡, 假設Ω中的元素個數爲有限, 且以$P(A)$表事件A之機率。則

$$P(A) = \frac{A\text{中之元素個數}}{\Omega\text{中之元素個數}}。$$

早期機率主要用來計算投擲銅板、骰子, 及玩撲克牌中各事件發生之機率。在“均勻”的假設下, 以這樣的方式來定義機率是沒有問題的。當然如果一試驗有無限多種可能的結果, 如自區間$[0, 1]$中取一點, 就無法以這種方式來求取中的點落在區間$[0.2, 0.5]$之機率。各結果出現的可能性若不同(如不均勻的骰子), 這種定義也不適用。

(ii) 頻率的定義

對一可重複的試驗, 在多次重複試驗後, 以一事件出現的相對頻率來表示機率, 稱爲頻率的定義。在此所謂相對頻率, 即該事件出現之次數除以試驗總次數。

這種定義又稱統計的定義, 或客觀的定義, 先決條件是試驗可以重複。由於是基於試驗的結果, 與誰做試驗無關, 因此又稱機率之客觀的定義。諸如銅板出現正面的機率, 往往以此方式來定義。但如表1中所列的事故, 很多都是無法重複的試驗, 就不適合以此方式來定義機率。至於“專家警告服裝愈暴露罹患皮膚癌機率也愈大”, 其中的機率, 應就是依頻率的定義。

(iii) 主觀的定義

如前我們已指出有些事件是無法重複試驗的, 因此便引出對機率主觀的定義。

明天降雨的機率是多少? 有人看看雲層說0.7。問他爲什麼? 他說我就是這樣認爲。球隊要參加比賽, 經理說我們拿冠軍的機率是九成。這些都屬於主觀的機率。當然主觀的機率, 有時也會根據過去客觀的事實來決定。只是即使擁有相同的資料, 不同的人對同一事件, 也常給出不同的主觀機率。

報章雜誌上也屢有底下這類敘述: SARS影響無遠弗居, 直到命題老師入闈的那一刻, 都還深植人心, 因此與SARS有關的題目, 出現機率可能不低。這是九十二年國中學測之前的一段報導。其中談及的“機率”, 當然也可歸類爲主觀機率。

表1中有些試驗是無法重複的, 但若將表1中機率的含義視爲主觀機率又不妥當。因爲此表是爲說服民眾核能電廠算是安全的, 應該要較有科學依據才行, 而非憑藉主觀。無論如何表1是很令人接受其客觀及正確性。

主觀機率雖被稱爲主觀, 有時並非不合理, 它還是要滿足一些條件, 否則就難以被認定在談論的是機率。例如, 若認爲降雨機率爲0.7, 則便須認爲不降雨的機率爲$1-0.7=0.3$。

有人敲門, 來者是男是女? 只能猜皆爲1/2。這當然是主觀機率, 所依據的是生男生女的機會約各半。但若聽到似乎是高跟鞋的腳步聲, 就有可能猜來者是女生的機率爲0.9。雖然是主觀機率, 卻是根據過去的經驗。很多時候我們會用到主觀機率。平常不妨多練習“猜”, 事後並加以修正, 以提高日後猜的準確性。

(iv) 公理化的定義

上述三種定義機率的方式,顯然皆無法包含所有情況。另一方面,在數學裡,一套系統發展到後來,數學家於了解其理論中的本質後,便會藉由一些公理來描述此系統。在公理化下,欲描述機率,需要一稱爲樣本空間的集合Ω;需要Ω的一些子集合所形成的集合$\mathcal{F}$,$\mathcal{F}$中的一個元素便稱爲一事件;還需要對每一事件給一實數$P(A)$,稱爲A之機率。$(\Omega, \mathcal{F}, P)$便稱爲一機率空間。對$\mathcal{F}$及P還要再給一些合理的限制。譬如說$0 \leq P(A) \leq 1$,即機率要介於0與1之間。

公理化的定義可包含前面三種對機率的解釋。這是數學裡慣有的作法:推廣某種定義,總要原來簡單的情況仍適用。例如,不能說在用來求投擲一均勻的骰子時,奇數點出現的機率卻不是1/2。

在公理化的定義下,已不再擔心試驗的結果有無限多個怎麼辦,骰子不均勻怎麼辦,試驗不能重複怎麼辦。連樣本空間裡的元素究竟是些什麼,也不用理會。數學家滿意這種抽象化後的解釋,開始覺得機率論也眞有點學問。機率論也因此堂而皇之地成爲數學中的一個領域,與代數、幾何等傳統的數學領域分庭抗禮。甚至各領風騷,發展出許多理論及應用。抽象化,雖使機率論變得有學問起來,但也是學機率論者開始覺得機率論有點難的時候。

6 必然性

頻率對機率的解釋乃是基於大數法則。重覆地做一試驗,並觀測一特定的事件A。譬如說持續地投擲一骰子,令事件A表出現奇數點。投擲n次後,設事件A出現n_A次。由實際的經驗,我們注意到事件A出現之相對頻率n_A/n似乎逐漸接近某一定值。若以該定值當作事件A之機率,便是頻率對機率的解釋。

樣本空間中的元素,可以是球、蘋果等,不一定是數字,我們一向習慣將欲探討的事物數量化。如投擲銅板,將正面當做1,反面當做0等。此原因加上爲了更靈活的討論機率(如微積分中也有變數代換),隨機變

數(random variable)因應而生。所謂隨機變數, 簡單地說, 就是一個由樣本空間映至實數的函數。通常以大寫的英文字母X,Y,Z等表示隨機變數。

對一事件A, 令隨機變數

$$X_n = \begin{cases} 1 & ,\text{若第}n\text{次試驗結果爲}A, \\ 0 & ,\text{若第}n\text{次試驗結果不爲}A\text{。} \end{cases} \tag{2}$$

則

$$\frac{n_A}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\text{。}$$

$\sum_{i=1}^n X_i/n$便稱爲隨機變數$X_1,\cdots,X_n$之樣本平均, 簡稱平均。則如前所述當n逐漸增大, 此平均會"趨近"事件A之機率$P(A)$。

這便是大數法則最簡單的一個特例, 爲十七世紀末及十八世紀初, 瑞士數學家伯努力(James Bernoulli, 1654-1705)首度證明。其後還有更一般的版本, 如設$\{X_n, n \geq 1\}$爲一組獨立且有共同分佈之隨機變數, 期望值$E(X_n) = \mu$爲有限。則當n趨近至∞, 樣本平均$X_n = \sum_{i=1}^n X_i/n$在"某種意義下"會趨近至μ。注意對前述如(2)式之隨機變數

$$\begin{aligned} E(X_n) &= 1 \cdot P(X_n = 1) + 0 \cdot P(X_n = 0) \\ &= P(X_n = 1) = P(A)\text{。} \end{aligned}$$

故前述結果的確是一特例。我們常會處理獨立且有共同分佈之隨機變數。諸如連續投擲一骰子, 假設每次投擲互不影響, 則依序得到的點數$\{X_n, n \geq 1\}$便構成一組獨立且有共同分佈之隨機變數。

大數法則, 是機率論裡一很重要且基本的定理。我們必須對它做一些說明。

首先它強調的是大樣本下的結果, 是一種不一爭一時而爭千秋的精神。由於有此法則, 使很多時候人們會相信算命, 會相信天意, 想知道究竟會得到什麼。因爲過程雖起起伏伏(X_n有大有小), 但平均而言, 所得就

差不多是$E(X_n)$, 這可說是該得的。從這角度看, $E(X_n)$被稱爲期望值, 倒還眞是名至實歸。

美國NBA職業籃球賽, 在常規比賽裡, 每支球隊要賽82場, 各區勝率最高的八隊可打季後賽, 在2002-2003球季, 東區(Eastern)大西洋組(Atlantic Division), 排名第一的New Jersey Nets隊(籃網隊), 勝49場, 負33場, 勝率約爲0.598。至於西區中西組(Midwest Division), 排名第一的San Antonio Spurs隊(馬刺隊), 勝60場, 負22場, 勝率約0.732。球隊通常不會爲一、兩場的輸贏太過沮喪或欣喜, 總共可是要賽82場呢! 大數法則的精神, 在這裡能充分的發揮。最後沒進入季後賽的球隊, 也是無可奈何, 因爲實力如此, 這個結果不過是該得的。

虯髯客傳是著名的唐代傳奇小說, 作者一說爲杜光庭。三十年前我在大一國文裡讀到, 便深爲它的生動情節所吸引。紅拂女的慧眼識英雄, 主動投奔李靖, 虯髯客的難捨而能捨, 兩人清楚自己要什麼, 且勇於表達, 這種個性很令人激賞。故事中, 隋朝末年, 群雄逐鹿中原。身懷絕技又擁有萬貫家財的虯髯客, 本也欲爭霸天下。但兩次會見李世民, 皆爲其風采氣度與眞人之相所折服。文中寫虯髯客初見李世民時, 見他“神氣揚揚, 貌與常異。虯髯默居末坐, 見之心死。飲數杯, 招靖曰‘眞天子也。’”於是自甘退讓, 並將所有財物贈予李靖, 以助眞命天子, 自己則往他方發展。虯髯客臨走時對李靖說“此後十餘年, 當東南數千里外有異事, 是吾得志之秋也。一妹與李郎可瀝酒東南相賀。”一妹即紅拂女。

其後李靖佐李世民, 得到天下。虯髯客則入扶餘國, 殺其主自立。此文似乎說明一切都是天注定, 不是你的就不要妄想。

大數法則是這樣說沒錯, 最終總是得到該得的。只不過對於隨機世界裡的法則, 千萬不要忽略它隨機的一面。

在數學裡有底下著名的公式:

$$e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!},$$

e爲自然對數的底, 爲一無理數, 其值約爲2.718。可以證明

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!} < e < \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!} + \frac{1}{n\cdot n!},\quad n \geq 1\ 。\tag{3}$$

換句話說, $\sum_{i=0}^{n} 1/i!$與e之差最多為$1/(n\cdot n!)$, $n \geq 1$ 。由於$n!$隨著n成長速度極快, 故$\sum_{i=0}^{n} 1/i!$是e之一很好的近似值 。例如$n = 10$時, $\sum_{i=0}^{10} 1/i!$與e之差小於10^{-7} 。大家在微積分裡一開始便學極限 。花了很長一段時間, 終於弄清楚數列$\{a_n, n \geq 1\}$趨近至a的意思 。這種趨近, 意義就是如上述數列$\sum_{i=0}^{n} 1/i!$趨近至e: 當n很大時, a_n與a之差$|a_n - a|$要很小, 且隨著n之增大, 可任意小 。

但在大數法則中, 我們說樣本平均隨著n之增大, 在"某種意義下"會趨近至期望值 。我們強調此趨近是在某種意義下, 也就是說這種趨近與微積分中數列$\{a_n, n \geq 1\}$的趨近至a, 意義並不太一樣 。

在隨機世界裡, 變異總是存在的 。大數法則保證了必然性 。必然性使人們願意事先好好的準備 。如球隊挑選好教練及爭取好球員, 學生設法進入好學校就讀 。但光有必然性的世界, 會使人們對未來失去盼望, 因此也少了努力的動機 。如果各球隊陣容一擺出來, 就可算出那一隊實力最強, 必穩獲冠軍, 那陣容差的球隊還想打球嗎? 事先便能預知結果, 還有人想看球嗎? 如果進好大學便確保將來必定成功, 那不論在好大學或差大學的學生, 大約都不想努力了 。因此光有必然性的世界是無法運轉的 。必須還有隨機性, 使有變異產生, 如此世界才能生生不息的運轉 。變異是我們下一節要討論的 。

不論樣本數n多大, 都無法保證樣本平均與期望值的差一定很小 。不過我們知道差會很小的機率很大 。但我們已說過了, 機率很大的事件不一定會發生, 機率很小的事件也並非就不會發生 。

在Carlsberg啤酒的廣告裡, 通常都僅有下面一句廣告詞:

Probably the best beer in the world 。

字典對probably之解釋為: most likely, presumably 。前者意義為"很有可能", 後者意義為"也許" 。這句廣告詞並非那麼強烈, 不論是說"很有可能"或"也許"是世界最好的啤酒, 都隱含著也可能不是世界最好的 。

7 隨機性

與大數法則並列爲機率論裡兩個最重要的結果, 就是中央極限定理(Central limit theorem)。這是隨機世界裡另一影響深遠的法則。

首先對一隨機變數X, 變異數(variance)定義爲

$$\mathrm{Var}(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2\text{。}$$

$\mathrm{Var}(X)$之正的平方根, 以σ表之, 稱爲X之標準離差(standard deviation), 或標準差。設$\{X_n, n \geq 1\}$爲獨立且有共同分佈之隨機變數, 期望值$E(X_n) = \mu$, 變異數$\mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2$皆設爲有限。中央極限定理就是說, n夠大時,

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

的分佈會近似於標準常態分佈(standard normal distribution), 此分佈以$\mathcal{N}(0,1)$表之。亦即n夠大時,

$$(4) P\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z\right) \doteq \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \equiv \Phi(z), \quad -\infty < z < \infty\text{。}$$

機率密度函數(probability density function)

$$(5) \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

之圖形大致呈鐘形, 在$x = 0$時有極大值, 見圖1。$\mathcal{N}(0,1)$分佈之期望值爲0, 標準差爲1。

一般的常態分佈以$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$表之, 此分佈期望值爲$\mu$, 變異數爲$\sigma^2$, 機率密度函數爲

$$(6) \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \quad -\infty < x < \infty\text{。}$$

其圖形也是呈鐘形, 見圖2。

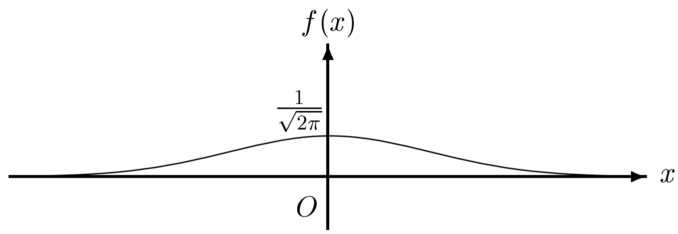

圖1 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, -\infty < x < \infty$, 之圖形

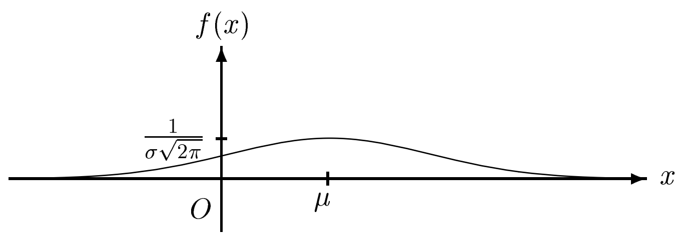

圖2 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, -\infty < x < \infty$, 之圖形

誤差理論是大數學家高斯(Carl Friedrich Gauss, 1777-1855)對機率論的主要貢獻。統計裡一主要的工作便是估計, 既然是估計便有誤差, 而掌握誤差的大小當然很重要。在一些條件下, 高斯導出誤差有常態分佈。因此常態分佈有時又稱高斯分佈(Gaussian distribution)。德國10馬克, 是以高斯爲人像, 人像左側便有一如圖2之圖形。高斯爲有史以來三大數學家之一, 在數學上有諸多重要成就。在10馬克上, 挑出來與他伴隨之數學爲常態分佈, 可見此分佈之重要。

一個分佈被以“常態”命名, 可見此分佈地位之獨導。在歷史上有法國牛頓之稱的拉普拉斯(Pierre Simon Laplace, 1749-1827)及高斯, 對常態分佈的探討, 均有很大貢獻。至於常態分佈此一名稱, 則爲法國另一大數學家彭加萊(Poincaré, 1854-1912)所提出。

設隨機變數Z有$\mathcal{N}(0,1)$分佈, 則由其分佈函數表, 可得

$$P(|Z| \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0.6827,$$

$$P(|Z| \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 0.9545,$$
$$P(|Z| \leq 3) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 0.9973 \text{。}$$

分別代表Z與期望值0之差不超過1個標準差, 2個標準差及3個標準差之機率。

我們來看(4)式之應用。首先(4)式導致n夠大時,

$$P(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq z) \doteq \Phi(z), \quad -\infty < z < \infty \text{。} \tag{7}$$

由(4)式及(7)式導致n夠大時,

$$\begin{aligned} &P(\overline{X}_n \in [\,\mu - \sigma/\sqrt{n}, \mu + \sigma/\sqrt{n}\,]) \doteq 0.6827, \\ &P(\overline{X}_n \in [\,\mu - 2\sigma/\sqrt{n}, \mu + 2\sigma/\sqrt{n}\,]) \doteq 0.9545, \\ &P(\overline{X}_n \in [\,\mu - 3\sigma/\sqrt{n}, \mu + 3\sigma/\sqrt{n}\,]) \doteq 0.9973, \end{aligned} \tag{8}$$

及

$$\begin{aligned} &P(\sum_{i=1}^{n} X_i \in [\,n\mu - \sigma\sqrt{n}, n\mu + \sigma\sqrt{n}\,]) \doteq 0.6827, \\ &P(\sum_{i=1}^{n} X_i \in [\,n\mu - 2\sigma\sqrt{n}, n\mu + 2\sigma\sqrt{n}\,]) \doteq 0.9545, \\ &P(\sum_{i=1}^{n} X_i \in [\,n\mu - 3\sigma\sqrt{n}, n\mu + 3\sigma\sqrt{n}\,]) \doteq 0.9973 \text{。} \end{aligned} \tag{9}$$

由(4)式(或(8)式)顯示, 樣本數n愈大, 對相同的機率, $\overline{X}_n$會落在一愈窄的區間。至於由(7)式(或(9)式), 對相同的機率, 樣本和$\sum_{i=1}^{n} X_i$會落在一愈寬的區間。以(8)式或(9)式中的第一個區間爲例, 前者區間半徑$\sigma/\sqrt{n}$隨著n增大而漸減; 後者區間半徑$\sigma\sqrt{n}$隨著n增大而漸增。

我們來看第3節愛國獎券那個例子中所提到的擲骰子六億次的情況。只看點數1, 令$X_i = 1$表第i次投擲得到點數1, $X_i = 0$表第i次投擲得到其他點數。$\sum_{i=1}^{n} X_i$便表投擲n次點數1出現的次數。因$P(X_i = 1) = 1/6$, $P(X_i = 0) = 5/6$, 故

$$\mu = E(X_i) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{6} \cdot 0 = \frac{1}{6},$$

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{5}{6}\cdot 0 - (\frac{1}{6})^2 = \frac{5}{36}\text{。}$$

由(9)式, 取$n = 6\cdot 10^8$, $\sum_{i=1}^{6\cdot 10^8} X_i$約有0.9545之機率, 落在區間

$$\left[\frac{1}{6}\cdot 6\cdot 10^8 - 2\cdot\frac{\sqrt{5}}{6}\sqrt{6\cdot 10^8}, \frac{1}{6}\cdot 6\cdot 10^8 + 2\cdot\frac{\sqrt{5}}{6}\sqrt{6\cdot 10^8}\right]$$
$$\doteq [10^8 - 18,257, 10^8 + 18,257] = [99,981,743,\ 100,018,257]\text{。}$$

此區間半徑為$18,257$。而約有0.0455之機率, 點數1出現之次數不落在此區間。換句話說, 點數1出現的次數是不會"非常接近1億次", 其他點數也是一樣。同理愛國獎券若開出105萬組號碼, 00至99這100組號碼, 很難各出現10,500次。

再看"人本教育札記"那段報導。由於$(\sqrt{5}/6)\sqrt{10^5} \doteq 117.85$, 故約有0.9545之機率, 出現一點的次數與期望次數16,667之差異不超過$2\cdot 117.85 = 235.70$。我們既不知該段中的"五百次"是怎麼產生的, 而且點數1出現的次數, 可能比16,667少, 不一定是"多出"。至於百分之0.五更是匪夷所思。500除以16,667(而非除以十萬)怎會是0.5%?

最後看第1節裡5個例子中的第一個。如果投擲骰子6億次後, 出現點數$5,4,1,6,6,3,2,\cdots$中1的個數不落在前述區間$[10^8 - 18,257, 10^8 + 18,257]$, 大概便會懷疑此非一公正的骰子。因1出現次數不落在此區間的機率才約0.0456, 並不太大。你還會認為點數之出現形成一沒有規則的數列嗎?

是樣本平均$\overline{X}_n$會接近X_i之期望值μ, 而非樣本和$\sum_{i=1}^n X_i$, 會接近$\sum_{i=1}^n X_i$之期望值$E(\sum_{i=1}^n X_i) = n\mu$。隨著$n$之增大, 樣本和$\sum_{i=1}^n X_i$更易偏離$n\mu$。這是大家容易搞混的概念。不過(9)式中區間的相對半徑是變小。以第一個區間為例, 其半徑$\sigma\sqrt{n}$, 以$\sqrt{n}$的位階(order)成長。當$n = 100$, 其半徑為10σ, 當$n = 10,000$, 其半徑為100σ。對一很大的n, $\sqrt{n}$相對而言是小很多。雖然n增大, 會使$\sum_{i=1}^n X_i$取值之區間變大, 但區間之相對半徑(即除以n)是變小。即相對而言是較精準。例如, 1萬相對於1億, 比100相對於1萬還小。

上一節提到大數法則保證了必然性。整個宇宙的運轉就是必然性與隨機性交錯著進行。隨機性使變異隨時可能存在, 使未來充滿著不確定性: 因此人們在困境時期待奇蹟出現; 在順境時則戒慎恐懼, 擔心隨時可能陰溝裡翻船。

平常我們說命運, 命就是指期望值, 運便是指變異。命不好只能盼望運好, 命好則擔心運不好。大數法則告訴我們最終大約可得到什麼, 中央極限定理則給出變異的大小, 告訴我們所得大約落在那個範圍。

由中央極限定理, 若一隨機變數爲許多變異數爲有限之獨立且有共同分佈之隨機變數之和, 其分佈便近似於常態分佈。甚至由較一般版本之中央極限定理, 這些隨機變數也不一定要有相同的分佈, 只要每一個的值都很小即可。許多自然界的現象均有此性質。例如, 人的身高或智商是由許多獨立(或近似獨立)的因素(如基因、環境, 或母親懷孕時每天喝多少牛奶等)所決定, 每一因素都造成一些微小的影響。其他如測量所造成的誤差, 往往也可視爲許多獨立的小誤差之和。在這些情況中, 常態分佈常可適合地當做其模型。

中央極限定理導致了萬物有常, 使常態分佈成爲一個到處可見的機率模型。例如, 大約有百分之九十五的四年級學生, 其身高與某一中心值之差異不超過兩個標準差。百分之九十五是一個我們很能接受的信心程度。學校裡大部分的設計(如桌椅), 可能便針對可使百分之九十五的人適用。考試或比賽沒有發揮, 可能是指表現比應有水準少了一個標準差, 至於失常, 往往是指表現落在大約兩個標準差之後。關於萬物有常概念之闡述, 趙民德(1999)一文爲很好的參考資料。

另一方面, 1個標準差是一般人感覺上一不太大的差異。如果與期望值μ之差異不超過1個標準差, 往往覺得所得差不多就是μ, 未能感覺有太大的偏差。此機率大約是百分之七十(0.6827)。所以約百分之七十的機會我們對結果滿意, 覺得所得與預期相差不太遠; 約百分之九十五的機會, 我們對結果還可接受; 而約百分之五的機會我們對結果難以接受。

雖然隨機世界裡隨時可能有奇蹟或意外發生, 那是否就聽天由命了? 也不盡然。中央極限定理告訴我們所得(不論$\overline{X}_n$或$\sum_{i=1}^n X_i$)與該得的(μ,

或$n\mu$), 差異不超過一定倍數標準差之機率。爲了使成功機率較大, 爲了使表現失常時仍不致失敗, 還是要做好準備功夫(提高μ值), 提高穩定性(降低變異數σ^2值)。

三分天注定, 七分靠打拼, 爲"愛拼才會贏"那首歌中的一句。中央極限定理卻指出: 七分天注定, 三分靠打拼比較符合實際。偏離該得一標準差之機率約百分之三十, 偏離該得二標準差之機率不到百分之五, 偏離該得三標準差之機率則不到千分之三。三分(百分之三十)還可拼一拼, 可鼓勵大家一試, 0.03分(千分之三)就沒那麼容易了。

一掌必然性, 一掌隨機性。在隨機世界裡, 大數法則與中央極限定理, 爲我們不得不遵循之二隨機法則。

8 結語

隨機法則其實還有不少。譬如説很多情況下之意外事件的個數, 常可以波松分佈(Poisson distribution)當做其模式。此即稀有事件法則(Law of rare events)。在此一隨機變數X若滿足

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k=0,1,\cdots,$$

便稱爲有參數λ之波松分佈。原來對飛機失事等意外事件, 其次數有波松分佈並非我們任意所做的假設, 而是一自然法則(Law of nature)。

在隨機世界裡, 要遵循的是隨機法則。必然世界裡的數學律法當然還是要藉助。但若僅以數學中的律法來看隨機世界中的問題, 那學到的還是數學, 而非隨機。由於學生初次接觸機率、統計, 往往是在中小學數學課程中, 因此常以爲機率統計只是一類簡單的數學。透過數學眼光來學習機率統計, 學到的往往只是數學, 而未能了解隨機性的内涵。不了解隨機世界裡變異的存在, 要嘛會忽視變異性, 要嘛會誤以爲有變異便是沒有規則。

隨機世界中雖然多變, 但卻不亂, 有大大小小的規範必須遵循。了解各種隨機法則, 對此世界, 就會由見山不是山見水不是水, 再度走入見山

是山見水是水的體認。

參考文獻

1. 王天戈(1985). 核能安不安全? 科學月刊, 第16卷第9期, 653-660。
2. 趙民德(1999). 萬物有常 世事多變。中國統計通訊, 第10卷第5期, 2-10。
3. 趙慕嵩、張文輝及胡不歸(1987). 羅盤、神明牌、風水、獎券牌。時報周刊民國76年10月第504期, 22-28。
4. Apostol, T.M.(1972). Calculus, Vol II. Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts.