

訪黃文璋老師

漫談數學

採訪 / 林豐利

顏明娟

整理 / 顏明娟

問：一個良好的數學研究環境的要素有那些？

答：數學以前最好的幾個國家就是法國、德國、還有蘇俄。美國的數學等於是二十世紀才開始的，因為有很多好的數學家從歐洲到美國。發展數學也許不需要許多儀器，但需要有很好的、很豐富的圖書。像台灣和美國各大學的數學系的數學圖書都很多。所以首先需要很好的圖書。其次就是數學要有一系列傳統循序下來。例如美國的數學發展，因為他們繼承歐洲，有很好的大師級的人物，所以對數學的研究一直有良好的環境。台灣唸數學的人也蠻多的，也有很多對數學很有興趣的人，但很多數學好的學生並不一定去唸數學，他可能去唸電機系。像我在大學碰過一些同學，其中有的是我從初中就認識的，他們數學的天賦很好，但後來考上台大電機系，電機系畢業後，有人還是很喜歡數學，就去唸數學研究所，最後拿數學博士，當然這是少數由電機再回到數學的。有很多其實應該很適合唸數學的人，並沒有去唸數學。最近我們也出了幾個很好的數學家，前些日子我們看到李遠哲得諾貝爾獎，雖然數學中沒有諾貝爾獎，但數學中有一個菲爾茲獎 (Fields Medal) 此獎比諾貝爾獎還難得。它每四年才頒一次，且對象為四十歲以下的年輕數學家。四年前，民國七十一年有一個中國人邱成桐得到這個獎，那時他才三十三歲。一般認為其研究成果對數學中好幾個領域都有深遠而全面的影響。數學不像物理會使人感覺有大突破，因為有些物理現象一般人較能了解。例如有些高中生就可以唸相對論，雖然這是很深的理論，但它可以寫得很淺顯，使中學生都能接受。而數學在這方面就比較困難，不容易用很簡單的語言表示，它往往是一些複雜的理論。因此國內雖也有一些研究得很成功的數學家，但就較不易為一般人所知。數學裏面也分成很多部分，如代數、分析、幾何、微分方程、離散數學及統計等都是它的分支。我大學是唸數學的，出國後唸統計。所以對統計較清楚。國內的統計近年來發展很快，有很多人做得很好，並且在國際間引起了重視。一些大型國際統計會議也常在台灣舉行。希望有更多適合唸數學的人來唸數學。

問：工科學生對於學習數學應抱持什麼態度？

答：很多人常會問唸這有什麼用？如果這樣問的話，很多東西都不用唸了。回想一下你所唸過的課程，如果一定要問它有什麼用，那真是難以回答。國文有什麼用？很多人國文不好，他們也活得好好的。英文倒是看起來較有用，所以有些家長將子女送去唸美國學校，覺得國文沒學好沒關係，而將英文唸好日後較有發展。對於數學，如果你只是問它將來有什麼用，那麼它其實不太有用，甚至大部分的東西都沒有用。羅傑十二歲就大學畢業進史丹福大學數學研究所，他其實是將很多東西都跳過沒唸。如果你的目標只是電機系畢業，很多東西都不用唸，數學也不用唸得太多，歷史、地理、國父思想當然也沒用，甚至體育課也不用上了，只要常看青山綠水多呼吸一些新鮮空氣即可。如果只是從「有沒有用」的觀點來看，很多東西是真的都沒用。但事實上把任何一門學科唸通都可以得到不少收穫，如唸國文，並非只是為了識字與寫作，而是讓我們從讀各種不同的文章中，學習到鑑賞力與判斷力，讓我們更易融合不同的思想。一個人如果能把國文唸通，他的邏輯觀念必很清晰的。所以古時候的人只唸一科中文，但仍然可以帶兵打仗出將入相。一文一武看起來差很多，但把那些經史子集唸通了胸中居然也就有了千萬甲兵。唸數學不要光想著它有什麼用，這樣唸起來就不太有意思。因為你還沒用到，就感覺不出它的好處。唸數學要看它能給你什麼訓練，而我們需不需要這種訓練。我們說一個人要有很好的邏輯觀念、分析能力，這二種能力不管唸什麼都很重要，這些能力，從學習其它的科目雖也能得到。但為什麼大家認為數學很重要，並不是因為聯考要考數學，聯考要考數學是它重要的結果。就是因為數學能對你的邏輯思考、分析能力有很好的訓練。也許這些能力在其它科目也可得到，但大家發現在數學中最容易得到。好比一個定理要由定義出發來證明，不可以有漏洞，所以思考要很嚴密、有條理，還要能分析創造。在這種意義下，數學就很值得去唸。不只是理工科，甚至文學院的學生都該唸點數學接受數學的薰陶，因為他也需要這種能力。文學院學生在大學四年裏也該找機會去修微積分。微積分是一很好的入門課程。文學院的學生畢業後不一定要繼續唸文學，說不定他以後需要一些計算機或統計等數量方面的知識，但如果四年中都沒有接觸過數學，就很難踏入另一個領域。我們在小學時學了一大堆算術，進入國中後開始學代數而引入未知數 x ，就是因為學了未知數的觀念，▲所以才可以解決很多數學問題。如果國中沒學，而停留在小學階段，那麼你能懂的數學實在很少。今天你不會問為什麼要學這個未知數（或代數），因為沒有這個工具，數學根本無法唸下去。同樣的，微積分是另一個突破，懂了微積分後，有很多學科才可以唸下去，如果不懂微積分，即使高中數學再好，程度還是停留在那個範圍內無法提昇，很多科學的領域就無法踏進。

在我感覺裏現在有很多高中時理科很好的學生，他比較不願意去唸物理、數學、化學，而去唸工科或其它熱門科系。在大學裏不應該太專，一個電機系畢業生不要只懂電機。基本上唸大學的那一系其實不是那麼重要，並非唸了

這個系，將來便只能走這行，如果這樣，大學的訓練就有偏失，一開始把一個學生定死了。很多學生才會在高中時就想要選個熱門科系，而不是依照自己的興趣。像材料研究所，它可能會用到物理、化學、冶金，所以這些科系的大學畢業生都可去報考。企研所的考試也分幾組，讀理工科的人也可以去考，因為在工廠的管理階層也需要各種物理機械方面的知識，所以研究所變得非常有彈性。在大學不管唸那一系，把那個系唸好，這樣才有一技之長。有些同學一天到晚光想將來要做什麼，出路如何，於是書也沒唸好，沒有一技之長，畢業後便很難再進修。不管唸那個系，只要覺得這個系給你訓練很好，就好好的唸。至於我個人從小便喜歡數學，高中時又不喜歡做實驗，覺得學數學比較單純簡便，所以就選擇數學這條路。對數學有興趣的人，就不妨多唸點數學，至於電機系的同學，除非你要轉數學系，否則電機系基本的東西還是要唸好，不要把本行忘了。喜歡數學，就再多唸點數學，以後可以做電機偏數學方面的工作。

問：什麼才是學習數學較好的途徑和方法？

答：我覺得有些同學對數學很渴慕，很想把這些東西弄懂，所以就自己找書來看，或找一些問題來做。但常常唸書會受到很多挫折。覺得自己唸了書，也做了很多習題，但考試考不好，這時候，就會懷疑，是不是方法不對，或是能力不夠。首先，我覺得不要太受考試影響。考試總是有好有壞，要不然就不用有考試了（所以英文叫 Test）。但如果你每次都考不好，那就得檢討，如果是自己沒唸書，自然沒話講。如果你花很多時間唸却常考不好，你可能需要去找老師，檢討讀書方法是否不太對，或是看一下其它同學怎麼唸。我當老師，出題時不喜歡出那種很瑣碎的題目。有些同學做了一大堆奇奇怪怪的積分微分，但一般形式的題目反而不會。其實對於那些難題，由於不求甚解，常常只能背下來。老師考試，通常不會考很多冷僻的題目。所以唸書要得法，把原理、定理、定義澈底了解。弄清楚重點在那裏，為什麼需要這個定理？唸書不要埋頭苦唸，有時候要停下來想想這個定理究竟在講什麼？而不只是先背起來再說，却不去深入了解。學而不思則罔，我思故我在。像每本書都有一套系統，唸一唸要停下來想一想，這些材料從頭到尾是怎麼推演下來的。微積分唸完一年後，也要想想微積分的架構是怎樣？如何建立的？從一個開始的極限、連續、微分、積分，到後來一大堆應用，它有一定的體系。唸書不要只是一個題目接一個題目的做，這樣不是在「唸書」，而是在「做題目」。不要走入這個歧途，要想清楚這些材料是在教我們什麼？它的目的是什麼？精神何在？並且讀書不要閉門造車，要和同學談，和老師談。不要怕同學來問自己問題，深怕浪費了自己的時間。其實你自以為懂的，說不定在教的時候漏洞百出。在教同學時，同學會問你為什麼，你就可以趁這個機會把它弄得更清楚，這樣子才會進步。不要認為教了別人，本來只有自己會的，別人也會了。要知道，水漲船高，在彼此都進步的環境裏，自己才會進步。如果發現了一本好書，也不妨介紹給同學，找幾個同學一起來唸。

問：請老師談一談求學的過程，以及其中的甘苦和領略。

答：台大數學系畢業後，當了二年兵，到普渡大學唸統計。因為在大三、大四修了一些統計的課，並且學生往往會受老師影響。那時候，我們系上有個教統計的老師，我覺得他的為人很好，教統計時常自得其樂，很享受的樣子，所以也變得比較喜歡統計。後來到美國就進統計研究所。唸書過程中當然會很苦。修課時，中間還有考試、作業，你會比較知道自己是在學什麼，因為考試完總會有個結果，如果考得不錯，代表你學得還可以。進入研究所一開始就是修課，修完課就找一個題目做博士論文。中間當然會有一些挫折。大學中一班四、五十個同學可以彼此互相討論，但進入研究所後，跟你唸一樣的人就變很少，選定了一個題目後更少。所以有人講，只要你能打敗你的指導教授，你在這個領域內便很厲害。你在做的研究，往往只有你的指導教授最清楚，其它教授也搞不清楚你在做什麼。所以唸書就很苦悶。作習題和作研究不一樣。習題有答案，或者叫你去證明一個敘述，或者是舉個反例。作研究時，解是什麼，甚至有沒有解都不知道。數學通常須要證明一些理論，但這個理論在做之前也不知道正不正確，所以我講的苦悶就是這種。作研究時一方面要努力去證明，證不出來，就努力去舉反例，經常這樣來來回回的做。不過最後當然還是把它唸完了。唸書期間自然也有很多值得回憶的快樂時光，美國的風土文化，他們做事的認真精神，以及社會的開明自由，都留給我深刻的印象。畢業後在美國教一年書，就回到中山來教書了。

問：純數和應數的主要差別為何，以及統計的應用層面。

答：在純數中，數學家可以不用管它有沒有什麼實際的意義，或是能應用到那裏。好比一個抽象空間，空間通常都是3維，但數學可以做到N維，你可以不用去管 R^N 到底是什麼東西，就是可以這樣推廣。應數常須要顧慮到他實際的意義。拿統計來說，做實驗，常用統計的方法來分析。比如發明了一種新藥，要看它有沒有效，就找一些病人做實驗，讓他們食用這種藥，看看有多少人被治好，這種藥有百分之幾的成功率；或是調查台灣有多少人吸煙，你不可能每個人都問，只能抽一些樣本，根據這些樣本來做推測，如何取樣以及如何分析資料，便是統計學的兩個主要工作。

此外從統計學裡，我們還可有些領略。宇宙是如此的不可測 (stochastic)，各種事件的發生與否，彷彿都遵循著某複雜的概率結構在進行，不論在社會中，生物界以及物理世界所發生的各種事件看起來都如此隨機 (Random)，讓人感到迷惑及混亂。但是，這隨機中却又顯出某種規律，統計便是要探

討這些規律。統計家們，試著用各種統計方法，去幫助科學家或決策者，找出規律，而做出正確的判斷。尤有進者，統計的訓練有助於我們對所處世界之了解。比方說，波松過程 (Poisson Processes)，常可用來描述自然界的現象中，若所含的事件，在一小段時間內不容易發生，若能了解波松的模式，很容易便可明白為什麼各種災難會常發生，另外在估計論裡，我們知道很多時候，估計值並不等於實際的值，但若我們確知，這便是最好的估計值了，則在有限的資料下，我們便可安心地根據此估計值，做出最好的判斷。所以從統計學裡，我們可學到如何適存於有限的資料下，如何使用這些有限的資料，讓我們過得更好，以及掌握環繞我們日常生活中的各種不確定性 (Uncertainties)

有些同學覺得一些課程中用到的數學不夠嚴謹，我覺得數學既然放在工程中就要能用。一般而言，如果寫成一個定理就要很嚴密，但實際用時就不必太拘泥他數學上的限制，不過工程書上還是該寫個註，告訴讀者此定理何時不能用，否則萬一那天錯誤，學生也不知道錯在那裏。理論還是要嚴密，實際用時就不必太拘泥數學上的條件和定義。就像重力加速度，看起來不太精密，但人類還是可以根據這些不太精密的資料發射太空船到月球。所以電機系學生實際用時要靈活以免寸步難行。

多看一些期刊，了解最近的發展，找些有興趣的題目來作。到高年級就可以翻一些電機工程的期刊。通常一本書從寫好到出版，需要好幾年，資料比較舊，而且從一開始簡介到後來都寫得很清楚，把什麼東西都告訴你，因此比較沒有啟發性。期刊通常都比較新，而且通常不會寫得那麼詳細，因為不是寫給一般讀者看，所以中間很多步驟都省略。因此看一篇期刊就要東查西查，享受到做學問的樂趣，作者後面可能還提出一些問題，我們也可以看一看是不是能拿來想一想、做一做。大部分的期刊都很深，但亦有較淺顯的，平時要多翻翻多看看就會知道期刊的性質，不要等到研究所才開始看。保持閱讀的樂趣。樂趣是要培養的，多翻多看培養這種習慣。有的論文也許並非佳作，但它開的參考資料說不定不錯。如果是常常被提到的論文，很可能就是經典之作，這也可以做為你讀書的參考。

問：請問老師目前有沒有寫書的計劃？

答：以前想過四十歲前要寫二本書，不過離現在還有幾年。如果有什麼看法或經驗，是應該把它寫出來。美國人很喜歡寫書，他們寫書通常很謹慎，尤其是教科書，不是一寫完就馬上拿去印，他會先試教，並且讓他的同事教教看，所以書的錯誤較少，且相當有系統，習題也往往經過精心設計，這都是花過一番功夫的。

最後希望各位同學，在大學四年中，多讀些好書，多交些朋友，多關心社會，對於朋友及周遭的環境付出你真正的關懷。