

# 堂堂溪水出前村

黃文璋

國立高雄大學應用數學系

大家在中小學階段，除非曾經跳級，否則至少須唸十二年的數學。老師及家長普遍地認為數學很重要，學生則因被薰陶太久了，心中對數學的重要性倒是不常懷疑的。但也普遍地不少學生並不太喜歡數學，大部分的學生則不知學那些數學要做什麼？當然，另一方面那些滿懷理想，以培養未來數學家為職志的新進教師，也在吹了幾年春風之後，被學生的意興闌珊，磨掉彈琴的雅興。

曾有一位老師在上完一年的平面幾何後，問學生這一年學到什麼？學生皆無法回答，最後有一位學生說“學到很多證明”。另外，數學家Halmos在他的母校伊利諾大學 (University of Illinois) 一百週年紀念會的演講中，提到一般人對數學家的工作內容都不太清楚。他說許多數學家的工作幾乎與數字絕緣。數學家不一定算得好加減乘除，就像畫家不一定畫得好一直線，外科醫生不一定殺得好一隻雞一樣。

與其他的基礎學科相比，物理、化學、生物等似乎都較易令人了解其內涵。比方說有些中學生開口閉口談相對論，而我們就不容易用淺顯的語言介紹數學中一些深奧的東西。如果你去物理系或化學系找同學，他可以展示他在學些什麼。但在數學系似乎就不容易拿出可讓人“看”的東西，連口頭或文字說明往往也很困難。

所以一方面大家都不太想挑戰“數學很有用”這個命題，一方面卻將數學當菩薩般地供著，只是為了寧可信其有，心中卻並不太服氣。進了大學又要(大部分的科系)修微積分自然更有氣，唸微積分有什麼用？

如果只是問有什麼用，大部分的學問都沒用。以前有位叫羅傑的華裔美國人，十二歲就大學畢業，而進史丹福大學(Stanford University)數學研究所。之所以能十二歲大學畢業，是將很多東西跳過沒唸。如果你的目的只是大學某一科系畢業，則那有太多該學的呢？例如，對理工學院的非數學、物理系學生，文、史當然沒用，數學、物理都不用學太多，體育又有什麼用？事實上把任何一門學科唸通都可有不少收穫，如唸國文，並非只是為了識字與寫信，而是讓我們從讀各種不同的文章中，學到鑑賞力與判斷力，讓我們更易融合不同的思想。一個人如果把國文唸通，他的邏輯觀念必很清晰，所以古時候的人只唸文學，但卻能帶兵打仗，出將入相。把那些經史子集唸通，胸中自然也有數萬甲兵了(宋朝范仲淹以龍圖閣直學士，經略陝西。夏人不敢犯其境，說“小范老子，胸中自有數萬甲兵”)。唸數學不要光想著它有什麼用(雖然它常常也是有用的)，這樣唸起來就不太有意思。我們在享受美食時，絕非想其營養成分如何，或是否能頤顏美容。我們也不會去要求畫家也須能設計建築物。

但話又說回來，大廚師端出來的菜除了色香味，若能兼顧到營養不也很好嗎？畫家若能偶而畫些有實用價值的畫，也不違背他所追求的藝術啊！唸數學也不用非出世不可，要知大隱隱於朝。

我們陸續提到過微積分，對這門大部分的大學生皆要修的微積分，我們應抱持什麼樣的看法呢？不尊為菩薩，也不視為江湖賣藝，更不是要學些花拳繡腿。微積分用到大部分中學時代所學的數學，以前所學的數學，在微積分中，就如做菜時所需的佐料，經常要這個用一點那個用一點，將配方適當的佐料融進鍋子裡，然後呈現出的是一道令人聞起來就舒服的菜。微積分的勻稱好有一比：當我們說一位女孩子很美，並不是指諸如她的衣服很漂亮，或是眼睛很大，而是指她整個看起來就是美，分不出那裡美。另外，我們必須把微積分當做是一門通識課程，從其中可學到夠多的數學知識，學到數學的思考方式，並可以此為骨幹，一旦那裡有需要數學之處，就能伸出枝幹來托住。只要能勤奮不懈，就會如神鵬俠侶一書中的僧侶“覺遠”，看到達摩祖師親手寫的“九陽真經”中載著許多強身健體，易筋洗髓的法門，便一一照做，不知不覺中練成了上乘武功。作者金庸(1996a)描述覺遠“恂恂儒雅，腹有詩書氣自華”。

微積分是微分(differentiation)和積分(integral)的合稱。微分是研究

變化率，我國對小數的命名有分、厘、毫、秒、忽、微。微是最小的名稱，故對很小的東西，概以微稱之，所謂微小是也。微分就是由無限分割後所得的微小，故稱之為微分。至於積分是求積，如長度、面積、體積。積有積聚的意思，積分也就是將無限個極微小聚起來。

積分的概念起源極早，西元前三世紀左右正是希臘數學鼎盛的時期，Eudoxus(約西元408-355年)、歐幾里得(Euclid, 約在西元前375-330年)、阿基米德(Archimedes, 西元前287-212年)，先後利用“窮盡法”(method of exhaustion)算出許多圖形的面積、立體的體積及曲線的長度。例如，阿基米德用圓的內接正多邊形的周長來逼近圓周長。這種逼近法，過程雖繁複，因計算時要不斷地用到開方，但這個原理卻發展成為積分。

雖然積分起源如此早，但進度並不太快，到了十七世紀，由於天文及物理的發展，微積分才開始被廣泛地探討。笛卡兒(Descartes, 1596-1650)、Cavalieri (1598-1647)、費馬(Fermat, 1601-1665)、Wallis (1616-1703)、Pascal (1623-1662)、Huygens (1629-1695)、Barrow (1630-1677)及Gregory (1638-1675)為幾位較有顯著貢獻者，而由牛頓(Newton, 1642-1727)及萊布尼茲(Leibnitz, 1646-1716)集其大成。在十七世紀，除了求積之外，數學家還考慮諸如(i) 由距離來求加速度、(ii) 由加速度來求速度、(iii) 作曲線的切線、(iv) 求函數的極大或極小值、(v) 求曲線長、面積、體積、重心等問題。其中求加速度、切線及極大、極小問題就引發出微分學。

有關微分及積分本來都是個別的討論，到了牛頓及萊布尼茲才有了系統化及符號化的研究，他們並發現原來微分與積分是互為逆運算的。就像乘法與除法間的關係一樣。此發現使許多觀念更明朗，許多計算更能簡化，而微分與積分結合之後，就如真氣鼓盪一般，六脈神箭齊發，無堅不摧(見金庸(1996b))。

牛頓、萊布尼茲也因此被稱為微積分的發明者，而阿基米德、牛頓、高斯(Gauss, 1777-1855)則被稱為有史以來三大數學家。不過大家過去對阿基米德及牛頓的認識恐怕多半是在物理方面。愛因斯坦(Einstein, 1879-1955)說過“普天之下，凡能用數學表示者，就是物理”。Halmos對此說法就很不滿意，他在前面提到的演講中，就特別強調“數學絕對不是物

理!”。

但是牛頓及萊布尼茲對極限的觀念並不夠成熟，許多證明也不夠嚴密，還好他們的直觀都夠敏銳，知道什麼是對的。後來陸續經過James Bernoulli (1654-1705, 即Jakob Bernoulli, 他是第一個採用integral 這個字的數學家)及其弟弟Johann Bernoulli (1667-1748, 即John Bernoulli)、歐拉(Euler, 1701-1783)、Lagrange (1736-1813)、Laplace (1749-1827)、d'Alembert (1707-1783)、Bolzano (1718-1848)、歌西(Cauchy, 1789-1857)及Weierstrass (1815-1897) 等人的努力，才有嚴密的極限定義，微分及積分也密切結合，如巧鑿天功似地渾然一體。甚至微積分的發展，也不侷限於大一微積分的範圍。經不斷深入的探討，已邁向潛力無窮的解析學(analysis)，並應用至數學的許多領域，及數學之外各個不同的學科，而成爲許多學科中的骨髓。

有了微積分的工具，牛頓用他的萬有引力定律及三大運動定律，來解釋星球的運轉、物體的運動及許多物理現象，並因此帶動科技的發展，促進人類文明的進步。經由微積分，才可能登堂入室進入一開闊無比的境界。微積分是否能學好，也成爲由中學時代的數學，進入更高一層數學世界的敲門磚。

## 參考文獻

1. 金庸 (1996a). 神鵰俠侶, 第三版。遠流出版社, 台北。
2. 金庸 (1996b). 天龍八部, 第三版。遠流出版社, 台北。