費氏數列及黃金分割

黃文璋
國立高雄大學應用數學系

1 小史

西方最早發展數學的是巴比倫(Babylon)人與埃及人,他們的數學都是因實際需要而產生的,而且都很初等,直到希臘時代才有極大的轉變。許多古文明都認為大自然是神秘且混亂的,而這一切皆因那些掌管宇宙運行的諸神喜怒無常,所以人們必須拜神祈福。但到了約西元前六百年,有一些希臘哲學家開始有一些新的看法。他們認為大自然的運轉,其實是依循一定的模式井然有序的,若能了解其變化的原因,便能預測未來的變化。而這中間該掌握的工具, 便是數學。於是無論在天文、光學或是音樂的研究,都帶有濃厚的數學味道。數學的發展也就掌握在這批探討自然界眞理的哲學家手中。這些哲學家在各地成立學院,講授各種知識。其中以數學出名的有畢達哥拉斯(Pythagoras,即俗稱畢氏, 約西元前580-500年)、Eudoxus(約西元前408-355年)、歐幾里得(Euclid,約西元前375-330年)及Apllonius(約西元前261-190年)。另外也有貴族出身,錦衣玉食,而專注於學問的,如阿基米德(Archimedes,約西元前287-212年)。他們發展出來的數學有數論、平面幾何及圓錐曲線,而積分學也在他們手中萌芽。這時期發展出來的數學可說是較偏理論的。

西元前332年,馬其頓王國(Macedonia,古希臘北部之王國) 的亞歷山大大帝(Alexander the Great,西元前356-323年)擊敗波斯人,接管了埃及,其所建立的都城,後來便稱為亞歷山大里亞(Alexandria)。此城臨地中海,在

尼羅河 三角洲的西緣,後來一度成爲希臘文化的中心之一。在此期間(西元前332至西元642年)的中後期,對數學探討的動機,轉趨應用,三角學就是在這段時期成熟的。

中世紀(Middle Ages)時,希臘之學式微,歐洲的數學發展幾乎停頓下來。而差不多在這時期,阿拉伯文化興起。九世紀時,阿拉伯著名的數學家及天文學家al-Khowärizmi (780-850)在一部稱爲De nwmero Indorum的著作中,將印度數字做了詳盡的介紹,對印度數字的傳至歐洲, 功勞甚大,也使後世誤以爲這種數字是源自於阿拉伯,而不知實始自印度。當然印度數字傳入阿拉伯後,形式也做了一些改變,因此在數學史上稱這種數字爲印度–阿拉伯數字,而非如一般俗稱的阿拉伯數字。

在阿拉伯帝國轄區之外,最早了解並傳授印度數字的歐洲學者是日後成爲教皇Sylvester二世 (西元999-1003年間)的法國人Gerbert (940-1003)。Gerbert之後的兩百年間,印度–阿拉伯數字並未在歐洲推廣開來。印度–阿拉伯數字能夠逐漸取代其他數字,義大利數學家Leonardo Fibonacci功不可沒。

Leonardo Fibonacci,英文作Leonardo of Pisa(或Leonardo Pisano),因Leonardo 的父親叫做Bonaccio,他的兒子應名之爲Figlio Bonaccio,意義爲Son of Bonaccio。至於叫Fibonacci,則是法國數論學家Lucas (1842-1891)後來爲他取的暱稱(nickname)。Fibonacci (費波那契)被認爲是中世紀最傑出的數學家。關於他的生平,除了在他的數學著作中所提到的,我們知道的並不多。由於他第一本(也是最有名的)著作“算經”(Liber Abaci,英文名爲Book of the Abacus),出版於西元1202年,推測他很可能生於西元1170年代(由於是推測,所以有些書說1170年,有些書說1175年)。他可能出生於義大利的比薩(Pisa),不過證據並不明顯。又推測卒於西元1250年。

費波那契的父親爲比薩的商人,在費波那契幼年時,曾在北非的Bugia(現爲阿爾及利亞(Algeria)的Bejaia)擔任比薩的商務領事。由於費波那契的父親認爲數學是有用的,因此送費波那契向阿拉伯教師學習數學。後來,費波那契在其算經中,描述他學習九個印度數字的藝術之樂。

費波那契青年時曾旅遊埃及、敘利亞(Syria)、希臘、西西里島(Sicily)及Provence(法國東南之一區)等地,研究各種不同的數字,發現無一能與

印度–阿拉伯數系媲美。在他的算經問世之前,歐洲只有少數人透過前面提過的al-Khwarizmi著作的譯本,得知印度–阿拉伯數字。所以算經一開始就介紹:九個印度數字爲9、8、7、6、5、4、3、2、1。以此九個數字和記號0···,可以寫出任何數。在算經前七章中,解釋了位值原理(the Principle of Place Value),並把它應用於實際商業問題,如求利潤、易貨貿易、貨幣兌換、重量及尺寸換算、合股和利息等。此書大部分致力於思辨(speculative)數學。例如,比例、假位率(the Rule of False Position, 先做一個未必正確的假定,然後利用比例加以調整,而得到正確答案的計算方法)、求根法以及包括某些幾何和代數的數之性質。

費波那契也是第一位使用分數記號的人。例如,以$\frac{2}{3}$表示三分之二。不過這種分數記號卻一直到十六世紀,才被廣泛地接受及使用。至於以2/3表示三分之二,則是de Morgan (1806-1871)在西元1845年所創。西元1220年, 費波那契寫出了討論幾何的小冊子"The Practica Geometriae" (Practice of Geometry)。此書是基於歐幾里得的幾何原本(Elements)及論剖分(On Divisions),闡述幾何定理。

費波那契還在自己的著作中,提供了神聖羅馬帝國(Holly Roman)皇帝腓特烈二世 (Frederick II) 的一位科學隨從所提出的一系列問題中的三個問題的解。前二個是解不定方程式,這類問題是三世紀時希臘數學家丟番圖(Diophantus,生平不詳)所發展出來的。即一有二個或三個未知數的方程式,而解需爲有理數。第三個則是解三次方程式$x^3+2x^2+10x=20$。他證明其解不是一個可造數(即$a+\sqrt{b}$型式的數,其中a, b皆爲有理數),這是歐洲數學史上第一個指出並非每個數皆可以用希臘式尺規作圖法(即以無刻度的直尺及圓規作圖) 作出來之例。他用嘗試錯誤法(trial and error,即逼近法),求出近似值$x=1.3688081075$, 精確至小數第九位。

費波那契另著有四藝經(Liber Quadratorum,西元1225年出版,即Book of Square Numbers) ,是專門討論二次丟番圖方程式。雖然算經流傳較廣,但四藝經應是他主要的著作。此書有系統地編排了一系列問題,許多是他本人發明,並用自己的方法求出通解的。書中最有創造性的工作應是同餘數(congruent numbers),即除以一給定的數而有相同的餘數。此書使費波那契成爲在數論史中,貢獻介於丟番圖及費馬(Fermat, 1601-1665)之間。

除了扮演傳播印度–阿拉伯數字的角色, 費波那契在數學中的貢獻,卻往往被忽視。現代數學家之所以會知道他的名字,往往並非因他在數學上的成就,而是得知於費氏數列(Fibonacci sequence) ,但這只不過是自算經中所提到的一個問題推導出來的。

2 費氏數列

在算經中記載著下述兔子的繁殖(breeding of rabbits)問題:某人養了一對剛出生的兔子,假設兔子自兩個月大起,每對每個月可生一對兔子,若兔子皆未死亡,問一年後會有多少對兔子?答案是兔子將依下述數列增加:1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,$\cdots$(費波那契略去第一項),12個月後有233對,數列中每一項皆為前二項之和,這是歐洲所知的第一個遞迴數列 (recursive sequence),即一數列中相繼的數項,可以一公式來表示。算經後來湮沒無聞,直到十九世紀, Lucas重新發現此書。Lucas深為兔子的繁殖問題所吸引,他編輯一套有四冊的趣味數學的書,書中將前述數列命名為費氏數列。費波那契本人並未深入探討此數列,也不知此數列有何用途。但自Lucas起,數學家對此數列產生濃厚興趣,並逐漸發現此數列有許多美妙的性質。西元1962年,以B. A. Brousseau及V. E. Hoggatt 為首的一群美國學者成立一費波那契協會(Fibonacci Association),目的為“對費氏數列及相關題材交換想法及增進研究(to exchange ideas and stimulate research in the Fibonacci numbers and related topics)”。在西元1963年並發行費波那契季刊 (Fibonacci Quarterly),專門刊登關於費氏數列的新結果,以及各式各樣相關的數列及函數。一個如此簡單的數列居然會產生這麼大的回響,顯然是值得我們來探究的。

費氏數列不但引人入勝,且在許多意想不到的領域,如物理學、植物學(botany)、建築學(architecture),甚至在著名的繪畫中都常出現。如前所述這都要歸功於Lucas對費氏數列的深入探討,而不是費波那契本人。

我們先藉圖1來說明費氏數列是如何產生的,其中粗線表“父母”那對,點線表剛繁殖出來的那對。

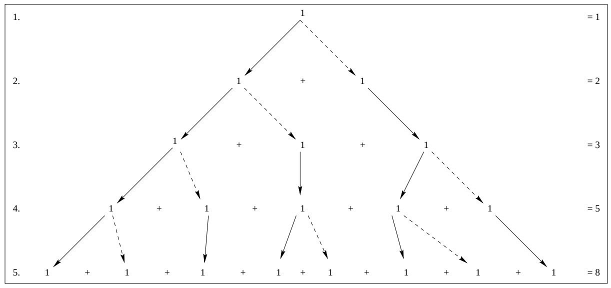


圖1. 兔子繁殖之圖示

我們注意到在第二個月底出生的那對兔子,要到第四個月底才會繁殖出一對。此即指出數列中每一項爲前二項之和。若令F_n表第n個月初之兔子數,則有下述關係

$$F_n + F_{n+1} = F_{n+2}, n \geq 0, \tag{1}$$
$$F_0 = 0, F_1 = 1 \text{。}$$

這是開卜勒(Kepler, 1571-1630,德國天文學家及物理學家)在西元1611年所發現的費氏數列之特性。

爲了易於對照,我們列出費氏數列的前16項。

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

底下爲費氏數列的一些性質,證明多半不難,留給讀者自行推導。在此費氏數列中的任一項我們皆稱之爲費氏數(Fibonacci number)。

1.$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$。即二相鄰的費氏數之平方和仍爲一費氏數。如$1^2 + 1^2 = 2$, $1^2 + 2^2 = 5$, $2^2 + 3^2 = 13$等。

2.$F_{n+1}^2 = F_n F_{n+2} + (-1)^n$。即對連續三項費氏數,首尾兩項之積,與中間那項平方之差爲1。如$1^2 = 1 \cdot 2 - 1$, $2^2 = 1 \cdot 3 + 1$, $3^2 = 2 \cdot 5 - 1$等。由此性質立即得F_n與F_{n+1}互質,即$(F_n, F_{n+1}) = 1$。

3.$F_{n+2}^2 - F_{n+1}^2 = F_n F_{n+3}$。例如$2^2 - 1^2 = 1 \cdot 3$, $3^2 - 2^2 = 1 \cdot 5$, $5^2 - 3^2 = 2 \cdot 8$等。

4.除了0與1之外,唯一是平方數的費氏數爲$F_{12} = 144$,也恰好爲其指標12之平方。在144之後無一費氏數爲平方數之證明,可參考吳振奎(1993) pp.63-68。又也只有1及8二費氏數爲立方數。

5.若$n|m$,則$F_n|F_m$(即若m爲n之倍數,則F_m爲F_n之倍數),如$F_3|F_{15}$,且$F_5|F_{15}$。此可利用歸納法證明。

6.除了$F_4=3$之外,每一費氏數若爲質數,則其指標亦爲質數。如$F_7=13$, $F_{13}=233$, 13與233皆爲質數,而7與13亦皆爲質數。此可利用性質5證明。但其逆不眞。第一個反例爲$F_{19}=4{,}181=37\cdot 113$, 雖然19爲一質數,但$F_{19}$並非質數。又雖質數有無限多個,但費氏數列中是否有無限多個質數,仍然未知。

7.$F_nF_m+F_{n+1}F_{m+1}=F_{n+m+1}$(取$m=n$即得性質1)。如$5\cdot 13+8\cdot 21=65+168=233$。此可利用歸納法來證明。

8.$\sum_{i=1}^{10}F_{n+i}=11\cdot F_{n+7}$。如$5+8+13+\cdots+377=979=11\cdot 89$。此性質對任意類似產生的數列皆成立,且與起始的二數無關:a,b,$a+b$,$a+2b$,$2a+3b$, $3a+5b$,$5a+8b$,$8a+13b$,$13a+21b$及$21a+34b$之和爲$55a+88b=11(5a+8b)$,其中$5a+8b$爲第7項。

9.$F_1+F_2+\cdots+F_n=F_{n+2}-1$。

10.$F_1^2+F_2^2+\cdots+F_n^2=F_nF_{n+1}$。

11.$F_1^3+F_2^3+\cdots+F_n^3=(F_{3n+2}+6(-1)^{n+1}F_{n-1}+5)/10$。如$n=4$,$1^3+1^3+2^3+3^3=37=(F_{14}-6F_3+5)/10=(377-12+5)/10$。

12.$a|F_m$且$a|F_n$若且唯若$a|F_d$,其中$d=(m,n)$。此可利用性質6證明。

13.$F_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k}$,此可利用歸納法證明。

14.考慮F_{n+1}/F_n,則隨著n之增大,此比值趨近至$1.618\cdots$。事實上,$n=10$ 時,比值至小數3位就已是1.618了。此極限值可利用下述代數步驟得到。

$$\begin{aligned}&13=8+5,\\&\frac{13}{8}=1+\frac{5}{8}=1+\frac{1}{8/5}=1+\frac{1}{1+\frac{3}{5}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{5/3}}\text{。}\end{aligned}$$

繼續此步驟可得連分數(continued fraction)的表示

$$\frac{13}{8}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}}}\text{。}$$

如果繼續試下去,將會發現隨著n趨近至∞,

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \to 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}},$$

得到一無限的連分數(中間的細節省略了)。令此極限值爲x(此極限值存在的原因也省略),則有

$$x = 1 + \frac{1}{x},$$

或

$$x^2 - x - 1 = 0 \text{。} \tag{2}$$

上式之一解爲

$$\phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\cdots,$$

另一解$\phi_2 = (1-\sqrt{5})/2 < 0$不合。又$\phi_1 + \phi_2 = 1$,$\phi_1\phi_2 = -1$ 。通常以ϕ表$(1+\sqrt{5})/2$。

由於$x^{-1} = x - 1$,x的倒數可由x減去1而得,即

$$\frac{1}{x} = 0.618\cdots,$$

而此值即爲F_n/F_{n+1}之極限。對$\phi - 1, \phi, \phi + 1$三數,它們有下述關係

$$\phi + 1 = \phi^2, \frac{1}{\phi} = \phi - 1, \tag{3}$$

其中第一個等式用到(2)式。有人將$\phi - 1$, ϕ及$\phi + 1$ 稱爲奇妙的無理數三兄弟。

必須一提的是,對任一數列$\{U_n, n \geq 1\}$只要滿足

$$U_n + U_{n+1} = U_{n+2}, \tag{4}$$

不論首二項爲何, 則U_{n+1}/U_n之極限皆爲ϕ。例如1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, $\cdots$, 此稱爲Lucas數列,後項與前項比之極限便爲ϕ。Lucas數列之第n項以L_n表之,$n \geq 1$,稱爲Lucas數(Lucas number)。

上述連分數的近似值爲

$$1, 1+\frac{1}{1}, 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}, 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}, 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}},$$

化簡得$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \cdots$, 此數列之分子及分母皆形成費氏數列。

15.F_n有下述表示法:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \right), n \geq 0 \text{。} \tag{5}$$

[證明]:首先$n=0$時,(5)式明顯地成立。由(2)式,ϕ_1及ϕ_2皆滿足

$$\phi^2 = \phi + 1 \text{。}$$

再由歸納法,可得

$$\phi^n = \phi F_n + F_{n-1}, n \geq 1 \text{。} \tag{6}$$

因此

$$\phi_1 F_n + F_{n-1} = \phi_1^n,\ \phi_2 F_n + F_{n-1} = \phi_2^n \text{。}$$

由此即得

$$F_n = \frac{\phi_1^n - \phi_2^n}{\phi_1 - \phi_2},\ n \geq 1 \text{。}$$

因$\phi_1 - \phi_2 = \sqrt{5}$,故得證(5)。

(5)式爲法國數學家Binet (1786-1856)在西元1843年所發現,在研究費氏數列時很重要。亦可利用解(1)之差分方程式(difference equation)直接求得(5)。初看之下(5)式之右側不像整數,但因F_n皆爲正整數,故(5)式右側必須爲整數。其實單看(5)式右側,稍微想一下,應仍可想通它必爲整數。另外,因$-1 < (1-\sqrt{5})/2 < 0$,而F_n是正整數,故

$$F_n = \begin{cases} \left[\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n\right] & , n\text{爲偶數}, \\ \left[\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n\right] + 1 & , n\text{爲奇數}, \end{cases}$$

其中$[\cdot]$表最大整數函數(greatest integer function),如$[7.2] = 7, [8] = 8$。

至於Lucas數列則可表示爲

$$L_n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n,\ n \geq 1 \text{。}$$

16.任取一費氏數,其首位爲n之機率爲

$$\log_{10}(1+\frac{1}{n})\text{ 。}$$

表1可說明此法則,考慮首100個費氏數 。

n	首位爲n之次數	頻率	$\log_{10}(1+\frac{1}{n})$
1	30	0.30	0.3010
2	18	0.18	0.1764
3	13	0.13	0.1249
4	9	0.09	0.0969
5	8	0.08	0.0792
6	6	0.06	0.0669
7	5	0.05	0.0580
8	7	0.07	0.0512
9	4	0.04	0.0458

表1.首100個費氏數的首位

若考慮更多的費氏數,則表1中第3行與第4行之差異將愈小 。此爲一種首位數字現象 (first significant digit phenomenon, 在諸如物理 、化學 、經濟調查 、各國公路總長等數據, 首位數字小於或等於n 之出現頻率常約爲$\log_{10}(n+1)$), 許多常數均有此現象, 可參考Pinkham (1961) 。

17.在物理學及工程裡有一常用的函數,稱爲Bessel函數(Bessel function),其定義爲

$$J_n(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r x^{n+2r}}{2^{n+2r}r!(n+r)!}, n=0,1,2,\cdots,x>0\text{ 。}$$

Bessel函數與費氏數列亦有下述關係:

$$\sum_{n=0}^{\infty}F_{n+1}J_n(x)=e^{x/2},\sum_{n=0}^{\infty}F_nJ_n(x)=0\text{ 。}$$

18.西元1953年Stancliff注意到(他並未提供證明)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{F_i}{10^{i+1}} = \frac{1}{89} \text{。} \tag{7}$$

89是費氏數列中第11項,且爲一質數,它的倒數有44位循環小數。(7)式可以歸納法 證明(見Long (1981)),並有不少推廣,如

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{L_i}{10^{i+1}} = \frac{19}{89},$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{F_i}{10^{2i+2}} = \frac{1}{9899} \text{。}$$

林炳炎(1983)一文也可參考。數學家認爲這是費氏數列之一古怪的(bizarre)性質。

3 黃金分割

開卜勒説"幾何學有兩大寶藏,其一爲畢氏定理,其二爲將一線段分成外內比 。前者如黃金,後者如珍珠"(Geometry has two great treasures: one is the Theorem of Pythagoras; the other, the division of a line into extreme and mean ratio. The first we may compare to a measure of gold; the second we may name a precious jewel)。

所謂將一線段分成"外內比(或稱中末比或中外比)",這是歐幾里得 在幾何原本 裡的説法,指將一線段分成二不等長的部分,使得長段與短段之比等於全長與長段之比。若令此比值爲x,則由假設

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1},$$

或

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

解出

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

另一根$x = (1-\sqrt{5})/2 < 0$不合。

你是否注意到上述長段與短段之比值,恰爲費氏數列後項與前項比之極限値(這是Simson在西元1753年首先發現的)?此數稱爲黃金比(golden ratio或golden proportion),或黃金數 (golden number) 。一線段中使長段與短段之比爲黃金比的那點,稱爲把此線段黃金分割(golden section) 。有時也將黃金數稱爲黃金分割 。而一長方形,若長比寬等於$(1+\sqrt{5})/2$,便稱此爲黃金長方形(golden rectangle) 。

1.黃金分割線段之作圖

作圖.設有線段$\overline{AB}$,過B點作$\overline{AB}$之垂線,並取C點,使$\overline{CB}=\overline{AB}/2$, 連接$A,C$,見圖2 。以$C$爲圓心,$\overline{CB}$爲半徑畫弧,交$\overline{AC}$於$E$點 。再以$A$爲圓心,$\overline{AE}$爲半徑,畫弧交$\overline{AB}$於$D$點 。則$D$點即爲$\overline{AB}$ 之黃金分割點 。

[證明]:首先$\overline{AB}=2\overline{CB}$,$\overline{CE}=\overline{CB}$,故

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CB}^2=5\overline{CB}^2,$$

即

$$\overline{AC}=\sqrt{5}\,\overline{CB}\text{ 。}$$

又

$$\overline{AD}=\overline{AE}=\overline{AC}-\overline{CE}=(\sqrt{5}-1)\overline{CB}\text{ 。}$$

故

$$\overline{DB}=\overline{AB}-\overline{AD}=2\overline{CB}-(\sqrt{5}-1)\overline{CB}=(3-\sqrt{5})\overline{CB},$$

且

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\frac{(\sqrt{5}-1)\overline{CB}}{(3-\sqrt{5})\overline{CB}}=\frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\text{ 。}$$

得證 。

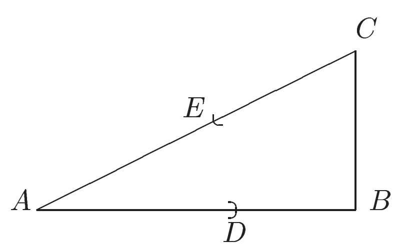


圖2.黃金分割線段

2.黃金長方形之作圖。

作圖.作正方形$ABCD$,取$\overline{DC}$中點E。以E爲圓心,$\overline{BE}$爲半徑畫弧交$\overline{DC}$之延長線於G點,如圖3。過G作$\overline{DG}$之垂線,交$\overline{AB}$之延長線於H。則$AHGD$即爲所求。

[證明]:易見

$$\overline{BE}=\frac{\sqrt{5}}{2}\,\overline{AD}\text{。}$$

故

$$\begin{aligned}\overline{DG} &= \overline{DC}+\overline{CG}=\overline{AD}+(\overline{EG}-\overline{EC})=\overline{AD}+\overline{BE}-\frac{1}{2}\overline{AD}\\ &= \overline{AD}+\frac{\sqrt{5}}{2}\,\overline{AD}-\frac{1}{2}\,\overline{AD}\\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,\overline{AD}\text{。}\end{aligned}$$

即得證

$$\frac{\overline{DG}}{\overline{AD}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\text{。}$$

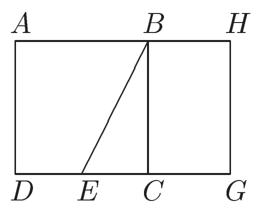


圖3.黃金長方形

數學上認爲黃金長方形爲一極美觀的圖形。不但在數學、在藝術、建築、自然界,甚至廣告中, 處處可見到黃金長方形。心理學家曾做過實驗,證實黃金長方形爲讓人看起來最順眼且最舒服的一種長方形。

在西元前五世紀,古希臘人便留意到建築物的長與寬之比若爲黃金數,則是協調的。約在西元前438年築成的Parthenon(爲希臘雅典女神Athena之神殿, Athena爲希臘神話中專管智慧、技藝及戰爭的女神),便是早期建築裡採用黃金長方形之例。民國85年12月 號(Vol.14, N0.7)的牛頓雜誌,其中“雅典–傳播希臘神話與文明的城市”一文(pp.104-117),便有Parthenon 之清晰的彩色圖片及介紹。此神殿爲集古希臘建築精華於一身的精緻建築物,雅典現今仍留有Parthenon的殘留部分,見圖4。古希臘人在建築及畫像裡偏好黃金長方形,由黃金數的符號$\phi = (1+\sqrt{5})/2$,ϕ的讀音爲phi,恰爲古希臘著名雕刻家Phidias的首三個字母而得到佐證。Phidias的作品中經常用黃金數及黃金長方形。畢氏學派 (the Pythagorean school, 爲畢達哥拉斯所創)據說便是採用五角星形(pentagram)爲他們會社的符號,而五角星形便與黃金數有關。

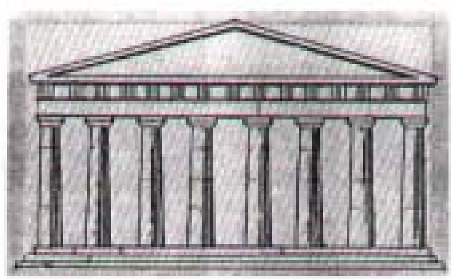


圖4. 神殿Parthenon殘留之部分,將已破壞的上方加以補上後, 神殿的各部分都精密的符合黃金長方形

除了在建築上的影響,在藝術作品裡,也常有黃金長方形出現。達文西(Leonardo da Vinci, 1459-1519) 發現人體的高度與由腳底到肚臍的高度之比大約是黃金數。西元1509年,數學家Luca Pacioli 出版De Divina Proportione (divine意義爲神聖的,黃金數又稱divine number)一書,展示黃

金數在人體、平面幾何及立體幾何中之迷人的例子,其中的插圖爲達文西所繪。圖5 爲書中之一例,有三個黃金長方形對稱地相交,且互相垂直。則三個長方形總共的12個頂點,恰爲一正二十多面體的12個頂點。

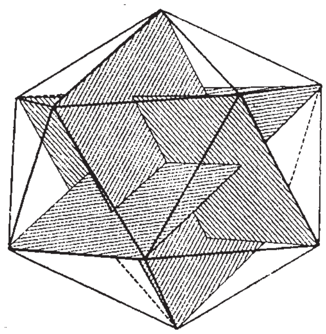


圖5. 三個黃金長方形對稱且垂直相交

在達文西一幅約在西元1483年所作的未完成的作品St. Jerome,也完全吻合黃金長方形。達文西不但熱愛黃金分割,並在其作品及想法中常藉助數學。他認爲沒有數學就不足以稱爲科學(no human inquiry can be called science unless it pursues its path through mathematical expositon and drmonstration)。

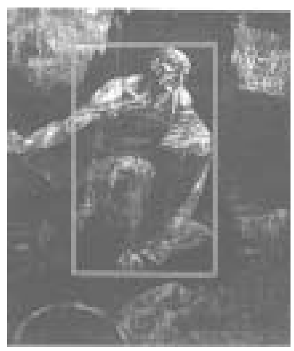


圖6.達文西的St. Jerome

近年來Davis and Altevogt (1979)曾分別對德國Münster 城Pascal預科學校(Gymnasium) 的207個青年學生及印度加爾各答(Calcutta) 252個青年男子做測量,前者對男生及女生均得到平均值約1.618極接近黃金數,後者得到平均值約1.615。讀者不妨試試量你自己,看夠不夠完美。藝術家

認爲若肚臍爲人體頭至腳的黃金分割點,則這種體型是最優美的。在藝術作品中採用黃金比是所謂動態對稱(dynamic symmetry)的技術。除了達文西亦有不少畫家都曾在他們的作品中採用動態對稱的技術,如Albrecht Dürer 、George Seurat 、Pietter Mondrian 、Salvador Dali 及George Bellows等。

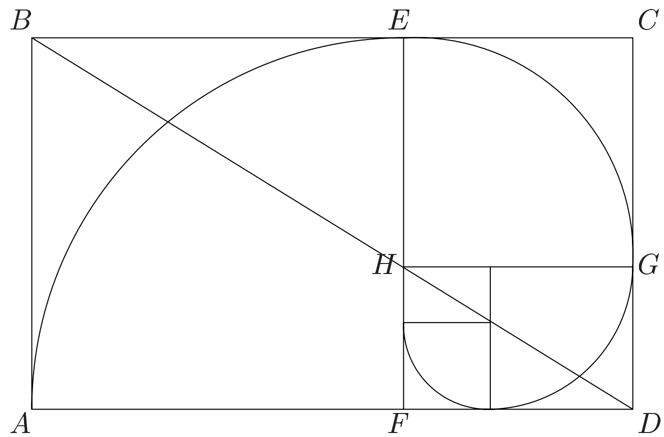


圖7.等角螺旋線

黃金長方形亦可自我產生(self generating)。自一黃金長方形$ABCD$出發,作正方形$ABEF$, 則$ECDF$爲一黃金長方形。再做正方形$ECGH$,又得黃金長方形$DFHG$。依此繼續進行下去,並在每一正方形各做四分之一圓,便得到一數學上稱爲等角螺旋線(equiangular spiral), 又稱對數螺旋線(logarithmic spiral)的曲線。在蝸牛或某些貝殼動物的硬殼上,常可看到這種曲線。

3.正五邊形(pentagon)及五角星形之作圖。

作圖.首先因正五邊形每一邊所對的圓心角爲$2\pi/5$,若圓半徑爲l,則利用餘弦定理,兩倍圓心角$4\pi/5$所對應的弦長C滿足

$$\begin{aligned} C^2 &= l^2 + l^2 - 2l^2\cos(\frac{4\pi}{5}) \\ &= (2 + 2\cos(\frac{\pi}{5}))l^2 \\ &= l^2(2 + 2\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4})l^2 \\ &= ((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 + 1)l^2, \end{aligned}$$

此處利用到$\cos(\pi/5) = (1+\sqrt{5})/4$。由上式給定$l$,便可作出$C$(即短邊爲$l$之黃金長方形的對角線)。

現作一半徑爲l之圓,圓上任取一點A,以上述$C(= ((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 + 1)^{1/2}l$爲半徑畫弧交圓於$C$及$D$,$\overline{CD}$即爲正五邊形的一邊,由此即得正五邊形$ABCDE$。至於連接$ABCDE$之對角線即得五角星形$FGHIJ$。

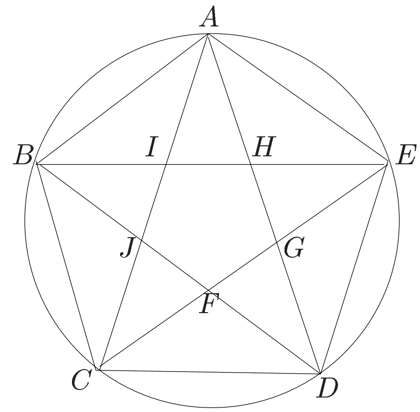


圖8.正五邊形及五角星形

在圖8中$\overline{BF}$與$\overline{FD}$之比即爲黃金數,又$FGHIJ$亦爲一正五邊形,$\overline{BF} = \overline{BC}$, $\overline{FC} = \overline{FD}$,故圖中有不少等腰三角形。在圖8中,依序取各弧的中點,即得正十多邊形。圓半徑與正十多邊形之邊長比亦爲黃金數。許多國家的國旗上皆有五角星形,其圖形之美觀可能是被樂於採用的原因之一。

4 應用

1.Wythoff賽局

設有兩堆棋子,設棋子數分別爲a, b。甲乙二人按下述規則取棋子:

規則(1).兩人輪流取棋子,每次至少取一個。

規則(2).可以只從同一堆裡取,數量不拘,全取光亦可。

規則(3).可以同時從兩堆裡取,但每次從兩堆中取的棋子要一樣多。

規則(4).取到最後一個棋子者獲勝。

此賽局爲Wythoff (1907)所引進。我們想知道如何求取必勝法?也就是每次取完後,兩堆要各剩下多少棋子,才可保證自己一定獲勝。

明顯地,如果你取完後,棋子兩堆各餘1個及2個,輪到對方取,則不論他如何取,你一定獲勝了。但若棋子數多些,譬如說各剩8個及15個,則可能便不易看出該如何取才保證必勝了。我們有下述定理,證明可參考李育嘉(1995)一文。

定理1. 必勝局的充要條件爲

(8) $$a = [n\phi], b = [n\phi] + n,$$

或

(9) $$a = [n\phi] + n, b = [n\phi],$$

其中如前$\phi = (1 + \sqrt{5})/2$,$[\,\cdot\,]$爲最大整數函數,而n爲任一正整數。

如果你熟悉$[\,\cdot\,]$函數的運算,且留意到$\phi + 1 = \phi^2$,則知

$$[n\phi] + n = [n\phi + n] = [n(\phi + 1)] = [n\phi^2]\text{。}$$

故有時以$a = [n\phi], b = [n\phi^2]$或$a = [n\phi^2], b = [n\phi]$表必勝局。

若對方不知此必勝法,則每次你取完後,只要使棋子數爲(8)或(9)中的型式, 便保證贏了。我們列出一些必勝的(a, b)如表2。以a_n, b_n分別表(8)中對應的a, b之值,我們不用列(9)式中對應的a, b,因只是(8)中a, b 交換而已。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16
b_n	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26

表2. 一些必勝局的(a, b)值

例如,當你取完後剩$a = 3, b = 5$。若對方從第一堆中取1個,你可從第二堆中取4個;若對方從第一堆中取2個,你可從第二堆中取3個;若對方從第二堆中取1個,則你可從兩中各取2個;若對方從第二堆中取兩個,你便一次將兩堆的3個皆拿走,$\cdots$。

表2並不太難造,因它有一性質,即所有正整數皆會在此表恰出現一次, 且$a_n < a_{n+1}, b_n = a_n + n < b_{n+1}$。例如,若知$(a_1, b_1) = (1, 2)$,則$a_2$必爲3,否則3永遠不會出現。知道$a_2$後,$b_2 = a_2 + 2 = 5$,因此$a_3 = 4, b_3 = 7$。因爲6尚未出現,故$a_4 = 6, b_4 = 10$。同理$a_5 = 8, b_5 = 13$,餘類推。

另有一費氏拈局(Fibonacci Nim game), 其必勝法也是與費氏數列有關, 可參考吳振奎 (1993) pp.138-140 。

2.優選法

假若要製造一種產品,其產品之品質與製程中之溫度有關,且知在0°C至100°C間若有某一溫度會使產品品質最佳,問如何以最少的試驗次數,找到此最佳溫度的近似值?此問題即等價於設函數$f(x)$ 在$x \in [a,b]$間恰有一極大值,想以最少的試驗次數,找出極大值的近似值 。黃金分割在此問題中也扮演著關鍵的角色 。

首先當然可以由0°C開始,一度一度地做實驗,找出最佳溫度 。但有一更好的方法 。以線段$\overline{AB}$表0°C至100°C,取$\overline{AB}$的兩個黃金分割點C, D,即

$$\overline{AC} : \overline{AB} = \overline{BD} : \overline{AB} \doteq 0.618 \text{ 。}$$

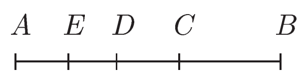


圖9.

所以D, C分別表約38.2°C及61.8°C 。

首先比較在溫度C與D何者較佳? 若D較佳, 則溫度C至B(即約61.8°C至100°C)便不用考慮了(當然若C較佳, 則溫度A至D便不用考慮了) 。現考慮溫度A至C, 仍取二黃金分割點,由於黃金比的性質, 故D即爲一分割點(習題第4 題, 可利用(3)) 。設另一分割點爲E 。然後再繼續比較D, E二溫度何者較佳 。如此進行下去, 每試一次淘汰一段, 且找到一新的點, 經過十餘次便可找到最佳溫度(近似值) 。若一度一度比較, 便要做101次試驗 。關於此法爲最優之證明可參考吳振奎 (1993) pp.124-128 。

3.在植物學上的費氏數列

費氏數列會在許多你想像不到的地方出現,並非僅出現於數學中 。我們先給一在數學中出現的例子 。

Pascal (1623-1662)爲著名的法國數學家 。在西元1654年11月23日,他受到聖靈感召,而決定致力於神學的工作,遂放棄了數學與科學, 否則他在數學上將有更偉大的成就 。他曾給出著名的Pascal三角形(Pascal triangle), 即$(a+b)^n$展開的係數。有趣的是, Pascal三角形的一些特定對角線的和構成費氏數列,見圖10。

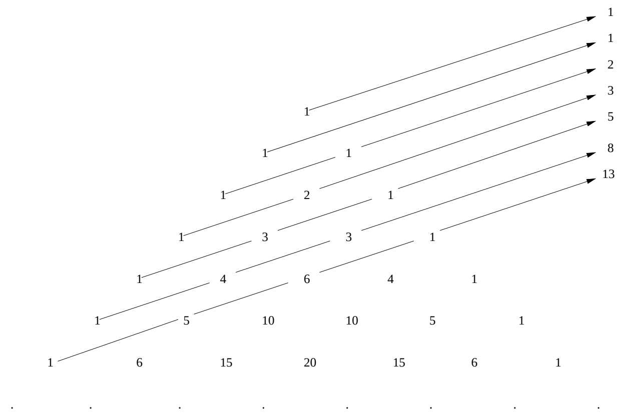


圖10. Pascal三角形與費氏數列

3.1棕櫚(Palm)葉片上的螺旋線

棕櫚乃泛指棕櫚目(Arecales)唯一的科, 即棕櫚科(Arecaceae)之顯花植物,共約2,600種。大多數的棕櫚葉片都很大, 沿著堅硬的莖, 一片一片接著成長(所謂螺旋葉序(spiral phyllotaxy))。葉子爲了進行光合作用, 如果上層的葉子能儘可能少遮蔽下層的葉子, 則陽光便較易照到下層的葉子。經過觀察任意兩片相鄰葉片, 其角度差約爲137.5°,此角度有何特殊呢? 一圓周有360°, $360^\circ - 137.5^\circ = 222.5^\circ$,而

$$\frac{222.5}{137.5} \doteq 1.618,$$

黃金數又出現了。

同一種植物的葉子在莖上排列,是有一定規則的。若將位於莖上同一垂線上的兩片葉子稱做一周期,則對同一種植物

$$W = \frac{\text{每一周期葉子繞的圈數}}{\text{每一周期裡的全部葉數}}$$

爲一定值。圖11給出一些例子。

圖11.榆樹$W=\frac{1}{2}$　櫻桃$W=\frac{2}{5}$　梨樹$W=\frac{3}{8}$

至於山毛櫸之$W=1/3$,柳樹之$W=5/13$。如果將這些分數排在一起,得

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{8},\frac{5}{13},\cdots。$$

另有些植物之W值為

$$\frac{2}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{8},\frac{8}{13},\frac{13}{21},\cdots。$$

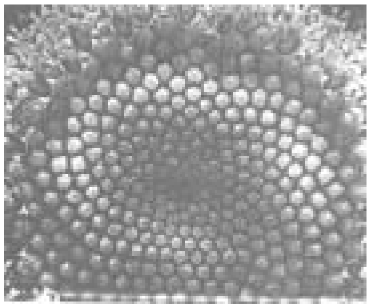
這是由於前述特殊的角度所造成的。第一個數列分子及分母皆為費氏數列,且若分子為F_n,分母為F_{n+2};至於第二數列分子若為F_n,則分母為F_{n+1}。

3.2向日葵(sunflower)花心的模式

過去這三、四十年有許多關於費氏數列的性質及應用之討論。除了因費波那契季刊可大量刊登這方面的論文(一個數列居然有如此取之不盡的題材可討論實在令人驚訝),另有不少雜誌也常刊登相關文章。其中有一問題已超過一百年,一直深深地吸引著數學家、工程師及生物學家去探討,就是如何給出向日葵花心的結構之模式。向日葵花心的角度及螺旋之美妙,令人嘆賞。過去由於數學家對植物成長的基本原理之了解不夠,無法對此問題深入探討。而大多數的生物學家又不明白大自然對植物生長所賦予的特殊的數學安排,因此也無法給出向日葵為何如此排列的正確解釋。

主要藉助費氏數列的性質, Mathai and Davis (1974)終於知道如何去造向日葵的花心(Davis and Davis (1989) pp.98-99有扼要的說明)。向日葵花心上的螺旋線分成二組,一組順時針旋轉, 另一組逆時針旋轉。兩

組中螺旋線的數目固定,順時針旋轉的通常爲21條,逆時針旋轉的則爲34條。除了向日葵外,松球的鱗片亦有兩組螺旋線(一組爲5,一組爲8);而鳳梨外皮的隆起六角形鱗片上,在一方向有一組較陡的13個螺旋,而在另一方向有一組較不陡的8個螺旋,至於水平方向則有5個螺旋,恰爲費氏數的連續三項。



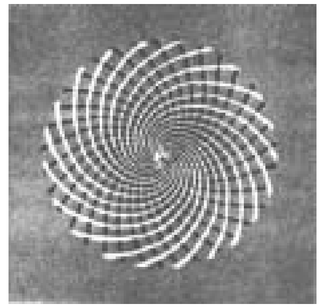


圖12.向日葵花心的兩組螺旋線,順時針旋轉之螺旋線數爲21,逆時針爲34

5 結語

費氏數列及黃金數在許多自然的現象中會出現,尤其是植物及其組織。在許多我們料想不到的地方都可能出現費氏數列及黃金數。有人在學了黃金分割後,替人照像時時,常堅持要將被照的人置於影像中的黃金分割點。有些教師上課時也喜歡站在教室正面的黃金分割點。當然你可以說這種所謂美觀、協調,其實是見仁見智(也有人認爲弦樂器在黃金分割處奏出的聲音最甜美)。但利用費氏數列或黃金分割的性質,一些重要的數學問題,如Hilbert的問題十,或有百年歷史的向日葵的成長模式,皆可解決。所以對自然界賜給我們一如此美妙的數列及數, 我們不得不五體投地的讚賞。本文只是一初步的介紹,費氏數列及黃金數尚有許多重要或有趣的性質,不論在植物學、動物學、生物學、物理、化學、音樂及藝術上,經常有關於費氏數列及黃金數的報導。據估計目前全世界有兩千人以上在研究費氏數列及黃金數。有興趣的讀者可參考吳振奎(1993)、Davis and Davis (1989),後者附有不少有意思的參考文獻,蔡聰明(1995)一文亦可參考。事實上由於這類題材之有趣且易懂,因此爲一些通俗性的雜誌所樂於刊登。如如科學的美國人(Scientific American),這一份月刊每期有一

數學消遣(Mathematical Recreations) 專欄。僅在1995及1996兩年便至少刊登Stewart (1995a)、(1995b)及(1996)三篇關於費氏數列及黃金分割的文章。

註. 西元1900年,德國大數學家Hilbert (1862-1943),在巴黎舉行的國際數學家會議中,提出了二十三個問題,揭開了二十世紀數學發展的一頁。他並沒有把費馬最後定理(Fermat's Last Theorem) 做爲一個問題提出,而把比它更廣的所謂丟番圖方程式的可解性列爲第十個問題。即尋求判定一任給的丟番圖方程式有無整數解的一般方法。英國數學家Alan Baker因研究此問題而獲西元1970年的費爾茲獎(Fields Medal)。西元1970年, 俄國數學家Matigasevic終於發現此問題的解之一般方法是不存在的。他利用費氏數列之一些性質,及數理邏輯的工具,以初等方法證出。詳情可參考胡久稔 (1993)。

習　題

1. 試證(5)式成立。

2. 試證費氏數列的性質5及性質7。

3. 設$\{F_n, n \geq 1\}$爲費氏數列。試證
   (i)F_n爲偶數,若且唯若n爲3之倍數;
   (ii)F_n爲3之倍數,若且唯若n爲4之倍數;
   (iii)F_n爲4之倍數,若且唯若n爲6且非5之倍數;
   (iv)F_n爲5之倍數,若且唯若n爲5之倍數。

4. 試證在圖9中,D爲$\overline{AC}$之一黃金分割點。

5. 有編號1至21之外表相同的21個球,重量分別爲$w_1, w_2, \cdots, w_{21}$, 且滿足$w_1 < w_2 < \cdots < w_a > w_{a+1} > \cdots > w_{21}$。如何以天平稱6次找出此最重的$w_a$?

6. 令$\phi = (1+\sqrt{5})/2$,$[\,\cdot\,]$表最大整數函數。
   (i)試證對任意正整數m, n,$[n\phi^2] \neq [m\phi]$;
   (ii)設$\alpha > 0$爲一無理數,n爲一正整數,求滿足$[k\alpha] < n$之正整數k之個數;

(iii)利用(i)及(ii),證明當$n = 1, 2, \cdots$時,$[n\phi]$及$[n\phi^2]$既不重覆且不遺漏地走遍所有正整數。

7. 令$U_1 = 1, U_2 = 4$, 且$U_{n+2} = U_n + U_{n+1}, n \geq 1$。計算$U_{n+1}/U_n$, 並問此比值自那一項開始後,至小數第3位皆爲1.618。

8. 試證費氏數列中不存在一末四位爲1996的項。

參考文獻

1. 李育嘉李育嘉(1995).從黃金分割談起。國立中山大學應用數學系承辦八十四學年度高雄區高中數學科學習成就優異學生輔導實驗計畫研習資料–演講講義。高雄市國立中山大學。

2. 林炳炎(1983).有關費氏數之無窮級數的分數和。數學傳播季刊,第7卷第1期,27-33。

3. 吳振奎(1993).斐波那契數列。九章出版社,台北。

4. 胡久稔(1993).希爾伯特第十個問題。九章出版社,台北。

5. 蔡聰明(1995).輾轉相除法、黃金分割與費氏數列(上)、(下)。數學傳播季刊, 第19卷第3期, 34-42, 第4期, 67-72。

6. Davis, T. A. and Altevogt, R. (1979). Golden mean of the human body. *Fibonacci Quarterly* 17, 340-344 and 384.

7. Davis, B. S. and Davis, T. A. (1989). Fibonacci numbers and the golden mean in nature. *Mathematical Scientist* 14, 89-100.

8. Long, C. T. (1981). The decimel expansion of 1/89 and related results. *Fibonacci Quarterly* 19, 53-55.

9. Mathai, A. M. and Davis, T. A. (1974). Constructing the sunflower head. *Mathematical Biosciences* 20, 117-133.

10. Pinkham, R. S. (1967). On the distribution of first significant digits. *Annals of Mathematical Statistics* 32, 1223-1230.

11. Stancliff, F. (1953). A curious property of a_{ii}. *Scripta Mathematica* 19, 126.

12. Stewart, I. (1995a). Daisy, daisy, give me your answer, do. *Scientific American* 272, No.1, 76-79.

13. Stewart, I. (1995b). Fibonacci forgeries. *Scientific American* 272, No.5, 82-85.

14. Stewart, I. (1996). Tales of a neglected number. *Scientific American* 274, No.6, 102-103.

15. Wythoff, W. A. (1907). A modification of the game of Nim. *Nieuw. Archief voor Wiskunde* (2), 7, 199-202.