鴿籠原理

黃文璋
國立高雄大學應用數學系

數學上有一很簡單的原理,但若運用得當,卻是一項利器。此原理只是在說下述情況:若有兩個鴿籠,而三隻鴿子要進去,則一定有兩隻鴿子要擠在同一籠子。或是若一郵差將101封信放進100個信箱,則有些信箱中至少有兩封信。你是否覺得此原理看起來毫不起眼, 不像是一很有用的工具?數學裡有些概念很難且不易懂。但大概少有如此簡易的一原理。Dirichlet (1805-1859)是最早利用此原理去證明一些數學上的結果的數學家。我們敘述此鴿籠原理(The Pigeon-HolePrinciple),或稱抽屜原理(Drawer Principle)如下: 若n個物品放進m個空格中,其中$n > m$,則必有一空格至少有二物品。

這實在是一很簡單的原理。在一團體中,若有370個人,則必有兩個人的生日相同。不用知道鴿籠原理,稍想一下便可明白。那怎會需要特別來介紹此"原理"呢?你一定很很納悶吧!此原理雖簡單,用途倒蠻廣泛的。我們先列出一些推廣的型式。

原則1.將超過n個物品,按任一給定的方式,分成n個集合,則至少有一集合中有兩個以上的物品。

原則2.將超過mn個物品,按任一給定的方式,分成n個集合,則至少有一集合中有$m+1$個以上的物品。

原則3.將無限個物品,按任一給定方式,分成有限個集合,則至少有一集合中有無限多個物品。

在此"超過"表"大於","以上"表"大於或等於"。原則2及3應都很容易

便可想通。底下我們給一些應用的例子。

例1.西元1959年,一向樂於提攜後輩的匈牙利著名數學家Erdös (1913-1996),聽到有一名叫Pósa的數學小神童,便登門拜訪他的家。

Pósa的父母請Erdös共同用餐。在喝湯時, Erdös想考考Pósa,便問他能不能證明:如果有$n+1$個小於或等於$2n$的正整數,則其中必有兩個是互質。

我們首先看一些特例。當$n=2$,自$1,2,3,4$中任挑3個數。若挑中1,自然沒問題, 因任一整數與1互質。若沒挑中1, 便只有2,3,4 。則2,3互質,3,4亦互質。其次設$n=3$,仍不用考慮挑中1的情況。則能挑出的有2,3,4,5; 2,3,4,6; 2,3,5,6; 2,4,5,6; 3,4,5,6等五組。易見在每一組中皆可找出兩數互質。隨著n的增大,$n+1$個數的組合數變大很多,要這樣一個個檢查,不但辛苦,也不可行了。當初Erdös曾花了十個鐘頭才想到一簡單的證明,但不到半分鐘, Pósa便給出了巧妙的解答。Erdös讚嘆之後,也系統地培養Pósa,而Pósa後來在圖論方面也有不錯的成就。

Pósa的解法是這樣的:取n個盒子,依序在第1個盒子放進1,2,第2個盒子放進3,4,餘類推, 第n個盒子便是放進$2n-1$及$2n$。若自n個盒子隨意地取出$n+1$個數,必有兩個數來自同一盒子。而同一盒子中的兩個數爲相鄰整數, 當然是互質的。

你看, 適當地利用鴿籠原理, 居然可如此簡單地解答此乍看之下頗複雜的問題。

日常生活中一些鴿籠原理之應用到處可見。例如, 若你有紅、藍、黑三雙襪子, 都混在一起,現在又停電。則只要抽出4隻襪子,其中必有一對顏色相同。其他在數學上亦有不少應用。

例2.在邊長爲1的正方形內,任意放五個點,則其中必有兩點之距離不大於$\sqrt{2}/2$。

[證明]:連接正方形對邊中點,因而得到4個大小相同之小正方形,邊長各爲$1/2$。在大正方形中放進五個點,必有二點在同一小正方形內(可能在邊界)。但在一小正方形內的二點,其距離必不超過對角線的長$\sqrt{2}/2$。

我們看到一幾何的問題卻也可以鴿籠原理來解。再給一例。

例3.在邊長爲1的正方形內,任意放進9個點,任三點的連線又構成一三角形(三點若共線,視爲一退化的三角形)。則必有一三角形的面積不超

過1/8。

[證明]:用三條平行於上下底邊的直線,將正方形分成四個大小相同的長方形。因$9 > 2 \cdot 4$,由原則2,若將9個點任意放進四個長方形,則必有$2+1=3$個點落在同一個長方形。設此三點為A, B, C,如圖1。

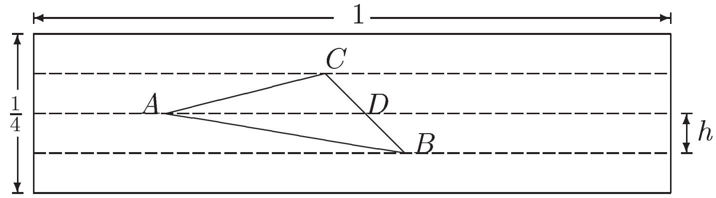

圖1.

易見

$$\begin{aligned} \triangle ABC\text{的面積} &= \triangle ABD\text{的面積} + \triangle ADC\text{的面積} \\ &\le \frac{1}{2}\cdot 1\cdot h + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(\frac{1}{4}-h) \\ &= \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

此處用到$AD \le 1$。

對上例你可否想出其他作法(仍用鴿籠原理)。

例4.在半徑為1的圓盤中任取7點,且其中任兩點的距離都不小於1,則7點中必有一點為圓心。

[證明]:如圖2,將圓盤分成6塊大小相同之扇形,令

$$S_1 = \text{扇形}OA_1A_2\text{且不含邊}OA_2,$$
$$S_2 = \text{扇形}OA_2A_3\text{且不含邊}OA_3,$$

S_3, S_4, S_5, S_6也類似地定義。則圓盤中除圓心外,每一點都恰屬於某一S_i。若7點中無一為圓心,則必有兩點落在同一S_i。但S_i中任兩點之距離皆小於1。因此7點不能皆不為圓心。得證。

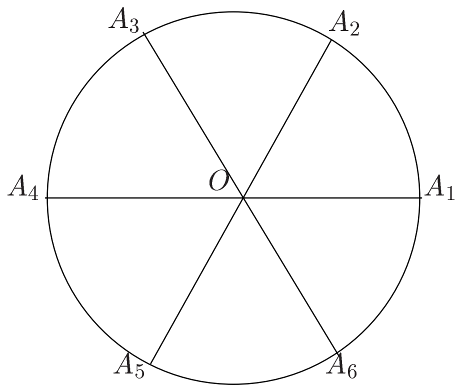

圖2.

例5.在某酒會中,有些人認識的人多,有些人認識的人少,但必有二人認識同樣多的人。

[證明]:設酒會中有n個人,則此n個人可分成$A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}$等$n$類。其中$A_i$表酒會中認識$i$位與會者的人之集合。可看出$A_0$與$A_{n-1}$必有一爲空集合。此因若$A_0$不爲空集合,則表示有一人跟其他人都不認識,因此沒有一人認識其他$n-1$個人,故A_{n-1}爲空集合。反之,若A_{n-1}不爲空集合,則表示有一人認識所有其他$n-1$個人,因此不可能有一個人跟其他人都不認識,故A_0爲空集合。現因n個人落在$n-1$個集合中(因A_0與A_{n-1}必有一爲空集合),故至少有一集合中有兩個人。而落在同一集合中的二人認識同樣多的人。得證。

例6.自$1, 2, \cdots, 100$中,任取51個數,則其中必有一數爲另一數的整數倍。

[證明]:首先任一正整數必可表示爲$a \cdot 2^n$的型式,其中a爲一奇數,n爲一非負整數。例如

$$5 = 5 \cdot 2^0, 12 = 3 \cdot 2^2\text{。}$$

現將$1, 2, \cdots, 100$分成下述50個集合:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{1, 1\cdot 2, 1\cdot 2^2, 1\cdot 2^3, 1\cdot 2^4, 1\cdot 2^5, 1\cdot 2^6\},\\
A_2 &= \{3, 3\cdot 2, 3\cdot 2^2, 3\cdot 2^3, 3\cdot 2^4, 3\cdot 2^5\},\\
A_3 &= \{5, 5\cdot 2, 5\cdot 2^2, 5\cdot 2^3, 5\cdot 2^4\},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$A_{26} = \{51\},$$
$$\vdots$$
$$A_{50} = \{99\},$$

也就是將有相同的a的數放在一起。由於a爲奇數,a必爲$1, 3, 5, \cdots, 99$等共50 個可能之一,所以有$A_1, A_2, \cdots, A_{50}$等50個集合,而$1, 2, \cdots, 100$此100個數,每一必恰落在其中一個集合。因此若自$1, 2, \cdots, 100$中任取51個數,必有兩數落在同一集合。而在同一集合中,大數必爲小數的倍數。證畢。

我們發現

$$\begin{aligned} 2 \times 35 &= 70, & 3 \times 259 &= 777, \\ 4 \times 1{,}925 &= 7{,}770, & 5 \times 14 &= 70, \\ 6 \times 1{,}295 &= 7{,}770, & \cdots &。\end{aligned}$$

這項發引伸出下述結果。

例7.對每一正整數n,必可找到一正整數m,使得mn全由0及7所組成。

[證明]:考慮數列$7, 77, 777, \cdots, 777\cdots7$(共有$n+1$個7)。將此$n+1$個數分別去除以$n$,餘數有$0, 1, 2, \cdots, n-1$等$n$個可能。因此其中必有二數除以$n$後有相同的餘數。設

$$\begin{aligned} 7\cdots7 &= an + i, \\ 7\cdots7\cdots7 &= bn + i。\end{aligned}$$

則$(b-a)n = 7\cdots70\cdots0$。證畢。

例8.老王每天最少喝一瓶啤酒,每周最多喝12瓶啤酒。試證在連續10周內,必有一段連續的日子恰好共喝19瓶。

[證明]:10周共有70天, 令b_i表至第i天所共喝的啤酒瓶數, $i = 1, 2, \cdots, 70$。則

$$1 \le b_1 < b_2 < \cdots < b_{70} \le 120。$$

令$c_i = b_i + 19$,則

$$20 \le c_1 < c_2 < \cdots < c_{70} \le 139。$$

因$b_1, b_2, \cdots, b_{70}, c_1, c_2, \cdots, c_{70}$共有140個數且介於1與139間。故必有二數相等,但所有b_i皆相異,且所有c_i亦皆相異。故存在m及n,$m > n$, 使得$c_n = b_m$而$c_n = b_n + 19$,故得$b_m = b_n + 19$。即得自第$n+1$天起至第m天共喝19瓶。

鴿籠原理尚有不少應用,有時可解很多初看之下與鴿籠原理毫不相干的問題。有興趣的讀者可參考謝聰智(1978)及其上所附的參考文獻。除了我們所舉的一些有趣的例子,有不少數學家均曾利用鴿籠原理解決數學上的一些困難的問題。

習 題

1. 試證自任一有6個以上成員的團體中, 任取6個人,則其中一定可找出3個人,或互相都認識,或互相都不認識。

2. 試證自任意連續$2n$個正整數中,任取$n+1$個數,必有二數爲互質。

3. 試證自1至$2n$中,任取$n+1$個數,則必有一數爲另一數的整數倍。

4. 試證自半徑爲1的圓周上任取$n+1$個點,則其中至少有兩點的距離不超過$2\sin(\pi/n)$。

5. 試證自一邊長爲2的正三角形內任取四點,則其中必有兩點的距離不超過$2/\sqrt{3}$。

6. 在一宴會中,來賓相互握手。試證
   (i) 其中至少有二人與同樣多的人握過手;
   (ii) 握手奇數次的人數必爲偶數;
   (iii) 若宴會中之總人數爲奇數,且每人至少握手3次,則其中至少有一人握手超過3次。

7. 某人每天最少喝一瓶啤酒,每周最多喝10瓶啤酒。試求在一段連續的日子裡, 必會恰共喝多少瓶?

8. 試證任意6個人中,必有下述二情況之一發生:有3個人互相不認識,或有3個人互相認識。

9. 以鴿籠原理證明每一有理數,必爲有限小數或循環小數。

10. 試證任意n個正整數中,必有某k個相鄰的數,其和爲n之倍數。

11. 設有三個整數a_1, a_2, a_3,而b_1, b_2, b_3爲其任一排列。試問$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$爲奇數或偶數?並證明之。又若改爲$n$個整數會如何?

12. 設有一5×5的棋盤。試證一棋子若依象棋馬的走法,自左上角出發,必無法在25步走遍每一位置。

13. 在一宴會中共有12人,其中有11個人與他人握手的次數(設任兩人最多只握手一次)分別爲11,2,3,2,8,10,7,7,8,7,2。問第12個人與他人握手的次數有那些可能?

參考文獻

1. 謝聰智(1978). 鴿籠原理。數學傳播季刊,第2卷第4期,43-48。