四色定理

黃文璋
國立高雄大學應用數學系

1 四色猜想

數學上有幾個著名的問題,其敘述簡單易懂,但卻有很長一段時間未被解出來。費馬最後定理(Fermat's Last Theorem)是其中一個, 另一個爲四色猜想(Four-Color Conjecture, 或稱四色問題 (Four-Color Problem)。

在繪製一地圖時(不論是在平面上或在球面上),若限制相鄰兩區域不能用同一顏色(此爲一合理的限制),則是否四種顏色就夠了呢?此處相鄰的區域是指有一共同的邊界。若二區域只在有限的點(如圖1之區域D及F)接觸,則用相異的顏色或相同的顏色皆可,有時一定要用到四種顏色,如圖1之區域A, B, C及D,便需用四種顏色。但如圖2兩種顏色便夠了。至於圖3亦是四種顏色便夠,各位可自行試試。

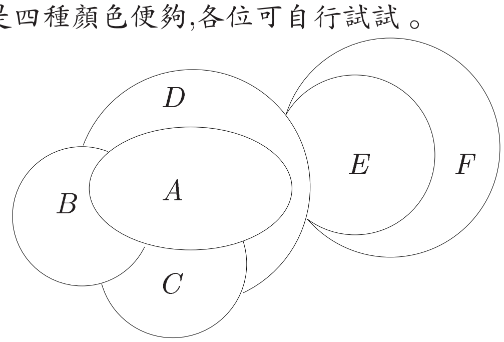

圖1.

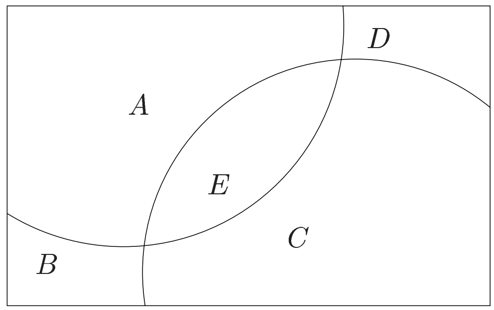

圖2.

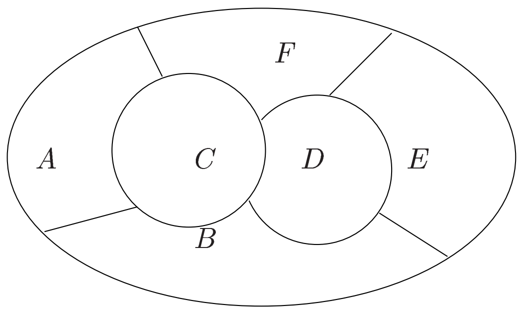

圖3.

此問題最先是在西元1852年,一位剛從倫敦大學(University of London) 畢業的Guthrie所提出的。他在繪製英國的地圖時想到此問題。他發現四種顏色有時是需要的,並猜測四種顏色永遠都夠,但他卻無法證明。他告訴他弟弟這個問題,是年10月23日他弟弟又拿去問倫敦大學的教授de Morgan (1806-1871)。De Morgan當天便寫信去問Hamilton (1805-1865),但Hamilton卻表示對此問題沒興趣。這之後de Morgan一直很認眞地思考此問題,並告訴許多他的朋友。西元1860年,在對一本“發現的哲學”的書評中, de Morgan首度將此問題公開提出。De Morgan去世後,西元1878 年,在倫敦數學學會(London Mathematical Society)的一會議上,Cayley (1821-1895)提出此四色猜想, 於是引起了數學界的重視。一年後,一位後來當上倫敦數學學會會長的熱愛數學的律師Kempe (1849-1922), 在一著名的美國數學期刊(見Kempe (1879)) 發表了一“證明”。當時一般數學家都接受了此證明,因此都以爲此問題已解決了。但在西元1890年, 一Durham大學(Durham University)的年輕數學教授Heawood

(1861-1955)指出該證明有一漏洞(見Heawood (1890))。Heawood畢生致力於四色猜想的研究,先後發表七篇這方面重要的論文。他七十八歲才退休,而在八十五歲時還向倫敦數學學會提出他最後一篇關於四色猜想的論文。經由修改Kempe的證明, Heawood可以證明五種顏色一定足夠(此五色定理的證明見Courant and Robbins (1941) pp.264-267)。但有好幾年的時間, Kempe證明的漏洞並不被視爲嚴重,且四色定理被認爲本質上是證出了(essentially proved)。年復一年,數學家終於體會到此問題之難度遠超過當初之想像。於是差不多當時所有著名的數學家都很可能曾涉足此問題。雖然經過許多數學家的努力,此問題卻仍留著下述型式:可證明五種顏色便足夠,且猜測四色足矣。但如同費馬最後定理,有相當長一段時間,此猜測既證不出,也造不出反例。

以事後諸葛論之,早期數學家的確是極低估四色猜想的困難。舉幾個例子來看。英國Clifton學院 (Clifton College)的校長(headmaster),每學期均會出給全校學生一挑戰的題目(challenge problem)。在西元1886年秋季,該校校長便出了四色問題。在題目之後,他還加上"答案不可超過一頁,或30行,圖也不能超過一頁"。此挑戰題目也登在教育期刊(Journal of Education),編輯還建議讀者們寄來解答。其中一份解答是來自當時爲倫敦的主教(bishop), 後來在西元1896至1902年間擔任Canterbury (英國著名教堂,爲中世紀英國之宗教聖地。在英國聖公會體制中, Canterbury 大主教(archpiship)是全英國的首主教和Canterbury大教區的大主教)大主教的Frederick Temple。他坦承,在某次聚會中,他允許自己的心智去思考此問題(可見在冗長的聚會中,即使主教,在肅穆的外表下,卻可能魂遊象外),並匆忙地寫下四色定理的"證明"。其"證明"有意思之處,是剛好透露出一般人對四色問題的誤解。Temple證明的依據是先建立地圖上不可能有五個區域,每一皆與其他四個相鄰(即沿著一共同的邊界)。此問題爲西元1840年慕比斯(Möbius, 1790-1868)所提出。且常與四色問題混淆。但此二問題確實是有關連的:若能在一地圖上找到五個區域,每一皆與其他四個相鄰, 則顯然要五個顏色才夠,因此四色定理不成立。但反過來,即使證出不存在五個這種區域,也並未能證出四色定理。圖4顯示該地圖至少需要四種顏色,但找不到四個區域,每一皆與其他三個區域相鄰。因此一地圖所需之顏色,可能大於此地圖上,那些每一皆與其他相鄰的區域中之最大區

域數目。故證出此最大數目最多爲4,並不表示地圖只需四種顏色。

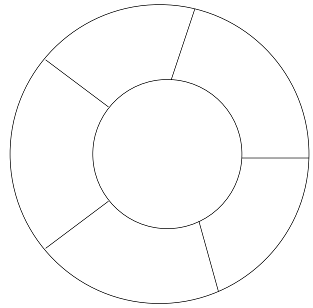

圖4.

另外,也有一故事流傳。Minkowski (1864-1909)爲十九世紀後期俄國一著名的數學家。有一天他剛進教室,就有一學生遞上一紙條,上面寫著“如果地圖上有共同邊界的國家須塗以不同的顏色,則繪一幅地圖只用四種顏色便夠了,您能解釋其中的道理嗎?”

Minkowski看後說“這就是四色問題,爲一著名的數學難題。其實,之所以一直沒得到解決,是因爲沒有第一流的數學家來解它”。說完拿起粉筆,當場開始解。你當然也猜到後果,直到下課,甚至直到Minkowski去世都沒能解出。

2 四色定理

進入二十世紀以後,四色問題的探討陸續有進展。先是在西元1939年,Franklin證明若有22個以下的區域,則四色便夠了。西元1940年,對36個以下的區域, Winn證出四色足夠。西元1968 年,對於40個以下的區域, Ore與Stemple 證出四色足夠。西元1975年,對於52個以下的區域可證出四色足夠。

爲什麼進展不快呢?主要的困難是檢驗的工作極爲複雜,即使藉助計算機仍要花上難以想像的時間。底下略微說明。

前面提過Kempe的證明雖有漏洞,但後人的證明仍是採用他的基本概念。Kempe採用的是歸謬法,他假設至少有一份地圖需要五種顏色,然後導出矛盾,因此得證四色便夠了。

Kempe先給正規地圖(normal map)下定義。一地圖若在任何一點最多只有三個區域相接,且沒有一個區域把另一區域完全包含,則此地圖稱爲

正規。每一地圖均伴隨一至少需要相同多顏色的正規地圖,且若能對正規地圖證出四色定理,則在一般地圖上的四色定理便成立。

Kempe正確地證明,在任一正規地圖中,必至少有一區域只有不超過五個相鄰的區域。即在正規地圖上,不會每一區域都有六個或更多的相鄰區域。若每一區域均是有零個或一個相鄰的區域,則兩色便足夠了,因此這種情況已不需要討論。除此之外,在每一正規地圖中,必有圖5中的某一圖樣(configuration)出現,分別表一區域有兩個、三個、四個或五個相鄰的區域。由於此四種圖樣必至少有一出現,因此稱爲不可避免(unavoidable)的圖樣。

Kempe試圖證明,在每一情況,皆可造出一新地圖,有較少的區域,但仍是五色便足夠。若能達到此目的,則稱此地圖爲可約的(reducible)。因Kempe證明的想法,就是設法找出一不可避免的可約圖樣組。若做得到的話,則矛盾便產生了。此因這麼一來,任給一五色地圖(five-chromatic map),皆可造出另一區域較少的五色地圖。因此經有限的步驟後,可產生一只有少於五個區域之地圖,但卻需要五個顏色,而此當然不對。

不幸的是, Kempe對一區域有五個相鄰區域之可約性(reduciblity)的討論並不正確。如前所述被Heawood於西元1890年指出。也就是Kempe並未成功地找到一不可避免的四色可約圖樣組。

所有正規圖的全體當然是一組不可避免的圖樣。但我們的目標是找較少的不可避免的圖樣組,這樣才能檢驗是否皆爲四色可約圖樣。直到西元1950年,數學家在找四色可約圖樣方面有不小的進展,但在找不可避免的圖樣組,卻沒什麼進展。即使對只有36個區域的地圖,根據估計,正規圖超過10^{36}種。而要找四色可約圖樣已極爲困難,更何況要驗證每一正規圖是否含有某已知的四色可約圖樣,所需耗費的時間是難以想像的。除非有好的方法找到一組數目不多的不可避免的圖樣組,然後才可能藉由計算機檢驗其四色可約性。

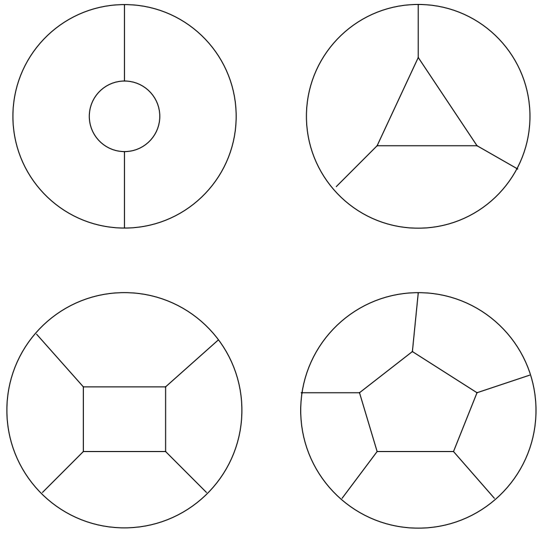

圖5.正規地圖中必有之圖樣

西元1976年7月22日,兩位美國伊利諾大學(University of Illinois) 的數學教授Appel及Haken宣佈他們解決了四色問題(見Appel and Haken (1977), 及Appel et al. (1977)),讓全世界數學家雀躍不已,自此四色問題也眞正成爲四色定理。爲慶祝此事,伊利諾大學在該校蓋郵資戳記的機器上加進"FOUR COLORS SUFFICE"一句。

Haken還是學生的時候,有一次在德國Kiel 大學(Kiel University)的一討論會上聽到德國數學家Heesch報告在四色猜想的成果, Heesch並提出一套放電理論(discharging theory, 其實此理論與電毫不相干),以尋找不可避免的圖樣組。Haken對Heesch的演講產生濃厚的與趣,便決定加入四色猜想的探索陣容。

經過多年的努力, Haken在四色猜想並未有突破性的成果。西元1972年5月,他在任教的伊利諾大學的一場演講中,提到四色猜想之解決不靠計算機是不可能的,但其中仍有許多難以克服的困難。當時的聽眾之一邏輯學家Appel教授隨即表示願與Haken合作。

中間的細節由於較技術性,我們略過不談。簡單地講, Appel與Haken仍是採用Kempe的想法, 設法找一不可避免的可約圖樣組。但當然不是只有如圖5中的四種簡單的圖樣,而是包含幾千種圖樣,其中大部分是很複雜,只

有藉由高速計算機才可能檢驗其可約性。

可以預期的,此難題的證明必定是很長的。打字後,總論的頁數便有100頁,細節也有100頁,再加上700頁的補充,以及1,200小時的計算機時間。要知在大學部裏接觸到的數學定理,其證明通常不超過兩頁。即使學術論文,其證明也少有超過20頁的。

Appel 與Haken簡化證明所需的程序,在最後的證明中,包括1,482個可約的圖樣,利用IBM 360 計算機,做了100億個判斷,花了1,200個小時,終於證出了四色定理(證明大綱可參考Woodall (1978/79)。另外,曹亮吉(1977)一文也頗值得參考)。Appel 與Haken也將他們的結果以淺顯的文字發表在西元1977年10月號的科學的美國人(Scientific American), 林克瀛譯(1981) 爲其翻譯稿。

Appel與Haken的證明是如此的長,因此也產生了兩個困擾。第一個是驗證不易。一個證明除非能被其他數學家檢驗,否則是沒有價值的。理想狀況是一個證明能被許多人檢驗,且愈快愈好。一個很長的證明,便可能要花很長的時間去檢驗,因此會讓大部分的人卻步(當然有時很短的證明也會有這種缺點)。這對需要用計算機來協助證明的更是如此。在計算機引進數學之前,每一個證明皆可由具備夠多數學工具的人檢驗。但現在卻要加上一高速的計算機。Appel當時估計, 他們證明過程的所有細節,若在一大機器上,約需300小時才能檢驗 完。但不會有太多數學家願意去試用那種計算機。另外,有人心存疑惑,檢驗要靠計算機, 難道計算機不會出錯嗎?

四色定理的證明中,計算機所扮演的角色,是異於以往的。在數學中有時我們藉助計算機來表示某些特別的數的近似值,或是來協助檢驗質數。但從來未有理論部分要依賴計算機的。不藉計算機,經由各種展式,我們仍能利用紙筆求出各種數的近似值(如求π到小數若干位)。而欲知某一正整數是否爲質數,慢慢去試除(當然很辛苦),也還是辦得到的。但在這類情況中,嚴密的數學證明都不假手機器。如今在Appel 與Haken的證明中,居然主要是以計算機來證明,此舉對一些哲學家及數學家所引起的震撼,是可以想像的。在西元1979年二月號的哲學期刊(Journal of Philosophy),針對Appel及Haken的證明,Tymoczko 在他的文章中寫著"若我們接受四色定理爲一定理的話,則我們就是將"定理"的意義改變,或甚至是將"證明"的觀念改變了"。

對哲學家而言,在證明中以計算機爲主要的工具,意味著降低數學證明的標準,其心理上是不易適應的。據Appel與Haken自己說,他們證明中的可約性的計算,是無法不藉計算機,而只用紙筆的。審查他們論文的專家,由他們完整的筆記,檢驗他們放電過程的正確性,但審查專家另寫一計算機程式以檢查他們可約性的計算。

對這種利用計算機來證明數學定理的討論,以及有關數學"證明"概念的討論,可參考Swart (1980), Davis and Hersh (1981) pp.380-390,及Rota (1990)等文。

冗長證明的另一困擾是,不太容易了解爲何結果會成立。即使沒用到計算機,若證明分太多步驟,也便不易看出結果何以是對的。習慣上,我們當然希望一定理能有一簡潔的以紙筆推導的證明,但這並非絕對必要。在數學上,提供定理的證明,只是爲了了解此定理到底在說些什麼的一手段。一闡釋得很清楚的證明,會使人很快地了解到此結果成立的眞正原因。也許我們無法要求每個定理皆有這類的證明,但尋求這類證明仍是值得的。所以簡化Appel及Haken的證明,或給另一完全不同但較清晰的證明,無可置疑是數學家會去嘗試的。但無論如何, Appel及Haken的貢獻是無與倫比的。自他們證出四色定理之後,地圖繪製者終於高興地知道,原來他們由經驗中所發現到的繪製地圖只需要四種顏色, 果然是正確的。

3 近期發展

Robertson等人自西元1993年起,因覺得Appel與Haken的證明太複雜,他們基於Appel與Haken 的想法,提出了簡化的證明,其中包含633個圖樣。他們宣稱其證明較易檢驗。只要願意的話,誰都可在幾分鐘內檢查。他們並將資料及程式放在網路上,詳情見Robertson et al. (1996)。

參考文獻

1. 林克瀛譯(1981).四色地圖問題的解決。數學傳播季刊,第5卷第4期,16-28。

2. 曹亮吉(1977).淺談四色問題。數學傳播季刊,第1卷第4期,14-27。

3. Appel, K. and Haken, W. (1977). Every planar map is four colorable. Part I. Discharging. *Illinois Journal of Mathematics* 21, 429-490.

4. Appel, K., Haken, W. and Koch, J. (1977). Every plannar map is four colorable. Part II. Reducibility. *Illinois Journal of Mathematics* 21, 491-567.

5. Courant, R. and Robbins, H. (1941). *What is Mathematics? An Elementary to Ideas and Methods.* Oxford University Press, London.

6. Davis, P. J. and Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience.* Birhaüser, Boston.

7. Heawood, P. J. (1890). Map-colour theorem. *Quartely Journal of Pure and Applied Mathematics* 24, 332-338.

8. Kempe, A. B. (1879). On the geographical problem of the four colours. *American Journal of Mathematics* 2, 193-200.

9. Robertson, N., Sanders, D. P., Seymour, P. and Thomas, R. (1996). A new proof of the four-colour theorem. *Electronic Research Announcements of the American Mathematical Scoiety* 2, No. 1,17-25.

10. Rota, G. C. (1990). The concept of mathematical truth. *The Mathematical Scientist* 15, 65-73.

11. Swart, E. R. (1980). The philosophical implications of the four-color problem. *American Mathematicial Monthly* 87, 697-707.

12. Woodall, D. R. (1978/79). The four-colour theorem. *Mathematical Spectrum* 11, 69-75.