歐拉數與圓周率

黃文璋
國立高雄大學應用數學系

1 歐拉數

本節我們考慮數列$\{a_n, n \geq 1\}$,

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, n \geq 1,$$

其中$n! = n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1, n \geq 1, 0! = 1$, 並擬證明其極限存在。此爲下述關於級數收斂的基本定理之一很好的應用例子。

定理**1.**設數列$\{a_n, n \geq 1\}$爲單調且有界, 則n 趨近至∞ (以$n \to \infty$表之)時, a_n趨近至某一有限的極限值。

在此若$a_{n+1} \geq a_n, \forall n \geq 1$,則$\{a_n, n \geq 1\}$稱爲單調漸增, 若$a_{n+1} \leq a_n, \forall n \geq 1$, 則$\{a_n, n \geq 1\}$稱爲單調漸減。單調漸增及單調漸減數列統稱單調數列。而若存在一正數K, 使得$|a_n| \leq K, \forall n \geq 1$, 則稱$\{a_n, n \geq 1\}$爲有界。又以

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

表$n \to \infty$時,$a_n \to a$(稱爲a_n趨近至極限值a)。

首先,對$a_n = \sum_{i=0}^{n} 1/i!$, 顯然$\{a_n, n \geq 1\}$ 爲單調漸增。其次$a_1 = 2, a_2 = 5/2$,而$n \geq 3$時,

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdots n}$$

$$
\begin{aligned}
&< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 1+\frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} < 3\,,
\end{aligned}
$$

即$\{a_n, n \geq 1\}$以3為一上界。故由定理1知, $\{a_n, n \geq 1\}$ 收斂至一實數。由於此極限值與圓周率π一樣在許多數學的公式中出現, 所以不可避免的需要給它一個特別的符號。歐拉(Euler, 1707-1783)似乎是第一個體會到此數之重要性的數學家, 他並以e 來表示此數。這可能是因他姓氏的第一個字母為e,也可能是他已將第一個母音a做為其他常數的符號, 所以採用第二個母音。無論如何後來符號e就被廣為採用, 後人並稱e為歐拉數(Euler's number) 以紀念他。e與π 被認為是數學中最重要的兩個超越數 (transcendental number, 若一數為$f(x)=0$之根, 其中f為某一至少一次的整係數多項式,則此數稱為代數數 (algebraic number), 否則稱為超越數)。由於e為$n \to \infty$時a_n之極限, 故e可表示為

(1) $$e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\text{。}$$

底下說明如何以a_n來求e之近似值,事實上a_n收斂至e的速度極快。仍藉助一幾何級數, 對任意$n > m$,

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_m + \frac{1}{(m+1)!} + \frac{1}{(m+2)!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\
&< a_m + \frac{1}{(m+1)!}\left(1+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{(m+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(m+1)^{n-m}}\right) \\
&< a_m + \frac{1}{(m+1)!}\frac{1}{1-1/(m+1)} \\
&= a_m + \frac{1}{m\cdot m!}\text{。}
\end{aligned}
$$

故對$\forall n > m$,

(2) $$a_m < a_n < a_m + \frac{1}{m \cdot m!}\text{。}$$

若令$n \to \infty$, 則上式導至

(3) $$a_m < e < a_m + \frac{1}{m \cdot m!}\,, \forall m \geq 1\text{。}$$

即對$\forall m \geq 1, a_m$ 與e 之差最多爲$\frac{1}{m \cdot m!}$。由於$m!$隨著m成長速度極快, 故a_m 爲e 之一很好的估計值。例如, 若$m = 10$, 則a_{10}與e之差小於10^{-7}, 因此經由計算a_{10}, 得到$e = 2.718281\cdots$。當然若m取大一些便可再更精確些, 如$e = 2.71828182845904523536028\cdots$。這是歐拉用筆算得到的$e$之小數前23位。歐拉22歲時, 在一篇論文中寫著"這個數的對數是1,以e命名之, 它的值爲2.71828$\cdots$, 它的常用對數爲0.4342944$\cdots$"。

e是超越數的證明(Hermite (1822-1901) 在西元1873 年證出), 超出這裡的範圍, 不過e 是無理數的證明(這是歐拉在西元1737年所證出), 可利用前述(3) 對e的估計式。設$e = p/q$爲一有理數, 其中p, q爲二互質正整數。又易見$q \geq 2$, 此因e介於2與3之間, 故e不可能爲整數。現由(3)式知

$$a_q < \frac{p}{q} \leq a_q + \frac{1}{q \cdot q!}\text{。}$$

將上式每項各乘以$q!$得

$$q!a_q < p(q-1)! \leq q!a_q + \frac{1}{q} < q!a_q + 1\text{。}$$

而由a_q之定義知, $q!a_q$爲一整數, 如此則得整數$p(q-1)!$介於兩相鄰整數$q!a_q$ 及$q!a_q + 1$ 間之矛盾結果。故e非爲有理數。

其次我們來看另一種常見的引進e的方法。考慮數列

$$b_n = (1 + 1/n)^n,\ n \geq 1\text{。}$$

則由二項式定理(Binomial Theorem)可得

$$\begin{aligned}
b_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\frac{1}{n})^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})\cdots(1 - \frac{n-1}{n}) \\
&< \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\
&= a_n < 3\text{。}
\end{aligned}$$

又由上面第三個等號之右側可看出, b_n的每一項對n漸增, 且b_{n+1}比b_n多一正的項, 故$\{b_n, n \geq 1\}$ 爲一漸增且有界之數列。故得證$\lim_{n\to\infty} b_n = b$存在。

接著證明$b = e$。對$l > n$, 仍由前述第三個等號之右側可得

$$b_l > 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{l}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{l}) \cdots (1 - \frac{n-1}{l})\ 。$$

若先固定n, 而令$l \to \infty$, 則上式左側趨近至b, 而右側趨近至a_n。即此時有$b \geq a_n$, 而又有$b_n \leq a_n$, 因此

$$b \geq a_n \geq b_n\,, \forall n \geq 1\ 。$$

令$n \to \infty$, 由夾擠原理(Squeezing Principle, 又稱夾擠定理或三明治定理(Sandwich Rule)), 便得$b = \lim_{n\to\infty} a_n = e$。也就是我們得到下述重要的極限結果:

$$\lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n = e\ 。 \tag{4}$$

定理**2.**(夾擠原理). 設有三數列$\{a_n, n \geq 1\}, \{b_n, n \geq 1\}, \{c_n, n \geq 1\}$。若$a_n \leq b_n \leq c_n, \forall n \geq 1$,且$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$, 則$\lim_{n\to\infty} b_n = a$。

我們發現e這個奇妙的數居然可用兩種完全不同的方式來導出, 事實上尚有許多方式皆可導出e。

2 圓周率

接著我們來看圓周率π。

自小學起, 我們就知道單位圓之面積爲π, 而半徑若是r, 則圓面積爲πr^2, 圓周長則爲$2\pi r$, π便稱爲圓周率。我們一直將此事視爲當然, 至於π值究竟是多少? 3.14 或3.14159等均爲常給的近似值。但若我們想要更精確的π 值, 以往可能就較不常提到該如何做了。事實上, 追溯到阿基米德 (Archimedes, 西元前287-212年) 的時代, 及中國三國時代魏國的劉徽(生平不詳, 大約西元260 年), 就已經知道如何用一套能計算π精確至任意位數的方法。值得一提的是, 南北朝時代的祖沖之(429-500),算出

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927\ 。$$

他並建議用分數355/113($\doteq$ 3.14159292)做爲π的近似值(精確至小數第6位), 並把它稱做密率。他也把π的另一近似值22/7($\doteq$ 3.14)稱做約率。在分母小於16,717 的分數中, 沒有比355/113更接近π了。這個發現較西方早了約1,000年, 因德國人Otho (1550-1605) 於西元1573年才發現此分數。我們並不確知祖沖之是怎麼算出來的, 但猜測他很可能是採用劉徽的割圓術, 如此則要用到$24{,}576 = 6 \cdot 2^{12}$(劉徽是由圓的內接正六邊形開始, 然後將邊數依序加倍,而得6,12,24,$\cdots$,$6 \cdot 2^{12}$,$\cdots$正多邊形) 邊的正多邊形, 且一開始之正十二邊形的邊長, 至少要正確至小數第14336位(見石厚高(1988)), 才能得到此精確度, 而那可是要花相當長的時間。

阿基米德以單位圓的內接正n多邊形的面積(以A_n表之)來逼近圓面積。則因每一小扇形的面積爲$\frac{1}{2}\sin(2\pi/n)$, 故

$$A_n = \frac{n}{2}\sin(2\pi/n)\,, \qquad (5)$$
$$A_{2n} = \frac{2n}{2}\sin(2\pi/2n)\ 。$$

再利用三角函數的公式, 只要$0 < x \le \pi/2$,

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x\,,$$
$$\sin x = \sqrt{(1-\cos 2x)/2}\,,$$

得

$$A_{2n} = \frac{n}{2}\sqrt{2 - 2\sqrt{1-(2A_n/n)^2}}\ 。 \qquad (6)$$

現考慮數列$\{A_{2^n}, n \ge 2\}$, 即邊數依序爲$2^2, 2^3, 2^4, \cdots$ 。也就是這些內接正多邊形的頂點, 爲不斷地取圓弧中點而得。由幾何中的結果立即看出, $\{A_{2^n}, n \ge 2\}$形成一單調漸增且有界的數列, 故其極限存在。底下我們證明此極限即爲圓面積, 亦即

$$\pi = \lim_{n\to\infty} A_{2^n}\ 。 \qquad (7)$$

先作單位圓之外切正2^n多邊形, 並以B_n表單位圓之外切正n多邊形之面積。

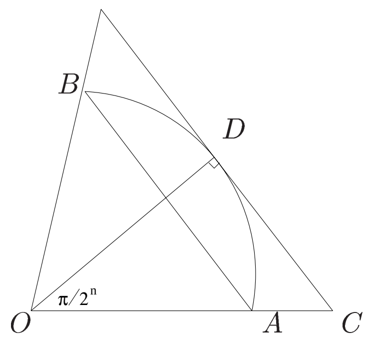

圖1.

則因$OD/OC = \cos(\pi/2^n)$, 故

$$\frac{A_{2^n}}{B_{2^n}} = \cos^2(\pi/2^n)\text{。} \tag{8}$$

不難看出$\{B_{2^n}, n \geq 1\}$形成一單調漸減且有界之數列, 故$\lim_{n\to\infty} B_{2^n}$存在。而$A_{2^n} < \pi < B_{2^n}, \forall n \geq 1$, 且$\lim_{n\to\infty}\cos^2(\pi/2^n) = 1$(見習題第1題), 故由夾擠原理得證(7)式。

(7)式提供一求π之近似值的步驟, 由$A_4 = 2$出發, 依序可求出$A_8, A_{16}, \cdots$。至於此法之精確性如何? 由(8)式得

$$A_{2^n} < \pi < B_{2^n} = \frac{A_{2^n}}{\cos^2(\pi/2^n)} = \frac{2A_{2^n}}{1+\sqrt{1-(A_{2^n}/2^{n-1})^2}}\text{。} \tag{9}$$

例如, 因$A_8 = 2\sqrt{2}$, 故

$$2\sqrt{2} < \pi < \frac{4\sqrt{2}}{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}\text{。}$$

另外, 亦可由單位圓之內接正多邊形的周長來逼近圓周長, 如此亦可得到π之一逼近法。即若以C_n表單位圓內接正n多邊形的邊長, 則先導出下述關係(見習題第2題)

$$C_{2n} = \sqrt{2-\sqrt{4-C_n^2}}\text{。} \tag{10}$$

再利用$C_4 = \sqrt{2}$, 依序可得

$$C_8 = \sqrt{2-\sqrt{2}}, C_{16} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$
$$C_{32} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}, \cdots\text{。}$$

一般則有

$$C_{2^n}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots}}}}, \tag{11}$$

其中有$n-1$個$\sqrt{\ }$, 且內接正2^n多邊形的周長(形成一單調漸增且有界之數列)之極限存在。仿上再導出外切正2^n多邊形之周長, 再利用夾擠原理即得

$$\lim_{n\to\infty}2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots}}}}=\pi, \tag{12}$$

其中有$n-1$ 個$\sqrt{\ }$ 。

上述兩種方式對於求π之值都是要不斷地開方, 在那缺乏計算機的時代, 實在是一件很辛苦的事。各位若學過積分, 便有其他更有效的方法來算π值 。不過這種將面積以小塊可求的面積和來逼近, 就形成積分概念的基礎。不但如此, 在阿基米德時代, 雖然他們已能算出不少圖形的面積或立體的體積, 但每一情形的突破, 雖在當時已覺是一大成就, 充其量卻也只是一個個案。積分學的威力就是有一套辦法來求面積及體積, 彷如郭靖得洪七公指點後, 不論遇敵爲何, 只要將降龍十八掌使一遍, 就可卻敵(見金庸 (1996))。

最後, π爲無理數是Lambert (1728-1777)在西元1761 年所證出。而西元1882 年, Lindemann (1852-1939) 證出π爲超越數 。

3 幾個表示π的公式

如前所述e與π爲數學中最重要的兩個常數。許多數學中的重要常數及重要的函數均與e或π 有關。各位在諸如微積分或統計學的課程中, 若稍留意, 便會體會到e與π 之重要性。利用微積分可得不少求π 的方式。如Gregory (1638-1675)在西元1671年給出一arctan$x$之級數表示法,西元1674 年, 萊布尼茲(Leibnitz, 1646-1716)由此級數得到一關於π之極簡潔的公式:

$$\pi=4(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots)\text{。} \tag{13}$$

不過上式右側級數收斂很慢, 也就是要計算很多項, 才能得到π的前幾位。例如, 即使要得到π的小數二位, 也要算數百項。下式爲一收斂較快

的式子:

$$\pi = 16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \cdots\right) - 4\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^2} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \cdots\right) \text{。} \tag{14}$$

西元1706年, Machin (1680-1751)利用上式第一個括號中的前70項, 及第2個括號中的前30 項,得到π的小數100位 。後來π的小數位數逐漸愈得愈多 。這裡面有個插曲 。西元1873年, Shanks (1812-1882) 得到π至小數第707位 。此記錄維持了好長一段時間 。可惜在西元1946年, Ferguson發現自小數第528位起有誤, 而在次年1月給了正確的小數710位的π值 。在同一月份Wrench給了一至小數808位的π值, 但Ferguson不久後便發現其小數第723位有誤 。西元1948 年1 月, Ferguson 及Wrench共同發表正確的π至小數808位的值 。這是計算機時代來臨前所得到的π 之最多的小數位數 。西元1949年起, 藉助計算機, 將π的小數位數愈推愈遠 。西元1973年, 法國數學家Guilloud 及Bouyer曾計算π值到小數一百萬位, 並出了一本專書刊載 。西元1995年10月, 日本人Kanada將π值計算到小數六十四億位 。西元1997年, Kanada與Takahashi 合作, 利用Hitachi SR2201, 只花了29小時餘, 將π 算至小數510億位 。

知道π之值至小數40位, 就足以計算銀河系的圓周, 且誤差小於一個質子的大小 。那為什麼要計算π值到這麼多位呢? 原因之一乃是為了求π值, 我們學會了很多用計算機來計算及檢驗大數目的方法 。原因之二為求π值是測試新計算機及訓練程式人員的好方法 。例如,在西元1986年, 一個π的計算程式測出CRAY-2計算機中的一台有問題, 見Bailey (1988) 。

另外, Wallis (1616-1703)亦給了一表示π的美妙公式:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7}\cdots\frac{2m}{2m-1}\frac{2m}{2m+1} = \prod_{m=1}^{\infty}\frac{4m^2}{4m^2-1} \text{。} \tag{15}$$

歐拉還發現

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \text{。} \tag{16}$$

各位如果對級數的收斂意義熟悉的話便不會驚訝, 否則會奇怪無限個數加起來, 其值卻不太大 。西元1731年歐拉計算出$\sum_{i=1}^{\infty} 1/i^2$至小數第6位,

由於此級數收斂不快,這種計算並不容易。不過在西元1735年, 歐拉進一步得到

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 1.64493406684822643647\cdots,$$

有小數20位。但歐拉並不滿意, 因他要的是確實的值。終於在同年, 他給了一頗有意思, 但其實不太嚴密的(16)式的證明(見Sharpe (1979/80))。(16) 式還有一些有趣的應用。例如, 在機率論的課程中, 各位將會學到, 隨機地取兩正整數, 它們會互質(即最大公因數爲1)的機率爲$6/\pi^2$,恰爲$\sum_{i=1}^{\infty} 1/i^2$之倒數。$\pi$的無所不在, 而不只簡單地代表圓周率, 各位應可相信了。一般而言

$$1+\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}+\cdots+\frac{1}{n^{2k}}+\cdots = B_k\pi^{2k},$$
$$1-\frac{1}{3^{2k+1}}+\frac{1}{5^{2k+1}}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)^{2k-1}}+\cdots = C_k\pi^{2k+1},$$

其中C_k, B_k皆爲有理數。例如

$$1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\cdots+(-1)^{-1}\frac{1}{(2n-1)^3}+\cdots = \frac{\pi^3}{32},$$
$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{n^4}+\cdots = \frac{\pi^4}{90}。$$

最後, 我們給印度的數學怪傑Ramanujan (1887-1920), 在西元1914 年所導出的公式(見曹宏熙譯(1989)):

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9{,}801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1{,}103+26{,}390n)}{(n!)^4 396^{4n}},$$

此爲一收斂至$1/\pi$極快的式子, 每加一項便約可使小數多正確8位。

對π值的公式有興趣的讀者, 可參考Bailey et al. (1997), 王天明、劉秀平 譯(1997) 爲其翻譯稿。Adamchik and Wagon (1997)針對前文又做了一些闡釋。至於Blatner (1997) 則載有許多關於π 的有趣故事。

4 自然成長與衰退

在微積分裡將會證明, 對每一實數x,

$$e^x = \lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n, \tag{17}$$

此爲(4)式之一推廣。(17) 式也常做爲一定義指數函數(exponential function) $f(x)=e^x$的方式。指數函數常可用來描述自然界中許多有關成長及衰退的模式。我們給下述幾個簡單的應用。

例**1.** 假設存一單位的錢在銀行且採複利計息, 利率設爲每年$100\alpha\%$。若每年計息一次, 則x 年後之本利和爲

$$(1+\alpha)^x 。$$

若每月計息一次, 則x 年後之本利和爲

$$(1+\alpha/12)^{12x} 。$$

若每日計息一次, 一年以365 日計, 則x 年後之本利和爲

$$(1+\alpha/365)^{365x} 。$$

若一年計息n 次, 則x 年後之本利和爲

$$(1+\alpha/n)^{nx} 。$$

讓n 一直增大, 理論上是可行的, 即在愈來愈短的時間內便複利一次, 則當$n\to\infty$ 時, 由(17)式知, x 年後之本利和趨近至$e^{\alpha x}$ (這裡面其實尚有些細節要留意, 你知道是什麼嗎?)。此處x 不需是正整數, 可以是任一正數。

不斷地複利給我們的感覺是利息會比一年計息一次增加許多。試舉一例。令$\alpha=0.1$, 且存一單位的錢。若一年計息一次, 則一年後之本利和爲1.1。但若不斷地複利, 則一年後之本利和爲$e^{0.1}\doteq 1.1051709$, 並不比1.1 大多少。若有一家銀行宣稱它年利率爲9%, 但每日計息一次, 另一家銀行爲年利率爲10%, 但一年計息一次。則第一家銀行一年後的本利和小於$e^{0.09}\doteq 1.0941742<1.10$。即第二家銀行仍是對存户較有利。若不經過這些比較, 通常我們會誤以爲不斷地複利, 就會使利息大幅度地增快。

有些生物的成長, 其實也是類似不斷地複利, 因此在時間t 該生物之數量$f(t)$, 通常有下述形式

$$f(t)=ce^{\alpha t}, \tag{18}$$

其中易見$c = f(0)$ 表在時間$t = 0$ 之數量。雖然生物的數量應是整數, 但當數量很大時, (18) 式仍是一個很好的表示法, 只有些微的誤差。而若在時間t 之數量有(18) 之形式, 則在時間t 之變化率$f'(t) = \alpha c e^{\alpha t}$,其中$f'$表$f$之導數(derivative)。因此

$$f'(t) = \alpha f(t), \tag{19}$$

亦即在任一時刻之變化率與現有量之比為一常數。

另一方面,利用微積分, 可證明若(19) 成立, 則$f(t) = ce^{\alpha t}$, 其中c 為一常數。所以此二模式是等價的: 變化率與現有量之比為一常數,及成長是以不斷地複利的方式。

有些放射性物質, 其衰退之變化也是與現有量成正比, 即(19) 式中之α為負值,因此在時間t 之量亦有(18) 的形式。

例**2.** 設某放射性物質之半衰期為1,600 年(即經1,600 年後其質量減半)。若一開始有150 克, 求t 年後之餘量及問經過多久質量成為30 克?

[解]:令$f(t)$ 表在時間t 之質量, 即$f(t) = 150e^{\alpha t}$。由假設

$$f(1{,}600) = 150e^{1{,}600\alpha} = 150/2,$$

因此$1{,}600\alpha = -\log 2$, 或$\alpha = -\log 2/1{,}600$。故t 年後

$$f(t) = 150e^{\alpha t} = 150e^{-t\log 2/1{,}600} = 150(1/2)^{t/1{,}600}\ 。$$

其次設$f(t) = 30$, 即$e^{\alpha t} = 1/5$。因此

$$t = -\frac{\log 5}{\alpha} = \frac{1{,}600\log 5}{\log 2} \doteq 3{,}715\ 。$$

註.對數函數(logarithmic function)與指數函數互為反函數,即$y = \log x$, $x > 0$, 若且唯若$x = e^y$。與指數函數成長極快恰好相反, 對數函數是一成長極慢的函數, 且其值域為$(-\infty, \infty)$。

例**3.**設銀行之年利率為5%, 且採不斷地複利, 問多久後本利和可達到原來的3倍?

[解]:即要求t 之值以滿足

$$e^{0.05t} = 3\ 。$$

或$t = 20\log 3 \doteq 21.9722$, 即約21.97 年後 。

例**4.**你想不想成爲一擁有一億元之富翁?如果你能找到一種每年投資報酬率爲15%的投資方式(如某種基金), 每月固定投資1單位的錢,則經三十年的複利計算後, 本利和將共有$\sum_{i=1}^{360} a^i$,其中$a = 1 + 0.15/12 = 1.0125$ 。留給你自己計算好了, 可得

$$\sum_{i=1}^{360}(1.0125)^i \doteq 7009.82 \text{ 。}$$

而30年共投資360單位的錢,故本利和約爲總投資額的19.47倍 。現若每月投資一萬五千元, 則30年後之本利和約爲一億零五百十四萬元 。諸位年輕的讀者, 只要持之以恆, 總會成爲一富翁的 。

5 結語

指數函數常可描述自然成長的模式, 其存在可說是非常自然的, 順乎天理不得不產生的 。這裡面又有一個關鍵的數在支配, 即e 這個超越數 。

另一個重要的函數爲三角函數, 這是周期函數的代表 。宇宙間除了生生不息的成長外, 又有諸如星球運轉 、潮汐等循環不已的現象 。三角函數在這裡便扮演著重要的角色 。超越數π 又是其中的樞紐, 它與e 的功能相呼應 。而三角函數與指數 間其實關係密切, 大家在微積分的課程中會學到 。

我們在欣賞文史名著後, 常會有“讀古人書想見其爲人” 的興嘆 。將來各位在對指數及三角函數愈了解後, 將會慨嘆大自然的奧妙, 賜給我們這兩個函數, 形而下方面是提高我們積分的能力, 形而上方面是提高我們欣賞數學的品味, 使我們遨遊於探索這些函數的優美性質的喜悅中 。

最後e與π之間是否亦有關連呢?在微積分裡會證明

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} \text{ 。} \tag{20}$$

也就是函數$f(x) = e^{-x^2}, x \in R$,其圖形與x軸間所圍之面積爲$\sqrt{\pi}$ 。由(20)式又可得對$\forall \mu \in R$及$\sigma > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}dx = 1 \text{ 。} \tag{21}$$

即知若令

(22) $$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, x\in R,$$

則$f(x)\geq 0, \forall x\in R$,且

(23) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 。$$

在機率論裡這種函數f(即$f(x)\geq 0, \forall x\in R$,且滿足(23) 式) 稱爲一機率密度函數(probability density function)。德國的10馬克紙幣是以高斯(Gauss, 1777-1855)爲人像,人像左側有一(22)式及函數f之圖形。誤差理論是高斯對機率論的主要貢獻。高斯發現(22)式定義出之機率密度函數,在誤差理論中扮演著一極重要的角色。在機率及統計裡一隨機變數(random variable), 若以(22)式中之函數f爲其機率密度函數,便稱具有常態分佈 (normal distribution)。此分佈之重要性不必贅言,在機率統計裡佔有獨尊的地位。而e與π又是其中的樞紐。

習　題

1. 試證$\lim_{n\to\infty}\cos^2(\pi/2^n)=1$。
2. 試證(10)式。
3. 試求$\lim_{n\to\infty}C_{2^n}$。
4. 求A_{2n}與C_n之關係, 並用此比較藉由A_n或C_n來逼近圓周率, 何者較佳?
5. 令D_n表單位圓之外切正n多邊形之邊長。求B_n與D_n 之關係。
6. 試證A_{2n}爲A_n 與B_n之幾何平均。
7. 設某銀行以複利每年計息一次。問年利率爲何, 可使存款8 年後, 本利和加倍?
8. 某人存款在一每季複利一次的銀行, 年利率爲8%。問何時其存款可加倍?
9. 某人分別存一萬元在A, B 二家銀行。A 銀行年利率爲4%,且每季複利一次, B 銀行年利率爲4.125%,且每年複利一次。問經過整數年後, 那一家銀行較有利?

10. 某放射性物質之半衰期爲1,600年。問間隔多久後,其質量成爲原來的1/8?

11. 在例4中,若每月投資一萬五千元,則四十年後之本利和爲何?

12. 在例4中,若投資報酬率改爲每年10%,則三十年後之本利和爲多少單位的錢? 四十年後呢?

參考文獻

1. 王天明、劉秀平譯(1997).圓周率的探索。數學譯林, 第16卷第3期,205-215。

2. 石厚高(1988). 祖沖之何以偉大?數學傳播季刊,第12卷第1期,81-82。

3. 金庸(1996). 射鵰英雄傳, 第三版。遠流出版社,台北。

4. 曹宏熙譯(1989). 雷馬紐冉(Ramanujan)和π。數學傳播季刊,第13卷第2期,70-79。

5. Adamchik, V. and Wagon, S. (1997). A simple formula for π. *The American Mathematical Monthly* 104, 852-855.

6. Bailey, D. H. (1988). The computation of pi to 29,360,000 decimal digits using Borwein's quartically convergent algorithm. *Mathematics of Computation* 42,283-296.

7. Bailey, D. H., Borwein, J. M., Borwein, P. B. and Plouffe, S. (1997). The quest for pi. *The Mathematical Intelligencer* 19, No.1, 50-57.

8. Blatner, D. (1997). *The Joy of* π. Walker and Company, Inc., New York.

9. Sharpe, D. W. (1979/80). Four theorems for a desert island. *Mathematical Spectrum* 12, 70-75.