

# 不世出的數學奇才歐拉

黃文璋

國立高雄大學應用數學系

歐拉(Leonard Euler)於西元1707年4月15日,生在瑞士Basel(又叫Basle)的一個普通家庭。他童年時在靠近Basel的鄉村Riehen渡過。他的祖先大都是工匠(craftsmen),但他的父親受過相當的教育,且為一新教徒(Protestant)的牧師。在求學期間,歐拉的父親曾上過Basel大學(Basel University)的名教授James Bernoulli (1654-1705)的課。Bernoulli一家是數學大家族(見蘇淳、劉鈍譯(1991)),至少出過八位著名的數學家。

歐拉的父親教他一些基本的數學,接著他自修了一段時間,然後他父親又為他請了一位私人教師。13歲時,歐拉進入Basel大學去學習一般的文理學科(General Arts,在那個時代13歲入大學並不足為奇)。由於學校的課程未能引起歐拉的興趣,他遂利用空閒探討數學。那時James Bernoulli的弟弟Johann Bernoulli (1667-1748),自西元1705年James Bernoulli去世之後,已繼之為Basel大學的數學教授。歐拉一方面很幸運地能得到Johann Bernoulli的特別指導,另一方面他的自修情況也不錯。西元1722年,15歲的歐拉得到文理學士(Bachelor of Arts)的學位,隔年他得到哲學碩士(Master of Philosophy)的學位。

由於順從他父親的希望,歐拉接著進入神學系(Department of Theology),去學習希伯來文(Hebrew)、希臘文及神學。但他志不在此。雖然他承諾終身要當個基督徒,但卻明智地拒絕走上當牧師之途(這不知道是不是宗教界的損失,但的確造福了數學界)。西元1725年,18歲的歐拉走回了探討數學與科學的路上。

在那個時代對一胸懷大志的數學工作者要找到一合適的工作並不容易。大學很少，並且都不大。以Basel大學為例，只有約100位學生以及不超過二十位的教師。西元1727年，歐拉爭取Basel大學一物理教師的職位失敗後(可能是因他太年輕而非能力不足)，他接受了那時剛由俄國的彼得大帝(Peter the Great)創立的聖彼得堡科學院(St. Petersburg Academy)的一項工作。差不多就在那時候，他在指數函數的研究，讓他引進了後來成爲數學中一重要的符號 $e = 2.718\dots$ 。

雖然他的新工作需要他學習生理學(physiology)，他仍能從事數學方面的研究，特別是在幾何學、三角學、分析、數論、力學、天文學及製圖方面，都是他專注的領域。

聖彼得堡科學院的功能之一是解決俄國政府在抽樣及其他技術方面所遭遇的問題。這因此使歐拉可將其天份用在各式各樣不同的問題，如製圖、造船、航海學等。他所做的工作中的任一單項，對一般人而言都是科學上的大成就，但對歐拉卻只不過是有如休閒娛樂而已。西元1741年，他才34歲便已發表了55篇以上主要是數學的論文，並另已完成了30篇。西元1735年，歐拉接到法國寄來的一道關於彈性力學的問題，希望有數學家能在幾個月內找到答案。結果他只花了三天便解出來。我們必須一提的是，雖然在西元1738年，因一場高燒，使他右眼失去視力，但對他的工作卻毫無影響。

在這一段早期的工作中，他給了一有趣的以他的名字命名的公式，即歐拉公式 (Euler formula):

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, x \in R。$$

由此立即得

$$e^{i\pi} + 1 = 0。$$

這是一個很有趣且典雅的式子，它包含了5個數：0、1、 $e$ 、 $\pi$ 、 $i$ 及二符號+、=。這五個數爲數學中最重要五個數，而這兩個符號也可說是數學中最基本的兩個符號。歐拉是一位想法很多，很會算又很會創造符號的數學家。以 $f(x)$ 表函數，三角形 $ABC$ 之三邊用 $a, b, c$ 來表示，和的符號 $\sum$ ，虛數單位的符號 $i$ ，以及 $e$ 、 $\log$ 都是他所創的符號。甚至以 $\pi$ 來表示圓周率，雖不是歐拉最先用的，但卻是在西元1737年歐拉採用後才廣爲流傳。他又

給出歐拉常數(Euler constant),即

$$(1) \quad \gamma = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} - \log k \right\} = 0.5772156649 \cdots .$$

如同 $\pi$ 及 $e$ , 在數學中 $\gamma$ 為一重要的常數。但不若 $\pi$ 及 $e$ , 我們無法以一簡單的公式來表示 $\gamma$ , 甚至 $\gamma$ 為有理數或無理數, 至今仍未知。(1)式提供一估計 $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ 之很好的方式, 即

$$(2) \quad 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \doteq \log n + \gamma .$$

由於俄國的政治氣氛逐漸動亂, 西元1740年, 歐拉欣然地接受普魯士(Prussia)國王腓特烈大帝(Frederick the Great)的邀請, 去幫助他們重整正衰退中的柏林科學界。於是在西元1741年, 歐拉帶著全家, 離開待了14年的聖彼得堡前往柏林, 任柏林科學院(Academy of Berlin)院長。但他是個精力充沛的人, 仍繼續為聖彼得堡科學院工作, 並逐漸使柏林學術活躍起來, 柏林科學界的名聲也變好了。

拓樸學(topology), 現已成為數學中一主要的領域, 在歷史上, 歐拉可說是第一位探討者。解決著名的七橋問題(Problem of the seven bridges)為一例。

歐拉主要是以拉丁文及法文寫作, 但也精通其他語文。他曾將一本英文的造砲學的書(B. Robins 著的New Principles of Gunnery)翻譯成德文。歐拉加上自己寫的關於彈道學(ballistics)的附錄“The Theory of Firing Projectiles”, 為原書的四倍厚。

在柏林待的25年間, 歐拉發表了275篇(部)論文及書, 另約有100篇已寫好的。論文的題材包羅萬象, 連牙齒的咬合理論(theory of toothed gears)都有。

西元1766年, 歐拉59歲那年, 他離開柏林, 回到聖彼得堡。抵達不久, 他的另一隻眼睛(左眼)患上白內障, 使他幾乎完全看不見。西元1771年, 經過一失敗的手術後, 使歐拉在他往後的歲月裡, 差不多變成全盲, 因此也幾乎不能讀及寫。雖遭此變故, 並不減緩他奔放的思想及著作的發表速度。他眼盲之後仍是腦思明快, 筆耕不停, 差不多與未全盲前發表一樣多的書及論文。他由學生及兒子擔任助手, 秘書協助抄錄的工作, 但研究的品質仍是第一流的。歐拉的記憶力一向驚人, 特別是在失明之

後。他能記得黑板上冗長且複雜的數學運算。又他的心算能力也是高人一等，常能藉心算更正別人筆算很大位數的錯誤。西元1772年，他時年65歲，雙目失明，但仍證出 $2^{31} - 1$ 為一質數(見“完全數與梅仙尼質數”一文)，而此為一十位數。這段期間他完成的著作包含：三冊光學的書(1769-1771)、三冊積分學的書(1768-1770)、兩冊他口授而由男僕抄錄之代數學的書(1770)、一冊775頁關於月球運轉的書(此書發表後長達一百年其內容尚未能完全被理解)、一冊海軍學生手冊(1773)、一冊建立保險原理之極重要的書(1776)。只有在他死前幾年，他才慢下來。

不少人都只能在不受干擾的環境下才能做研究，但歐拉小孩眾多，他習慣在吵雜中工作，思慮永遠保持清晰。西元1783年9月18日，歐拉像往常一般工作。那天下午他在研究氣球上昇的理論。晚餐後他寫下關於那時剛發現的天王星(Uranus)的軌跡之計算。然後他逗著孫兒玩，並一面喝茶，一不小心噙了一口，便停止了呼吸。他的朋友Marquis de Condorcet (1743-1794) 說“歐拉停止了生命也停止了計算(Euler ceased to live and to calculate)”。

歐拉是數學史上最多產的一位。在十八世紀的後四分之三世紀，全世界所發表的數學、數學物理及機械工程的研究中，約有三分之一是他寫的。自西元1729年起，一直到他死後五十年，聖彼得堡的著作中仍有一半是他寫的。自西元1746至1771年，柏林科學院的著作中也有一半是他寫的。他生前發表約560篇(部)重要的論文及書。歐拉死後不久，他的孫女婿Fuss (1755-1825)編輯歐拉的著作，收集了756篇文章，其中有355篇是在他生命的最後十年完成的，而那段時間他差不多是全盲。至於他所有的研究成果，自西元1909年起由瑞士自然科學會(Swiss Society of Natural Science)開始整理，收集了866篇他的著作，編輯成歐拉全集(Omnia Opera)，包含四開本大的29冊的數學，31冊的力學及12冊的物理及其他題材，共72冊，每冊有300至600頁，是十餘年前(他死後近兩百年)才出版的。此全集並不包含他為數不少的(約3,000封)信件，及留在聖彼得堡的文稿。

歐拉在數學上的貢獻，或許可由數學中有許多專有名詞(terms)、公式(formulae)、方程式(equations)及定理(theorems)以他命名，而略知一二。西元1983年，11月號的Mathematics Magazine為一紀念歐拉去世兩

百週年的專輯。其中共列出44個掛歐拉名字的名詞等。該專輯並引述Marquis de Condorcet 對歐拉的追悼文, 其中指出, 所有當時(十八世紀末)著名的數學家皆為直接或間接之歐拉的學生, 任何數學家很難不研讀歐拉的作品, 也很難不用到歐拉的結果。

自西元1996年1月起, 歐拉國際數學學院 (Euler International Mathematical Institute)也開始運作。此學院隸屬於俄國科學院 (Russian Academy of Sciences) 下之Steklov數學學院的聖彼得堡分部(St. Petersburg Division of the Steklov Mathematical Institute)。此學院舉辦學術研討會, 並提供各地數學家來此討論合作的設施。

這一位如此重要且被公認為十八世紀最偉大的數學家(及物理學家), 但卻不若牛頓 (Newton, 1642-1727) 及高斯(Gauss, 1777-1855) 等較為一般人所熟知。歐拉的生平可參考Boyer (1986)、Green (1982/83)及Siu (1995)。Siu (1995) 一文並列有許多關於歐拉的參考文獻。

## 參考文獻

1. 蘇淳、劉鈍譯(1991). Bernoulli們:一個學者家族。數學傳播季刊, 第15卷第1期, 47-56。
2. Boyer, C. (1968). *A History of Mathematics*, Chapter XXI. Wiley, New York.
3. Green, D. R. (1982/83). Euler. *Mathematical Spectrum* 15, 65-68.
4. Siu, M. -K. (1995). Euler and heuristic reasoning. In *Learn From the Masters*( Edited by F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson and V. Katz). The Mathematical Association of America, Washington, D.C.
5. *Mathematics Magazine* (1983), 56, 258-325.