極限的概念

黃文璋
國立高雄大學應用數學系

在數學中,尤其在微積分裡, 極限是一很重要的概念, 可以說整個微積分的基礎就建立在極限上。不過這並非一容易的概念, 數學家花了約兩百年, 一直到十九世紀, 對極限才有較清晰的認識, 雖然在這之前已不知算了多少極限。

極限與無限大(infinity或稱無限) 關係很密切, 討論極限必須從無限大開始。我們先定義一新的集合$\overline{R}$, 它包含實數集合、無限大及負無限大, 即

$$\overline{R} = R \cup \{\infty, -\infty\} 。$$

我們規定∞爲$\overline{R}$ 中之最大元素, $-\infty$爲$\overline{R}$中之最小元素。也就是說

$$-\infty < a < \infty, \ \ \forall a \in R 。$$

由於∞及$-\infty$皆非實數, 實數的運算對它們並不適用。在$\overline{R}$ 中我們定義下述關於∞及$-\infty$的運算。對$\forall a \in R$,

$$\begin{aligned}
&a + \infty = \infty, \ \ a - \infty = -\infty,\\
&\infty + a = \infty, \ \ -\infty + a = -\infty,\\
&a + (-\infty) = -\infty, \ \ a - (-\infty) = \infty,\\
&a \cdot \infty = \infty, \ \ a \cdot (-\infty) = -\infty, \ \ 若\ a > 0,\\
&a \cdot \infty = -\infty, \ \ a \cdot (-\infty) = \infty, \ \ 若\ a < 0,
\end{aligned}$$

$$\infty \cdot a = \infty, \ \ (-\infty) \cdot a = -\infty, \ \ \text{若 } a > 0,$$
$$\infty \cdot a = -\infty, \ \ (-\infty) \cdot a = \infty, \ \ \text{若 } a < 0,$$
$$a/\infty = 0, \ \ a/(-\infty) = 0,$$
$$\infty + \infty = \infty, \ \ -\infty - \infty = -\infty, \ \ -\infty + (-\infty) = -\infty,$$
$$\infty \cdot \infty = \infty, \ \ (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty,$$
$$\infty \cdot (-\infty) = -\infty, \ \ (-\infty) \cdot (\infty) = -\infty \text{ 。}$$

這些式子不可與實數的運算比照, 否則由$\infty + \infty = \infty$,利用消去律便得$\infty = 0$之錯誤的結果。不過我們並不定義諸如

$$\infty - \infty, \ -\infty + \infty, \ 0 \cdot \infty, \ \frac{\infty}{\infty}, \ \frac{-\infty}{-\infty},$$

因不論怎樣定義都不恰當, 在微積分的課程中會仔細討論這類問題。對∞或$-\infty$, 上述定義的這些運算有助於大家對它們的了解, 也就是實數中的元素沒有比∞再大了, 也沒有比$-\infty$再小了。

無限大通常我們也不去比大小了,能比出大小就不叫無限大了。在小學生初學數學時, 他們若要比較兩個數字的大小,譬如說3 與4 (如3個蘋果與4個蘋果何者較多), 往往先畫3 個圓圈, 再畫4 個圓圈, 然後互相消去, 最後4 個這邊剩下1 個, 所以4 比3 大, 以$4 > 3$ 表之。有限大的數都可用這種方式比較大小。至於無限大如何比較? 用集合來說明是一很好的方式。如正整數的集合與正偶數的集合, 即

$$\{1, 2, 3, \cdots\} \text{ 與 } \{2, 4, 6, \cdots\},$$

那個集合元素較多? 許多人也許會猜前者較多, 因後者爲前者的子集。但對一個二年級剛學乘法的小學生, 由$2 \times 1 = 2, 2 \times 2 = 4, 2 \times 3 = 6, \cdots$, 他可能認爲二集合之元素一樣多。因此對無限集合顯然並不能光憑直觀而判定大小。

爲了解決此問題, 我們引進一集合“等價” 的觀念。設有A 及B 二集合, 若存在一由A 至B 之1−1且映成之對應, 便稱A 與B 等價(equivalent), 以$A \sim B$ 表之, 且說A 與B 有同樣的基數(cardinal number)。若$A \sim C$, 其中C 爲B 之某一子集, 且B 與A 之任一子集均不等價, 便稱B 的基數

比A 還多。不難看出若A 及B 均爲有限集合, 則A 與B 等價, 若且唯若A 與B 的元素一樣多; 而B 的基數比A 還多, 若且唯若B 的元素個數比A 還多。所以對有限集合, 基數大小就與兩數字大小之概念是相同的。

若A 爲一有限集合, 而B 爲A 之一眞子集, 則A 與B 不可能等價, 但若A 爲無限集合便有可能了。底下給幾個例子。

例**1.** 正偶數的集合A 與自然數的集合B 等價。此因對$\forall n \in A$, 令$f(n)= n/2$, 則此爲一由A 至B 之1−1 且映成之對應, 故A 與B等價。

例**2.** 整數的集合C 與自然數的集合B 等價。此因對$\forall n \in C$, 若令

$$g(n) = \begin{cases} 2n & , \quad 若 n > 0, \\ 1-2n & , \quad 若 n \le 0, \end{cases}$$

則得一由C 至B 之1−1且映成之對應, 故C 與B 等價。事實上,由C至B之1−1且映成之對應並不唯一,讀者不妨自己再試找一些。

與自然數等價的集合便稱爲可數的(countable), 不過有些書把有限的集合也稱可數的。所謂可數, 便是可以有個方式依序去數(不一定要按大小), 且一個都不會漏掉。與1 對應便是第一個要數的, 與2 對應便是第二個要數的, 餘類推。一無限集合, 若不爲可數的, 便稱不可數的(uncountable)。

例3. 有理數的集合是可數的。任二有理數間有無限多個有理數(爲什麼?), 因此無法像整數般排列出來。也就是給定一有理數, 無法指出與它最接近的下一個有理數是什麼? 不過我們還是有辦法去數。首先我們來數正有理數, 正有理數即分數, 可寫成a/b 的型式, 其中a 與b爲互質正整數。每列按照分母是$1, 2, 3, \cdots$,依序寫出來便得

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \rightarrow & \frac{4}{1} & & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & & & & \\
\frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{4}{4} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & & & & & & \\
\frac{1}{5} & & \frac{2}{5} & & \frac{3}{5} & & \frac{4}{5} & & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots
\end{array}
$$

圖1.正有理數之數法

當然要去除分子與分母不互質的, 如$\frac{2}{2}, \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \cdots$ 等。我們以箭頭方向表示數的順序, 若有分子與分母不互質的便跳過去。因此依序要數的是$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots$, 即得證正有理數的集合是可數的。特別要留意的是, 如果先數第1列, 則第2列以下便無法數到。但等價的定義是説只要找到一種對應的方式即可(再強調一次, 不一定按大小), 找到錯的一種, 不表示其他對應就不行。

其次來看有理數爲可數的。我們可將負有理數也如正有理數一般排出。然後先數0, 再一個正有理數、一個負有理數的依序地數(且在正有理數中就照圖1排列的箭頭順序, 負有理數也類似)。

有理數給我們的感覺是非常多的, 所謂有稠密性。但上例指出有理數與自然數此二集合仍等價。也就是雖有理數的集合看起來比自然數多很多, 但我們卻將它們歸於同一等級的無限多。現在的問題是, 是否有一無限集合與自然數的集合不等價? 也就是其基數比自然數還多。

例**4.** 實數集合不可數。我們只要能證明區間$(0,1)$ 間的實數不可數便夠了。$(0,1)$ 間的實數即純小數, 假設此集合可數且依序爲$s_1, s_2, \cdots$。對$\forall n \geq 1$, 將第n 個小數s_n 寫成一無限小數, 即$s_n = 0.u_{n1}u_{n2}u_{n3}\cdots$, 其中$u_{n1}$ 爲s_n 的小數第一位, 餘類推。此處爲了方便對每一有限小數, 我們以一循環小數來表示,如2/5 我們寫成0.3999$\cdots$。現在造一純小數$y = 0.v_1v_2\cdots$, 其中

對$\forall i \geq 1$,

$$v_i = \begin{cases} 1, & 若 u_{ii} \neq 1, \\ 2, & 若 u_{ii} = 1 。\end{cases}$$

則y 與s_n 的第n 位小數不相同, 因此$y \neq s_n, \forall n \geq 1$。換句話說我們數漏了$y$, 故集合$\{s_1, s_2, \cdots\}$ 與自然數的集合不等價。亦即實數集合不可數。不難看出自然數的集合與實數集合之一眞子集(取自然數即可)等價, 因此實數集合的基數比自然數集合的基數大。

例**5.** 實數集合與區間(0,1)間的實數集合等價。將線段(0,1) 在1/3及2/3處垂直折起。由圖2便可看出本結果成立。

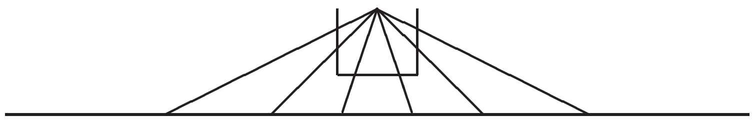

圖2. 實數集合與區間$(0, 1)$ 等價

由圖3又可看出任二區間$[a, b], [c, d], a < b, c < d$,等價。

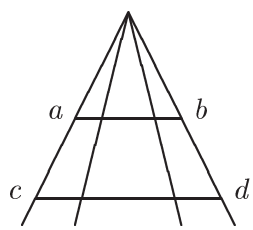

圖3. 任二區間$[a, b]$, $[c, d]$ 等價

事實上, 對$a < b$, 區間(a, b), $[a, b)$, $(a, b]$及$[a, b]$皆等價, 只是其證明不是很容易, 我們留在習題(第8題)。證出此結果後, 便得任意形式的區間皆等價。

例**6.** 代數數(algebraic number)的集合是可數的。所謂代數數(見"實數的介紹"一文),即爲某一

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{1}$$

之根,其中$n \geq 1, a_0, a_1, \cdots, a_n$爲整數,且$a_n \neq 0$。

Cantor (1845-1918) 有如下的證明。對一如(1)式之整係數代數方程式, 令

$$h = |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0| + n$$

表該式之高度(height)。對一固定的高度h, 只有有限多個類如(1)之方程式。而每一個一元n次方程式又最多只有n個相異根。故對一高度h, 只有有限多個代數數, 其所滿足之方程式之高度爲h。因此, 若將所有代數數依照其滿足的方程式的高度列出, 先列高度1, 然後2, 依此類推, 則可看出代數數的集合是可數的。

代數數給我們的感覺又比有理數多的太多, 但它們卻仍是可數的。因此必有非代數數, 即超越數(transcendental numbers)的存在。由此亦可看出超越數的集合是不可數的。

大家可能會好奇是否有比實的超越數的集合還大, 而比實數集合小的集合? 集合論中有一重要而基本的猜測, 即任一實數的無限子集合, 必與實數全體或有理數全體二者之一有共同的基數。這就是著名的連續統假設(Hypothesis of the Continuum), 此猜測究竟是對還是錯, 至今乃懸而未決。若此猜測爲眞, 則實超越數之集合與實數集合便等價。另外, 尚值一提的是,至此所討論的無限集合, 不是與自然數等價,就是與實數等價。事實上(見習題第9題)仍有許多既不與自然數也不與實數等價的集合。

上面幾個關於集合的例子, 希望能讓大家對無限大有些了解, 至少對無限大要小心處理, 不能光憑直覺。

多年前有一份雜誌在四月號登了一個愚人節的專欄, 其中有“$N = e^{\pi\sqrt{163}}$ 爲一整數”。乍看之下你一定不相信, 但若想用桌上型計算機來算又行不通, 因$e = 2.71828\cdots, \pi = 3.14159\cdots, \sqrt{163} = 12.8\cdots$, 所以$N$ 約爲$e^{40.2}$, 其整數部分有18 位, 超出一般小計算機的位數。事實上N的20 位有效數字爲

$$N \doteq 262{,}537{,}412{,}640{,}768{,}743.99\text{。}$$

若再精確些, 求25 位, 得

$$N \doteq 262{,}537{,}412{,}640{,}768{,}743.9999999\text{。}$$

小數的前7 位皆爲9, 這便引起我們的好奇,因若小數部分皆爲9, 即$0.999\cdots$, 此數即等於1(見稍後例10)。結果我們發現N 之小數前12 位皆爲9, 第13 位才出現2。因此N 不爲整數, 雖然N 與一整數的差距很小, 但仍不夠小。此數最早是印度數學怪傑Ramanujan (1887-1920)所算出。他對數字的敏銳,實令人驚嘆(見“完全數與梅仙尼質數”一文)。

再看另一引人迷惑的問題。

例**7.** 直角三角形兩股和等於斜邊長。這件事你可能絕不相信, 多年的數學訓練, 使你認爲再怎麼說也不可能有這種事發生。

任給一直角$\triangle ABC$, 連接三邊中點而得二直角三角形(如圖4)。此二直角三角形的兩股和相加等於原$\triangle ABC$ 的兩股和。然後分別再將此兩個直角三角形$\triangle AFE$ 與$\triangle EDC$ 的三邊中點相連, 而得到四個直角三角形, 它們的兩股和相加仍等於原$\triangle ABC$ 的兩股和。如此一直進行下去, 小直角三角形的兩股形成一折線, 其長度和一直等於原$\triangle ABC$ 的兩股和, 當分得很細時, “感覺上” 折線與斜邊似乎重疊了, 因此長度也似應愈來愈接近才對。

你當然還是不信, 因這違反你原先所熟知的“三角形兩邊和大於第三邊” 的事實。但若你沒學過此事實, 是否會接受上述證明呢? 很可能是會的, 見下例。

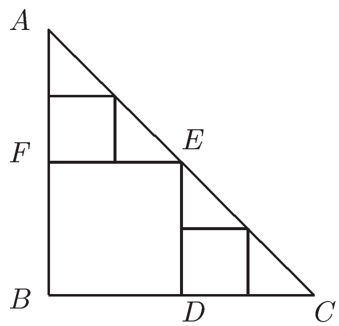

圖4.

例**8.** 給一半徑爲1 之單位圓, 想求圓周長。先作內接正四邊形,此四邊形之邊長可算出。再取四弧中點, 連接而得正八邊形, 一直細分下去, 可得內接正2^n 多邊形。當n 很大, “感覺上” 多邊形與圓周幾乎要重疊, 所以只要知道內接正多邊形的邊長和, 便可以其“極限值” 當做圓周長。

我們知道上述求出的圓周長爲正確的, 與前例相比較, 可知不能光憑感覺行事, 否則有時得到正確的答案, 有時便錯了。事實上我們還要作圓的外切正2^n 多邊形, 則因圓周長介於外切與內接正多邊形的邊長和之間, 且後二者的差距隨著n 的增加可“任意接近” 至0, 也就是差距的極限值爲0, 所以才能用內接正2^n 多邊形的邊長和的極限當做圓周長。

附帶一提, 單位圓之內接正2^n 多邊形的邊長為

$$a_n=\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}_{n-2\text{ 個}\sqrt{\ }}}\ 。$$

中學數學裡有時會出現這類問題: 求$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots}}}}$。一般的作法是令

$$x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots}}},$$

則

$$x=\sqrt{2+x},$$

所以$x=2(-1$ 不合)。這個答案是正確的, 但做法並不算正確, 或者說是不完整的。只要由

$$\begin{aligned} y &= 1-1+1-1+1-1+\cdots \\ &= 1-(1-1+1-1+\cdots) \\ &= 1-y\,, \end{aligned}$$

因此$y=1/2$, 此錯誤的結果便可知前述求x 的"方法" 並不正確。你知道尚須補充那些步驟嗎?

在例7 中, 每一小直角三角形兩股和與其斜邊長之差距很小, 但因直角三角形的個數也很多, 而很多很小的量相加, 其和卻不一定很小。例如,

$$\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n\text{ 個}}=1,$$

$$\underbrace{\frac{\sqrt{n}}{n}+\frac{\sqrt{n}}{n}+\cdots+\frac{\sqrt{n}}{n}}_{n\text{ 個}}=\sqrt{n},$$

第二個和隨著n 的增加也一直增大。所以我們不但對"很大"要小心處理, 對"很小"(指絕對值) 也不可等閒視之。

再給最後二例。

例**9.** 本例也常讓初學者困惑。設$f(x)=x^2$, 求h 趨近至0 時,

$$\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

之極限。經化簡得

$$\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\frac{2xh+h^2}{h}=2x+h, \tag{2}$$

所以極限自然是$2x$。問題便產生了, 在(2) 中,既然是除法, 所以分母h必不爲0, 但若宣佈極限是$2x$,除非把h視爲0, 否則$2x+h$必不等於$2x$。這究竟是怎麼一回事?

例**10.** Zeno詭論。Zeno (西元前495-435年) 爲古希臘之一著名哲學家, Achilles 爲荷馬(Homer)史詩Iliad 中之希臘英雄, 有不少電影中都有他的故事(如傑遜王子戰群妖)。在希臘神話中, Achilles的母親爲海神(Thetis), 當他出生時, 其母親將他倒提浸入冥河(Styx)中, 因此他全身除了腳後跟外刀槍不入。所謂Achilles heel 其意即爲唯一之弱點。

有一天Zeno 對Achilles 說"你雖孔武有力, 但若與烏龜賽跑一定輸"。Achilles 說"我又不像兔子跑一半會睡著, 怎可能輸?"Zeno 說"若你先讓烏龜跑一小段, 你便追不上它"。Achilles 當然不信, 底下是Zeno 的解釋。

假設Achilles 的速度爲每秒10 公尺, 烏龜的速度爲每秒1 公尺(古希臘的烏龜可能跑得快些), 又設讓烏龜先跑10 公尺。設一開始烏龜在T_0, Achilles 在A_0。

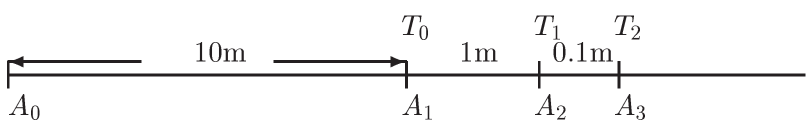

圖5.

當Achilles 由A_0 追到$T_0=A_1$ 時花1 秒, 此時烏龜已跑到T_1。Achilles 插嘴說"那我不是一步就追上了?"Zeno 說"不, 你必須先跑到T_1, 而當你跑到T_1, 需花$\frac{1}{10}$ 秒, 此時烏龜已到T_2, 你們差距$\frac{1}{10}$ 公尺"。Achilles 說"那我一摸就摸到了"。Zeno 說"不行, 你必須先到T_2, 需花$\frac{1}{10^2}$ 秒, 而烏龜也多跑了$\frac{1}{10^2}$ 公尺, 到達T_3。如此, 當烏龜跑到T_n 時, 你就落後$\frac{1}{10^{n-1}}$ 公尺, 因

此一直有一差距, 你是永遠追不上它的”。Achilles 垂頭喪氣地走了, 居然連一隻烏龜也追不上, 但數學的證明又似乎無懈可擊, 若繼續爭辯只有凸顯自己數學不夠好。

事實上, 當烏龜跑到T_n 時, 所共花的秒數爲

$$1+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10^{n-1}}=\frac{10}{9}(1-\frac{1}{10^n})\leq\frac{10}{9},$$

而此時Achilles與烏龜二者之差距爲$\frac{1}{10^{n-1}}$ 公尺。當“n 趨近至∞ 時”, 即在第$\frac{10}{9}$ 秒, Achilles 可追上烏龜。

與本例相近的一個問題是$0.\bar{9}=0.99\cdots$與1是否相等? 不少人認爲$0.\bar{9}$較1爲小, 甚至還有人以數學歸納法證明$0.\bar{9}<1$,其法如下:

令A_n表小數點後面有n個9且此數小於1的敘述。當$n=1$時,$0.9<1$,故A_1 成立。設A_k成立,即

$$0.\underbrace{99\cdots99}_{k\text{ 個}9}<1\text{。}$$

則當$n=k+1$時,

$$0.\underbrace{99\cdots99}_{k+1\text{ 個}9}<1\text{。}$$

也成立。即得證對$\forall n\geq1, A_n$成立,因此$0.\bar{9}<1$。

你知道上述討論錯在何處嗎?其實欲知$0.\bar{9}$與1何者爲大, 不妨減減看,兩數相減若爲0,則二數便相等。

$$\begin{array}{r}1\\-0.99\cdots\\\hline0.00\cdots\end{array}$$

有些人會堅持認爲“最後” 會有1 出現, 所以$1>0.\bar{9}$。但不要忘記由於9不停止, 所以1是不會出現的。其實大多數人會同意$0.\bar{3}=\frac{1}{3}$,$0.\bar{6}=\frac{2}{3}$,但對$0.\bar{9}$就覺得比1小。不過他們大概也會同意$0.\bar{3}+0.\bar{6}=0.\bar{9}$及$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$,或是$3\cdot0.\bar{3}=0.\bar{9}$,這是一簡單解釋$0.\bar{9}=1$的方法。底下爲一$0.\bar{9}=1$的證明:設$1-0.\bar{9}=\alpha>0$, 則由阿基米德(Archimedes, 西元前287-212年) 性質(Archimedean property,對$\forall a>0$及$b\in R$,存在一正整數n,使得$na>b$),存在正整數n,使得$10^n\alpha>1$,即$\alpha>10^{-n}$。因此$1-0.\bar{9}>10^{-n}$。由此得$1-10^{-n}>0.\bar{9}$,即得

$$0.\underbrace{9\cdots9}_{n\text{ 個}9}>0.\bar{9}$$

之矛盾結果。故$\alpha = 0$ ($\alpha < 0$ 不成立你應同意吧)。證畢。

上二例使我們對"極限" 更渴望進一步的了解。本文中連極限的定義都沒有給, 有些問題也沒有把正確答案完全指出。我們只給大家一些入門的觀念, 提醒大家日後每當接觸極限的題材時, 都要認眞學習, 且每當遇到極限的問題時, 都要謹愼處理。在數學裡極限扮演著一很重要的角色, 各位若有機會修習微積分,務必要好好學習。

習 題

1. 試說明爲什麼無法規定$\infty - \infty, \frac{\infty}{\infty}$及$0 \cdot \infty$ 的運算。

2. 令S表所有每一項不是0就是1的數列之集合。試證S爲不可數。

3. 設有集合$A_1, A_2, \cdots$,每一皆爲可數的。令$C = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$。試證$C$爲一可數的集合。

4. (i)試證$x-y$ 平面上, 二座標皆爲有理數的點之集合是可數的;
   (ii) 試證$x-y$ 平面上, 圓心之二座標皆爲有理數, 半徑亦爲有理數的圓之集合是可數的。

5. 試證$f(x) = (x-1/2)/(x(1-x))^{-1}, 0 < x < 1$,爲一由區間$(0,1)$至$R$之$1\!-\!1$ 且映成的對應。

6.試舉一很多很小的數相加,其和仍很小之例。

7. 假設太空中有一擁有無限多個(且爲可數的)房間之旅館。現設該旅館已住滿了旅客。分別針對下述情況, 指出旅館如何安排, 方能使每位新舊旅客皆有房間住。
   (i) 來一位新旅客;
   (ii) 來一有可數個旅客之旅行團;
   (iii) 來可數個旅行團, 且每一旅行團皆有可數個旅客。

8. (i) 試證每一無限集合, 必包含一可數的子集;
   (ii)利用(i)證明,若A爲一無限集合,且$a \in A$,則A與$A \setminus \{a\}$ 等價;
   (iii)利用(ii)證明,若$a < b$,則區間$(a,b), [a,b), (a,b]$,及$[a,b]$皆等價。由此得任一區間與實數集合皆等價,且任二區間等價。

9. 令Σ表集合A之所有子集的集合。例如,若$A=\{1,2,3\}$,則$\Sigma=\{\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},A\}$。一般而言,若$A$有$n$ 個元素,其中$n\geq 1$,則Σ有2^n(此數必大於n)個元素(因此有時以2^A表Σ)。試依下述步驟證明A與Σ必不等價。
   (i)設$A\sim\Sigma$,則$\forall x\in A$,有一$S_x\in\Sigma$與x對應;
   (ii)令$S^*=\{x|x\in A$且$x\notin S_x\}$,為一A之子集。則因$S^*\in\Sigma$,故不存在一$a\in A$,使得$S^*=S_a$;
   (iii)由不論$a\in S^*$或$a\notin S^*$皆不合,導出A與Σ 不等價。

10. 令$A_0=[0,1]$,$A_1=A_0\backslash(\frac{1}{3},\frac{2}{3})=[0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$為$A_0$之一子集合,由移去$A_0$的中間三分之一的開區間所得。$A_2$又為$A_1$之一子集合,為移去$[0,\frac{1}{3}]$及$[\frac{2}{3},1]$的中間三分之一的開區間所得。依此步驟可得$A_1,A_2,A_3,A_4,\cdots$。令$C=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$,集合$C$稱為Cantor集合 (Cantor set)。
    (i)試證$x\in C$,若且唯若x可寫成$\sum_{n=1}^{\infty}a_n3^{-n}$ 其中a_n為0或2。
    (ii)試證C為一不可數的集合。

11. 設$a<b$。試證
    (i)$(a,b]=\bigcap_{n=1}^{\infty}(a,b+1/n)=\bigcap_{n=1}^{\infty}(a,b+1/n]$;
    (ii)$[a,b)=\bigcap_{n=1}^{\infty}(a-1/n,b)=\bigcap_{n=1}^{\infty}[a-1/n,b)$;
    (iii)$(a,b)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(a,b-1/n]=\bigcup_{n=1}^{\infty}(a,b-1/n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}[a+1/n,b)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(a+1/n,b)$, 此處若$b-1/n<a$, 則定義$(a,b-1/n]=(a,b-1/n)=\phi$;
    (iv)$\{a\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}[a,a+1/n]=\bigcap_{n=1}^{\infty}[a,a+1/n)=\bigcap_{n=1}^{\infty}(a-1/n,a]=\bigcap_{n=1}^{\infty}[a-1/n,a]$;
    (v)$\phi=\bigcap_{n=1}^{\infty}(a,a+1/n)=\bigcap_{n=1}^{\infty}(a-1/n,a)$。