求方根速算法

黃文璋
國立高雄大學應用數學系

1 筆算或心算

若一整數爲完全平方數(簡稱平方數), 有沒有較快速的方法求其平方根? 不要回答說用計算機, 有時我們該讓自己的腦袋也執行一些計算的工作,免得逐漸衰退。畢竟對數字具有充分的敏銳性,在生活上應有若干幫助。

首先任一整數的平方, 其個位數正好與原數個位數的平方之個位數相同。事實上, 任一整數皆可表示成$10a+b$, 其中a,b爲整數, $0\le b\le 9$。藉用同餘的術語(對整數a,b及n, $a\equiv b \pmod n$表n可整除$a-b$), 可寫成

$$(10a+b)^2\equiv b^2 \pmod{10}。$$

而$0^2=0,1^2=1,2^2=4,3^2=9,4^2=16,5^2=25,6^2=36,7^2=49,8^2=64,9^2=81$。故一整數之平方, 其個位數字只可能爲$0,1,4,5,6,9$。因此個位數字爲$2,3,7,8$, 皆不可能爲平方數。而一平方數,若其個位數字爲1, 原數之個位數必爲1或9; 若爲4, 原數之個位數必爲2或8;若爲6, 原數之個位數必爲4或6; 若爲9, 原數之個位數必爲3或7。

另外,因任一整數必爲$4n,4n+1,4n+2$,或$4n+3$的型式。而$(4n)^2=4\cdot(4n^2),(4n+1)^2=4\cdot(4n^2+2n)+1,(4n+2)^2=4(4n^2+4n+1),(4n+3)^2=4\cdot(4n^2+6n+2)+1$。故平方數只有$4n$及$4n+1$等二型。而因100爲4的倍

數, 故一整數除以4的餘數爲何, 只要以該整數末兩位去除以4即知。所以諸如572,847及1,653,694皆非平方數, 因前者爲$4n+3$型, 後者爲$4n+2$等二型。

對一個位數爲5之二位數, 其平方是很容易算出來的, 只要把(首位數+1)×(首位數), 然後後面補上25即可。例如, 求65^2。因$6\times(6+1)=42$,故$65^2=4{,}225$。其中原因由下式即可得知:

$$\begin{aligned}(10a+5)^2 &= 100a^2+100a+25\\ &= 100a(a+1)+25\text{。}\end{aligned}$$

此結果尚有一些小推廣。其一爲若有兩個二位數, 首位數差1, 個位數皆爲5, 則可如下求二者的積: 將首位數較大者加1, 乘以另一首位數,然後後面補上75。例如, 因$(8+1)\times7=63$, 故$85\times75=6{,}375$。其二爲若有兩個二位數, 首位數相同, 且個位數之和爲10, 則可如下求出二者的積: 將(首位數+1)×(首位數), 然後後面補上二個位數之積。例如, 因$(7+1)\times7=56$, 故$76\times74=5{,}624$。此中原因應不難想像, 也可推廣到三位數。例如, $236\times234=55{,}224$, 此因$24\times23=552$, 且$6\times4=24$。

底下我們介紹對10,000以內的平方數, 求其平方根之速算法。100以內的平方數, 其平方根必爲一個位數, 所以只需考慮三位或四位的平方數。我們以7,396爲例, 按下述步驟便可求出其平方根。

(i)將此數自右起每兩位分爲一組, 而得73及96。

(ii)由於96之尾數爲6, 所以欲求之平方根其個位數必爲4或6。

(iii)找出平方最接近73且小於73的數, 顯然爲8, 故平方根之十位數爲8, 且此數爲84或86。

(iv)把已求出的平方根之十位數加1乘上十位數, 得$(8+1)\times8=72$。因$73>72$,故選擇(iii)中之較大的數(若乘出來之積大於73, 則選(iii)中較小的數)。你知道爲何如此選擇呢?此因84與86間夾著85, 而85的平方如前所述爲$(8+1)\times8=72$, 後面補上25, 現因七千三百多大於七千兩百多, 故7,396之平方根大於85, 因此是86。

再舉一例, 求3,969之平方根。先看出平方根之個位數爲3或7, 而顯然十位數爲6, 即平方根爲63或67。而$(6+1)\times6=42>39$, 故平方根爲63。

其次我們來看完全立方數(簡稱立方數)之立方根的速算法, 其方法比

前述求平方根的過程還要簡單。

首先$0^3=0, 1^3=1, 2^3=8, 3^3=27, 4^3=64, 5^3=125, 6^3=216, 7^3=343, 8^3=512, 9^3=729$。與平方數不同的是, 不同的個位數, 其立方皆不相同。故對一立方數, 由其個位數便可決定其立方根之個位數。$0, 1, 4, 5, 6, 9$等六數的立方其個位數字不變。而2的立方(個位數)得到8, 3的立方得到7, 7的立方得到3, 8的立方得到2,二者之和恰好爲10, 所以也不難記憶。

對一1,000以內的立方數, 其立方根必爲一位數, 所以立即可得其立方根。現對一1,000 至999,999 的立方數, 其立方根爲一二位數。將此數自右起每三位分爲一組, 由原數之個位數可決定其立方根之個位數; 而由前三位可決定其立方根之十位數。舉一例來看, 求238,328之立方根。立方根之個位數必爲2, 又因$6^3=216$最接近238且小於238, 故十位數爲6, 即此數之立方根爲62。

求四次方根, 可先求平方根再求一次平方根而得, 故我們不用多討論。

至於求五次方根, 再度地, 比求平方根和求立方根容易。

首先$0, 1, \cdots, 9$每個數的五次方其個位數與原數皆相同。而$100^5=10^{10}$, 即100 億。故一100億以內的完全五次方數, 其五次方根小於100, 即爲一二位數。而個位數又立即可決定,例如, $\sqrt[5]{16{,}807}=7$。現將此數分爲後五位與前五位, 由前五位決定十位數字, 後五位決定個位數字。舉例而言, $\sqrt[5]{69{,}343{,}957}=37$。此因$3^5=243, 4^5=1{,}024$。

諸位是否想通爲何次方愈高, 其方根愈容易求, 即使數字如此大? 這道理很簡單, 對一正整數, 次方愈大, 其成長愈快。譬如說對一二位數, 其五次方可從10萬至接近100億。反過來, 1至100億內, 其實只有99個完全五次方數。而只有十位數需要決定, 故便很容易了。所以對一100億以內的數, 如果已知其爲完全五次方數, 則稍微心算便立即可給出五次方根並不足爲奇。

至於次方較高的數之方根, 我們便不討論了, 因本文只是初步的介紹, 增進大家對數字的敏鋭能力。雖然我們只介紹四位以內整數的平方根, 但對一六位以內的平方數, 經過一些嘗試錯誤,應可求出。底下幾個數的平方根留給各位練習:12,996, 690,561, 228,484, 50,176 及265,225。至於在

金庸(1996)所著射鵰英雄傳裡, 當郭靖與黃蓉初入黑沼中, 瑛姑正在計算的三道題目, 其中前二題各位也可試試: $\sqrt{55{,}225}$, $\sqrt[3]{34{,}012{,}224}$ 。

2 藉助計算器

最後我們來看如何求一位數很大的整數之某次方根, 當然在此都是假設此方根亦爲整數 。

例如, 求一201位的整數之23次方根 。首先立即看出此方根爲一九位數, 但大約是無法以筆算或心算求之 。而若你只有一桌上型的計算機, 由於計算機的位數不夠大, 似乎又束手無策 。事實上, 由於答案爲一九位數, 只要由原數的前九位, 便可決定其23次方根(證明見華羅庚(1991), p.251) 。一般而言, 若方根爲n位數, 只要用前n位(有時只要前$n-1$位, 也可只利用後n 位) 便可得到欲求之方根 。

舉幾個例子來看 。求138,384之平方根, 由於答案爲三位數, 而$\sqrt{13.8} = 3.714\cdots$, 故答案爲372 。次求13,651,919之立方根, 由於答案仍爲一三位數, 而$\sqrt[3]{13.6} = 2.386\cdots$, 故答案爲239 。是否很神奇呢? 又你有沒有看出來爲何對前者要用13.8而非138, 對後者要用13.6而非136? 此部分留給讀者自行思考好了 。

在數學中常會有需要處理數字的問題 。沒錯, 常可藉助計算機來協助 。但若對數字的性質夠了解, 往往可縮短要花的時間, 或挑出不小心犯的錯(如鍵入錯的數字, 想想前面所提之201 位的數, 要完全打對可得很小心呢) 。

習　題

1. 試找出平方之末三位數字均相同且皆不爲0之正整數 。
2. 試問是否存在一各位數字和爲11之平方數?若存在, 則找出最小者, 若不存在, 則證明之 。
3. 試證若$(x,3) = (y,3) = 1$, 則$x^2 + y^2$不可能爲一平方數 。
4. 試證若x, y皆爲奇數, 則$x^2 + y^2$不可能爲一平方數 。
5. 以4個2(如2,222,或222^2)能表示出之最大的數爲何?

6. 試問844,596,301爲那個整數的五次方?

7. 試以第2節所提的方法, 藉助計算器求(已知答案爲整數)

$$\sqrt[3]{49{,}430{,}863},\quad \sqrt[3]{188{,}132{,}517},\quad \sqrt[4]{1{,}874{,}161}\ 。$$

8. 試找出下面六個數中唯一的平方數, 並以第2節所提的方法, 對該平方數, 求其平方根。

$$\begin{array}{ll} 3{,}669{,}517{,}136{,}205{,}224\,, & 5{,}901{,}643{,}220{,}186{,}100\,, \\ 1{,}898{,}732{,}825{,}399{,}318\,, & 7{,}538{,}062{,}944{,}751{,}882\,, \\ 4{,}751{,}006{,}864{,}295{,}101\,, & 2{,}512{,}339{,}789{,}576{,}516\ 。\end{array}$$

參考文獻

1. 金庸(1996). 射鵰英雄傳, 第三版。遠流出版社, 台北。

2. 華羅庚(1991). 華羅庚科普著作選集。亞東書局, 台北。