

數學素養：隨機性與數據

黃文璋

國立高雄大學應用數學系

國民素養的數學領域裡，4 大項中，有一重要的“隨機性與數據”。

宇宙的運轉，有必然性及隨機性。將銅板以自由落體的方式落地，若給定高度，則落地所需時間為定值，這是必然性。但那一面朝上卻不一定，此便屬隨機性。由於生活中充滿著隨機性，使得人們對很多事物常感不確定，因此有時需做各種預測。近從今天是否會下雨，遠至預測百年後，台灣每年的新生兒數。有時對並非隨機的量，如台灣 60 歲以上者，有多少比率具大學學歷，由於不易全面普查，因此也常以推測方式，以得此比率。

有些預測方式，不是那麼有科學依據，如依靠擲爻、算塔羅牌等，或買彩券時以廟裡求來的明牌選號。雖沒有科學依據，何以一直有人相信呢？那是因即使胡亂猜測，就算機率很小，結果也有正確的時候。而當很多人在給明牌，所謂小機率遇上大樣本，有人猜中的機率便可能很大了。

在隨機世界中，人們常面臨決擇，或對現況做推測，或對未來做預測。因此充分了解隨機性，及具備基本的處理數據之能力，乃很必要。而數學課程中的機率與統計的題材，

便能提供這方面的訓練。

為了做預測，所謂數據會說話，可利用統計方法，先收集資料，加以整理及分析，然後給出推論。只是對於隨機現象，即使用的方法很好，預測仍不易次次準確。例如，假設投擲一銅板 100 次，得到 64 個正面，36 個反面。不同的統計方法，包括依據直觀，都會導致以 0.64，來估計此銅板出現正面的機率。所以如果要預測下次投擲，究竟會出現那一面？顯然要說正面。但你知道，還是可能會判斷錯誤。連這麼簡單的正、反兩面二選一，都無法預測精準，在變因更多下，又如何能正確預測明年的經濟成長率，或百年後全年的新生兒數呢？這樣說來，統計有何用呢？其實不然。統計方法所給，乃是在某些條件下的最佳決策。對於前述預測銅板出現那一面的問題，正面仍是最佳選擇。另外，當實驗次數愈大時，便更能凸顯統計的功能。例如，假設投擲一出現正面機率為 0.64 的銅板，所選的那一面出現次數較多便獲勝。如果只投 1 次，則就算選反面，有 0.36 的機獲勝，不算太小。但若投 100 次，則選反面，獲勝機率便只有約 0.0015，輸的機率高達約 0.9971(平手機率約為 0.0013)。因此為了爭千秋，而不爭一時，做決策時，自然得仰賴統計。機率的威力，當次數很多時，便完全顯現出來。

由於預測常不可能百分之百精準，因此除給出預測值外，通常也要給出誤差大小。例如，媒體上所公佈的民調結果，除了要說明樣本如何產生等取樣過程，其中還會加上底下這類附註：在百分之 XX 的信心水準下，抽樣誤差在正負

X 個百分點以內。意思是說，實際值與所提出的預測值，誤差在 X% 內的機率為 XX。對於隨機現象，並無法保證預測的誤差必有多大，只能給出誤差不超過某一值之機率。不像數學中常在證明，且所得結果往往為斬釘截鐵式的。運用統計，通常不是在證明那件事必然是對的，而是給出允許誤差下的機率式保證。且所能保證的機率，不但不是百分之百，還附有誤差。要知對非一成不變的隨機現象，何者為真，何者為偽，有時可說只有天曉得。被起訴者有罪嗎？病人究竟得什麼病？誤判、誤診，就是難免。藉助統計做推論，採用的乃是允許誤差下的無罪推定。這其中有一套隨機邏輯可仰賴，與法官及醫生做判斷時的思維類似。

著名的統計學者 C.R. Rao 以為數學，是一種從給定前提下演繹結果的邏輯。至於統計學，是一種從經驗中學習的合理過程，及從給定的結果驗證前提的邏輯。他並認為，在理性的世界裡，所有判斷皆為統計。

隨機性的概念，在理解層次上，並不是那麼容易能掌握。即使在大學裡，統計學也常被認為比微積分還難教及難學。因微分及積分，皆有些物理意義，且可經由圖示來說明。而在統計裡，由於需取樣，以得到數據，而取樣會有偏差，此時將使隨機性的特質顯現出來。於是一些概念的含意，即使連機率及期望值，這些一般人能琅琅上口的名詞，其意義都很難以淺顯的方式來解釋清楚。更何況還有條件機率，導致機率值會變。這些，都使對中小學生，對隨機性與數據的題材，常較難理解。