

## 數學素養：變化與關係

黃文璋

國立高雄大學應用數學系

在國民素養的數學領域裡，4大項中，有一重要的“變化與關係”。

“關係”一詞是人們常朗朗上口的，好比有什麼關係、沒關係，及關係菲淺等。關係有很多類，有些是所謂真正有關連，如父子關係。父子二人，可說怎樣也去除不了關係。有些關係是被加上去的，或被探索出來的。像同學關係，原本沒有任何關連的人，只因偶然在同一班上相遇，遂被賦予一關係。又如老虎與貓，乍看之下，也不像有關連，二者也很少會碰在一起。但若定義出體積的大小，二者便有了大小關係；另外，若依動物的分類，二者皆屬貓科，源自於共同的祖先。至於變化，大家就更熟知了。除了各類物質的物理變化，及化學變化外，還有友情、天氣、經濟，及種種關係的變化。生活及科學裡，各式我們所在意的變化與關係，可說到處充斥。

在處理事物時，我們常需掌握其間各種變化與關係，以達到較想要的成效。因此首要之務，乃了解各事物間，可能會有的變化與關係。而經由數學的訓練，便是了解變化與關係之本質的一極佳途徑。

數學裡的關係，有不少也是真正有關連。如方程式的根與係數之關係，知道係數，根便決定了。空間中凸多面體的頂點數、稜數及面數，滿足頂點數加面數減去稜數等於 2。幾個三角函數，其間亦有密切的關係。在討論某題材時，找出其間的各種關係，除了數學上有趣之外，常也有實際的用途。自古以來，數學家努力探究，上窮碧落下黃泉的挖掘出各種關係。簡單的如直角三角形三邊長間之關係，即畢氏定理，及圓面積與半徑間的關係，即圓面積公式。也有複雜到只有少數數學家能理解的關係。另外，為了不同的目的，數學中常定義出各種關係，然後決定特定的二者間，是否有某一關係。如等價關係、對稱關係、相似關係、平行關係，及垂直關係等。有時也討論特定的二者間，是否會有一些關係，如直線與圓的位置之關係。

有兩種關係是數學裡特別有興趣的。其一為函數關係，其二為因果關係。

簡言之，函數就是一種對應關係。假設有二集合 A 與 B，若每一 A 中的元素，都恰有一 B 中的元素與之對應，便稱此為一由 A 至 B 的函數。如學校裡每位學生皆有一學號，由學生對應到學號，便產生一函數。若每位學生皆有一位導師，由學生對應到導師，又產生一函數。不論生活上或科學裡，函數可說處處可見。現代數學的發展，大約始自 17 世紀，其後數學中的討論，常將所遇到的問題，設法以  $y = f(x)$  這種函數的形式來描述。由上式也可看出數學的特色之一：以一簡潔的符號，來替代一複雜或冗長的敘述。中學數學

裡，有關函數的題材不少，如多項式函數、有理函數、根式函數、三角函數、指數函數，及對數函數等。只是學多了這類能以某一共同的數學形式來表達的函數後，學生往往反而忘了函數原本是用來當做一種對應，且函數乃是用來描述各類對應關係的一個有效工具。若是這樣，可說未將所學化成數學素養。

函數關係可說是一種很強的關係。指定一元素，其對應便完全確定。函數關係可以經由建立起來，也可以就是給定，不必有任何理由。至於因果關係，則是指在某假設(或說前提)下，會導致某結論成立。而結論是否成立，可不能任意假定，否則會產生矛盾。有些因果關係較明顯，如任一偶數的平方仍為偶數；有些則須花些功夫去證明。數學裡由於經常在檢驗因果關係是否成立，將使人熟悉邏輯概念，及各種推導的步驟。而邏輯及推導的能力，當然是處處有用。

二量之間的變化，常可藉由函數來描述。只是變化雖與函數關係密切，但變化並非只涉及量，有時會是狀態，甚至是內涵的改變。例如，對一三角形，垂線位置隨著角度大小而改變；對一函數，其圖形隨係數而改變。數學中便經常在討論各種變化。

數學素養若足夠，將更擅長了解生活及科學裡的種種變化與關係。