

第八章 邏輯思考論

習題

1. 試證(1) 及(2)。
2. 試證 $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ 。
3. 試證 $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup C$ 。
4. 試證 $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$ 。
5. 試證 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ 。
6. 試證 $A \cup B \cup C = A \cup (B \setminus A) \cup (C \setminus A \cup B)$ 。
7. 對平面上—區域 A , 以 $P(A)$ 表其面積。設 A_1, A_2, A_3 為平面上三區域。試證

$$\begin{aligned}P(A_1 \cup A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2), \\P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\&\quad - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) .\end{aligned}$$

8. 設 $a < b$ 。試證 $[a, b] = (-\infty, b] \cap (-\infty, a)^c$ 。
9. 試以 Venn 氏圖給出下述集合之關係。
 A = 平面上三角形的集合,
 B = 平面上等腰三角形的集合,
 C = 平面上正三角形的集合,
 D = 平面上銳角三角形的集合,
 E = 平面上等腰直角三角形的集合。
10. 設 $A = \{x | 2 \leq x < 5\}$, $B = \{x | 4 \leq x < 7\}$ 。求 $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$ 。
11. 令 A 表本班的棒球隊員, B 表本班的籃球隊員。分別說明 $(A \cup B)^c, A^c \cap B^c, (A \cap B)^c, A^c \cup B^c, A^c \cap B$ 為何。
12. 如果“無肉使人瘦, 無竹使人俗”是正確的, 試分別對有肉、有竹、瘦、不瘦、有竹及無竹, 討論可得何推斷?

13. 在新約聖經約翰福音第4章記載,耶穌就對他說“若不看見神蹟奇事,你們總是不信。”在第3章記載,耶穌說“人若不是從水和聖靈生的,就不能進神的國。”試分別討論由此二句可得何推論?
14. 小鎮上唯一的理髮師常宣稱他只替不給自己刮鬍子的人刮鬍子,並且鎮上這種人的鬍子都應由他刮。試問他給不給自己刮鬍子?
15. 人們常說“一成功的男人,背後必有一偉大的女性”。假設此說法是對的,則若一男人不成功,可否怪他太太不夠偉大?
16. 某校學則上有一條“休學期滿未復學,或未繼續申請休學者,應令退學”。試問此規定是否合理?
17. 將文摘1中之不合邏輯及錯誤之處找出。
18. 討論文摘2至文摘6中所提到的邏輯,那些使用不當。
19. 討論文摘7中之“是”、及“故”是否使用正確。
20. 討論文摘8中之“是故”是否使用正確,及由所述理由是否可推導出“欲人之無惑也難矣”。
21. 莊子秋水篇最後一段為
莊子與惠子遊於濠梁之上。莊子曰“儵魚出游從容,是魚樂也。”惠子曰“子非魚,安知魚之樂?”莊子曰“子非我,安知我不知魚之樂?”惠子曰“我非子,故不知子矣;子固非魚也,子之不知魚之樂,全矣。”莊子曰“請循其本。子曰“女安知魚樂”云者,既已知吾知之而問我,我知之濠上也。”
試對惠子第二次及莊子第三次所講的話,討論是否合於邏輯。
22. 某游泳池規定有下列情況之一者不得入池:
 - (A) 患有心臟病、高血壓、貧血、皮膚病、眼疾、感冒、醉酒、精神病或傳染病者。
 - (B) 未著泳衣、泳褲及未戴泳帽者。
 - (C) 攜帶瓷器及金屬等危險物品者。
 - (D) 小學三年級以下,無家長或監護人陪同者。試找出其中不妥之“或”與“及”。

23. 內政部於民國二十九年頒布的“中央警察大學學生身家調查作業規定”中有“考生的父母、配偶、兄弟、姊妹有犯罪前科或不良記錄而對考生擔任警察工作有不良影響者，不得擔任警察”。民國八十七年八月，由於考生的抗議，內政部長黃主文指出，該條規定明顯違反了“警察人員管理條例”第六條，即擬任警察官前，應實施身家調查，注意其品德及對國家的忠誠。他說，依據管理條例，身家調查應只侷限於考生本人的品德和忠誠度，與考生的家屬沒有任何關係。(見中國時報民國87年8月16日第8版)。試判定內政部長的說法是否正確？

第24至36題為選擇題。

24. 某校有十個班級，每班各有50人。已知每班至少有1人戴眼鏡，則可推知(A) 每班都有不戴眼鏡的人，(B) 全校學生至少有10人戴眼鏡，(C) 至少有一班，該班有人沒戴眼鏡，(D) 對於任何一班的某位學生，同班其餘49人中至少有1人戴眼鏡。
25. “無風不起浪”與下列何者同義：(A) 有風的時候必有浪，(B) 有浪的時候必有風，(C) 沒有浪的時候也可能有風，(D) 沒有風的時候也可能有浪。
26. 由王昌齡出塞中的“但使龍城飛將在，不教胡馬渡陰山”可推知(A) 若胡馬渡陰山，則龍城飛將不在，(B) 若龍城飛將不在，則胡馬渡陰山，(C) 若胡馬不渡陰山，則龍城飛將在，(D) 若龍城飛將不在，則胡馬不渡陰山。
27. 李白的行路難中有“吾觀自古賢達人，功成不退皆殞身”。欲推翻李白的講法：(A) 找到一古賢達人，功成不退而殞身，(B) 找到一古賢達人，功成退而殞身，(C) 驗證每一古賢達人，功成不退卻未殞身，(D) 找到一古賢達人，功成不退卻未殞身。
28. 小敏說“每一天只要我穿紅衣服，就會有人送花給我”。欲推翻小敏的說法，下列何者為真：(A) 找到有一天沒人送花給小敏，(B) 找到有一天小敏沒穿紅衣服，(C) 找到有一天小敏穿紅衣服，而無人送花給她，(D) 找到有一天小敏沒穿紅衣服，而有人送花給她。
29. 由“若考題容易，則所有學生皆能及格”可推知(A) 若沒有一學生不及格，則考題必容易，(B) 若考題不容易，則有些學生不及格，(C) 若所有學生皆及格，則考題容易，(D) 若有半數學生不及格，則考題不容易。

30. 下列那一種情況為老師未守承諾: (A) 老師宣佈考90分以下不會不罰站, 某生考80分卻未罰站, (B) 老師宣佈考90分以上便不罰站, 某生考85分卻未罰站, (C) 老師宣佈分數未超過90分要罰站, 某生考90分亦遭罰站, (D) 老師宣佈考90分以下必要罰站, 某生考95分卻未罰站。
31. 老鄭對兒子說:“除非你考試成績平均95分以上, 否則不帶你去看電影”。則下述何者老鄭未守承諾? 兒子(A) 平均97分且未看電影, (B) 平均90分且去看電影, (C) 平均98分且去看電影, (D) 平均85分且未看電影。
32. 小郭對女兒說:“除非你考試成績平均95分以上, 且有3科100分, 否則不帶你去看電影”。則下述何者不應發生? (A) 5科100分且未看電影, (B) 平均97分且未看電影, (C) 平均92分且有4科100分, 並去看電影, (D) 平均98分且有4科100分, 而未看電影。
33. 經調查某班學生的家庭情況發現: (1) 有哥哥的人沒有弟弟, (2) 沒有哥哥的人有妹妹, (3) 沒有姊姊的人有弟弟或妹妹。則下述何者為正確的推論? (A) 沒有弟弟的人有哥哥, (B) 沒有妹妹的人有姊姊, (C) 沒有哥哥的人有弟弟, (D) 有妹妹的人沒有哥哥。
34. 柏拉圖(Plato, 約西元前428-347年)說“一有良知的人, 在活躍的政治中是無容身之處的”。由此說法推知(A) 無良知的人, 在活躍的政治中是有容身之處的, (B) 一有良知的人, 在不活躍的政治中是有容身之處的, (C) 無良知的人, 在不活躍的政治中是無容身之處的, (D) 在活躍的政治中, 有容身之處的為無良知的人。
35. 李白將進酒中有“古來聖賢皆寂寞, 唯有飲者留其名”。若要推翻李白的講法, 只須(A) 證明古來聖賢皆不寂寞, 且飲者皆未留名, (B) 證明古來聖賢皆不寂寞, 唯有飲者留其名, (C) 證明古來聖賢皆不寂寞, 或飲者皆未留名, (D) 找出一不寂寞的古聖賢, 或找出一未留名的飲者。
36. 男孩說“每一天沒有一時刻我不會心理不平靜,” 欲指出其所說並不真實, 須(A) 驗證每一天每一時刻其心理皆平靜, (B) 驗證沒有一天沒有一時刻其不會心理不平靜, (C) 驗證每一天沒有一時刻其會心理不平靜, (D) 找出有一天有一時刻其心理平靜。

37. 欲證級數 $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ 之和為 $1/2$, 試指出下述證明中之錯誤:
 令 $S = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$,
 則 $S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - S$,
 由此得 $2S = 1$, 即 $S = 1/2$ 。證畢。
38. 底下為取自網路小說“第一次的親密接觸”中的數段句子(見87年6月23及28日中國時報第18版, 作者JHT)。試分別指出各段中不合邏輯處。
 (i) 如果我還有一天壽命, 那天我要做你女友。我還有一天的命嗎? 沒有。所以, 很可惜, 我今生仍然不是你的女友。
 (ii) 如果把整個浴缸的水倒出, 也澆不熄我對你愛情的火焰。整個浴缸的水全部倒得出嗎? 可以。所以, 是的, 我愛你。
 (iii) 如果我有翅膀, 我要從天空飛下來看你, 我有翅膀嗎? 沒有。所以, 很遺憾, 我從此無法再看到你。
 (iv) 如果把整個太平洋的水倒出, 也澆不熄我對你愛情的火焰。整個太平洋的水全部倒得出嗎? 不行。所以, 我並不愛你。
39. 父親心愛的花瓶被打破了。老大說“是老三打破的”。老二說“不是我打破的”。老三說“是老四打破的”。老四說“老三說謊”。試分別依下述二情況, 判斷是誰打破的:
 (i) 4人中只有1人說實話;
 (ii) 4人中只有1人說謊話。
40. 下課時, 一群同學在嬉鬧, 突然老師叫來三位邏輯不錯的同学, 並說“你們之中有人背上被貼了字條, 現在看誰能最先知道自己背上有沒有被貼”。三人互望一眼, 都看到另外二人的背上被貼著寫有“辣妹”二字的小字條。經過數秒鐘, 三人同時說“我的背上有字條”。試問他們是如何發現的。

第41至第51題中 n 表正整數。

41. 試證

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall n \geq 1.$$

42. 試證

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2, \forall n \geq 1.$$

43. 令 A_n 表敘述: $1+2+\cdots+n = \frac{1}{8}(2n+1)^2$ 。試證若 A_k 成立則 A_{k+1} 成立, $\forall k \geq 1$ 。並問是否對 $\forall n \geq 1, A_n$ 皆成立?

44. 令 A_n 表

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2 + m, \quad m \geq 1。$$

試證對每一正整數 m , 若 A_n 成立, 則 A_{n+1} 成立。

45. (i) 找出使下式成立之最小正整數 $n = n_0$:

$$(1+x)^2 > 1+nx+nx^2, \quad \forall x > 0。$$

(ii) 利用歸納法證明上式對 $\forall n \geq n_0$ 皆成立。

46. 試利用歸納法證明對 $\forall n \geq 1, (n+n^2+2n^3)/3$ 為一正整數。

47. 試利用歸納法證明對 $\forall n \geq 0, 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ 皆為133的倍數。

48. 試利用歸納法證明對 $\forall n \geq 1,$

$$\prod_{i=1}^n (1+a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n a_i,$$

其中 a_1, \dots, a_n 皆為大於-1之實數, 且全為正或全為負。此結果之一特例為Bernoulli 不等式 (Bernoulli inequality), 即 $(1+x)^n \geq 1+nx, \forall x > -1$ 。

49. 試證對 $\forall n \geq 2,$

$$2^{n-1}(a^n + b^n) > (a+b)^n,$$

其中 $a+b > 0$ 且 $a \neq b$ 。

50. 試證對 $\forall n \geq 2,$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}。$$

51. 數列 $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$ 稱為費氏數列 (Fibonacci sequence)。即若令 a_n 表第 n 項, 則

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, n \geq 2。$$

試證

$$a_n < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}, \quad \forall n \geq 2。$$

52. (i) 設 $a \in \{1, 3, 7, 9\}$ 。試以歸納法證明, 對任一正整數 r , 必存在一正整數 b , 使得 b^3 之末 r 位皆為 a 。
- (ii) 利用(i)證明, 對 $a = 8$ 上述結果亦成立。
- (iii) 討論 $a \in \{0, 2, 4, 5, 6\}$ 的情況。
53. 試以歸納法解例17。