第三章　鴿籠原理
(Pigeon-Hole Principle, PP)

3.1　鴿籠原理

鴿籠原理基本上是一個平均值概念的應用，在組合數學中有很多存在性的定理都可以利用它來加以證明。

鴿籠原理

有 $n+1$ 隻鴿子飛入 n 個鴿籠時，必定存在一個鴿籠它裡面有兩隻以上的鴿子。

鴿籠原理的推廣

有 mn+1 隻鴿子飛入 n 個鴿籠時，必定存在一個鴿籠它裡面有 m+1 隻以上的鴿子。

證明：

如果每個籠子中最多只有 m 隻鴿子，則總數必小於 mn+1.

（註）在利用這個原理的時候，選定籠子比較關鍵。

命題 1.

任給 n 個整數 $a_1, a_2, \cdots, a_n$；定義 $S_{k,h} = \sum_{i=k}^{h} a_i$，則必定有一個 $S_{k,h}$ 它是 n 的位數，其中 $1 \le k \le h \le n$。

證明： 令 $S_j = \sum_{i=1}^{j} a_i$，$d_j \equiv S_j \pmod{n}$，$0 \le d_j \le n-1$。

如果存在一個 $1 \le j \le n$ 使得 $d_j = 0$，則 $n | S_j = S_{1j}$，得證。

不然的話 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 皆不為 0，則必存在某兩個 d_h 及 d_k，$1 \le k \le h \le n$，使得 $d_h = d_k$（鴿籠原理），因此 $n | S_{k+1,h}$。

（註） 命題 1 的另一形式為：令 A $=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 為 n 個整數所成的集合。

則必存在一個 B $\subseteq$ A 使得 $\sum_{x\in B} x$ 為 n 的倍數。

命題 2.

任意長度為 n^2+1 的實數列必包含有長度為 $n+1$ 的單調(monotonic)子數列。

證明：

令 $(a_1,a_2,\cdots,a_{n^2+1})$ 為給定的實數列，m_i，$1\le i\le n^2+1$，為由 a_i 開始遞增子數列的最大長度。如果有 $m_i\ge n+1$ 則命題得證。現在假設所有的 m_i，$1\le m_i\le n$，由於總共有 n^2+1 項，因此，至少有 $n+1$ 個 m_i，$i\in\{1,2,\cdots,n^2+1\}$ 具有相同的值（鴿籠原理的推廣），令它們為 $m_{i_1},m_{i_2},\cdots,m_{i_{n+1}}$。現在考慮 $(a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_{n+1}})$，它必定是一個（嚴格）遞減的子數列，否則令 $a_{i_j}\ge a_{i_k}$，其中 $j>k$。於是 $m_{i_k}\ge m_{i_j}+1$，這與上述矛盾，因此命題得證。

命題 3.

令 n 為奇數，則 A 中至少有 $t+1$ 個數同為奇數或偶數（鴿籠原理），令它們為 $a_1,a_2,\cdots,a_{t+1}$。由於 $\{a_1,a_2,\cdots,a_{t+1}\}\cap\{\alpha(a_1),\alpha(a_2),\cdots,\alpha(a_{t+1})\}\ne\phi$，$a_i=\alpha(a_j)$，$1\le i,j\le t+1$。於是 $a_j-\alpha(a_j)=a_j-a_i$ 為偶數，因此，命題得證。

（註） n 為偶數時，命題不一定會成立。

命題 4.

在$\{1,2,3,\cdots,2n\}$ 中任取$n+1$個元素$a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$，則必存在a_i, a_j，$1\le i\ne j\le n+1$，使得$a_i|a_j$或是$a_j|a_i$。

證明：

令$a_i=2^{b_i}\cdot p_i$，其中p_i為奇數。由於p_i有n個（最多），所以必定存在兩個a_i,a_j，它們的$p_i=p_j$，因此命題得證。

命題 5.

令ΔABC為一邊長 1 單位的正三角形，則任意放入n^2+1個點，必定有兩點的距離不大於$1/n$。

證明：

將ΔABC分割成n^2個邊長為$1/n$單位的正三角形。

命題 6.

令ΔABC為一正三角形，同時將$\varepsilon=\overline{AB}\cup\overline{BC}\cup\overline{CA}$分割成兩個集合$\varepsilon_1$與$\varepsilon_2$。證明，$\varepsilon_1$與$\varepsilon_2$中必有一集合可以用它的點來形成一個直角三角形。

證明：

假設命題有誤。首先，在ΔABC的三邊上各找一點 X, Y 及 Z 使得$\overline{ZY}\perp\overline{BC},\overline{YX}\perp\overline{AB},\overline{XZ}\perp\overline{AC}$，如下圖所示。則 X, Y 及 Z 三個至少有兩點會落在ε_1（或ε_2）。不失一般性，令 X, Y 為ε_1中的兩點。因此，$\overline{AB}\setminus\{X\}$上的點都不會在$\varepsilon_1$中，也就是說$\overline{AB}\setminus\{X\}$中的點全都在$\varepsilon_2$中，如此一來 C 和 Z 都不會在$\varepsilon_2$中，所以$C\in\varepsilon_1,Z\in\varepsilon_1$，再加上已知$Y\in\varepsilon_1$，因此$\Delta CZY$為一直角三角形，它的頂點皆來自$\varepsilon_1$，此與假設矛盾，命題得證。

命題 7.

在 6 個人中必定有 3 個人彼此都相識或是不相識。

證明：

任選一人，則與此人相識的如果不到三人，則與此人不相識的就一定至少三人；現在假設有三人與此人相識（不相識的部分，討論方式相似）。如果這三人中有兩人彼此相識，則已經有三人彼此相識；此三人彼此皆不相識，命題得證。

這個命題也可以用圖的模式（Graph Model）的描述：先在平面上畫六個點，分別代表這六個人；如果兩人相識就畫一藍邊，不相識則畫一紅邊；於是在畫完所有的 15 個邊之後，必然會有一個“同色”三角形，亦即三邊均為藍色或是紅色。以這種形式來表示，比較容易探討更深入的概念。

完美圖 K_n：一包含 n 個頂點 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 的圖 $G(V,E)$，且任 2 個不同的頂點連成一條邊 $(\{v_i, v_j\})$（註：共恰有 $\binom{n}{2}$ 條邊）

3.2 廣義的鴿籠原理

令 $n, k_1, k_2, \cdots, k_n$ 為自然數（正整數）。假如有 $(\sum_{i=1}^{n} k_i) - (n-1)$ 隻鴿子飛入 n 籠子，則第一個籠子至少有 k_1 隻鴿子，或是第二個籠子有 k_2 隻鴿子，……，或是第 n 個籠子有 k_n 隻鴿子。

證明：

如果上述不對，則鴿子的總數 $S \le \sum_{i=1}^{n} (k_i - 1)$，此與假設矛盾，因此命題得證。

命題 8. 平面上的 17 個點，兩點之間任意用紅、黃、藍三個顏色中的一色畫線，則至少會有一個同色三角形。