國立高雄大學統計學研究所

碩士論文

On Risk Measures, Corresponding Sensitivity Analyses, and Applications to Portfolio Selection

各種不同風險衡量指標暨敏感度分析及其在投資組合上的應用

研究生：吳柏儒　撰

指導教授：俞淑惠　博士

中華民國 100 年 7 月

致謝辭

時光荏苒，碩士班兩年的求學生涯即將步入尾聲，在這兩年的歲月中得以將此論文付梓成冊，並順利完成學業，要感謝的人實在太多太多了。首先感謝我的指導教授　俞淑惠老師，您總是不辭辛勞地諄諄教誨，且不時地教導我們為人處世與待人接物的方法和態度，讓我除了學習許多的專業知識外，也吸收了老師寶貴的經驗和想法，相信這些在我未來的人生旅途中都將受用無窮。

感謝　江淑玲老師和　黃士峰老師在百忙之中抽空擔任我碩士論文的口試委員，老師們不吝指正且給予諸多寶貴意見，讓我的論文更臻完善。感謝所有教導過我的老師們，在您們認真的指導下，總是令我獲益良多。感謝蘭屏姊悉心處理所上的大小事務，並不時提醒我們重要的時程以及所須注意的事項，讓我們得以安心地專注於學業。

也要感謝同窗六年的俊彥和榮憲，以及有幸成為同學的暄毅、宥彣和奕童，我們一起經歷了一些風風雨雨，也一起成長茁壯，謝謝你們的幫忙和照顧。還要感謝女友貞瑩，妳的傾聽、打氣與鼓勵，總是我拋開煩惱勇往直前的最大動力。感謝基祥學長和好友奇鴻時常與我討論問題，助我解決了不少難題，也感謝學長姊和學弟妹們，有你們使我這兩年的生活更增添色彩。

最後感謝我摯愛的父母以及家人，因為有你們的全力支持，才使我無後顧之憂地完成學業。感謝生命中其他的伙伴們，謝謝你們！在此時此刻，我已鼓足勇氣，準備邁向人生的下一個階段。

吳柏儒　謹上

中華民國 100 年 7 月

On Risk Measures, Corresponding Sensitivity Analyses, and Applications to Portfolio Selection

by

Bo-Ju Wu

Advisor

Shu-Hui Yu

Institute of Statistics,

National University of Kaohsiung

Kaohsiung, Taiwan 811 R.O.C.

July 2011

目錄

中文摘要.....v

英文摘要.....vi

第一章　緒論.....1

第二章　文獻回顧.....7

　第一節　標準差.....7

　第二節　半標準差.....9

　第三節　風險值.....10

　第四節　條件風險值.....12

　第五節　一致風險衡量指標.....15

　第六節　風險衡量指標的敏感度.....17

第三章　研究方法.....20

　第一節　風險衡量指標之模擬.....20

　第二節　敏感度分析.....22

第四章　模擬與實證分析.....28

　第一節　機率分配及其參數.....28

　第二節　門檻設定.....33

　第三節　風險衡量指標.....38

　第四節　敏感度.....46

第五章　結論.....52

參考文獻.....54

附錄一.....56

附錄二.....57

附錄三.....63

附錄四.....64

國立高雄大學 National University of Kaohsiung

附錄五.....72
附錄六.....76
附錄七.....86
附錄八.....91
附錄九.....96
附錄十.....97

國立高雄大學 National University of Kaohsiung

表目錄

表一：D_1的敘述統計量模擬值 32

表二：D_2的敘述統計量模擬值 32

表三：$\hat{L}$的敘述統計量模擬值 39

表四：使用各種風險衡量指標時三項投資標的之投資組合的實證結果 46

表五：三項投資標的之投資組合中風險衡量指標對參數敏感度的實證結果 51

表六：常見機率分配的條件風險值之封閉解 57

表七：常見機率分配的條件風險值之封閉解（續） 58

表八：常見機率分配的條件風險值之封閉解（續） 59

表九：以標準差作為風險衡量指標時兩項投資標的之投資組合的模擬結果 64

表十：以半標準差作為風險衡量指標時兩項投資標的之投資組合的模擬結果 65

表十一：以風險值作為風險衡量指標時兩項投資標的之投資組合的模擬結果 66

表十二：以條件風險值作為風險衡量指標時兩項投資標的之投資組合的模擬結果 67

表十三：以標準差作為風險衡量指標時三項投資標的之投資組合的模擬結果 72

表十四：以半標準差作為風險衡量指標時三項投資標的之投資組合的模擬結果 73

表十五：以風險值作為風險衡量指標時三項投資標的之投資組合的模擬結果 74

表十六：以條件風險值作為風險衡量指標時三項投資標的之投資組合的模擬結果 75

表十七：兩項投資標的之投資組合中風險衡量指標對單一參數的敏感度 86

表十八：兩項投資標的之投資組合中風險衡量指標對多重參數的敏感度 91

表十九：三項投資標的之投資組合中風險衡量指標對單一參數敏的感度 96

表二十：三項投資標的之投資組合中風險衡量指標對多重參數的敏感度 97

圖目錄

圖一：投資組合損失分配的風險值和條件風險值 13

圖二：以標準差作為風險衡量指標時兩項投資標的之投資組合的$\widehat{w}^*$ 68

圖三：以半標準差作為風險衡量指標時兩項投資標的之投資組合的$\widehat{w}^*$ 69

圖四：以風險值作為風險衡量指標時兩項投資標的之投資組合的$\widehat{w}^*$ 70

圖五：以條件風險值作為風險衡量指標時兩項投資標的之投資組合的$\widehat{w}^*$ 71

圖六：目標函數$f(w)$的圖形 77

圖七：兩項投資標的之投資組合中標準差對單一參數敏感度之點估計結果 87

圖八：兩項投資標的之投資組合中半標準差對單一參數敏感度之點估計結果 88

圖九：兩項投資標的之投資組合中風險值對單一參數敏感度之點估計結果 89

圖十：兩項投資標的之投資組合中條件風險值對單一參數敏感度之點估計結果 90

圖十一：兩項投資標的之投資組合中標準差對多重參數敏感度之點估計結果 92

圖十二：兩項投資標的之投資組合中半標準差對多重參數敏感度之點估計結果 93

圖十三：兩項投資標的之投資組合中風險值對多重參數敏感度之點估計結果 94

圖十四：兩項投資標的之投資組合中條件風險值對多重參數敏感度之點估計結果 95

各種不同風險衡量指標暨敏感度分析及其在投資組合上的應用

指導教授：俞淑惠　博士

國立高雄大學統計學研究所

學生：吳柏儒

國立高雄大學統計學研究所

摘要

在金融市場中，投資人進行投資組合的最佳資產配置時，會依據自身的風險態度，選擇一個合適的風險衡量指標。然而，隨著金融環境的景氣變動，投資人的風險態度也會隨之改變，所以對於不同景氣的金融環境，我們皆以標準差、半標準差、風險值和條件風險值作為風險衡量指標，比較投資組合的結果，使投資人可以依據其風險態度的變化，挑選合適的風險衡量指標。除此之外，本研究分別以理論和模擬方法計算出在投資組合中，各種風險衡量指標對於參數的敏感度，並比較兩者的結果。敏感度除了有簡化計算的功用外，還可用於探討當一些總體經濟指標發生改變時，其最佳資產配置下投資組合的風險將會如何變化。在多變的金融市場中，投資人該如何因應其隨著景氣變化而改變的風險態度，選擇不同的風險衡量指標，或是利用風險衡量指標的敏感度分析，預測其最佳資產配置下投資組合的風險變化，以改變投資策略，為本研究所討論的主題。

關鍵字：投資組合、風險態度、風險衡量指標、標準差、半標準差、風險值、條件風險值、敏感度分析

On Risk Measures, Corresponding Sensitivity Analyses, and Applications to Portfolio Selection

Advisor: Dr. Shu-Hui Yu
Institute of Statistics,
National University of Kaohsiung

Student: Bo-Ju Wu
Institute of Statistics,
National University of Kaohsiung

ABSTRACT

In financial markets, investors have to choose the optimal risk measure to find an asset allocation according to their different risk attitudes. However, investors may change their risk attitudes with the economic cycle. Hence, we compare the results of portfolio selections in the different economic environments by using standard deviation, semi-standard deviation, Value-at-Risk, and conditional Value-at-Risk as risk measures. Then investors can choose the optimal risk measure according to the changes of their risk attitudes. Furthermore, we use the theory and simulation method to calculate the sensitivities of the four risk measures in portfolio selection model, and compare the results of them. In addition to simplifying the calculations, sensitivities of the risk measures are used to measure the changes of risk of portfolio with the optimal asset allocation when the macroeconomics indicators change. The main objective of the paper is how investors choose the various risk measures according to the changes of their risk attitudes, or use the sensitivity analysis of risk measures to forecast the changes of risk of portfolio with the optimal asset allocation and change the plan of portfolio selection in the financial markets.

Keywords: portfolio selection, risk attitude, risk measure, standard deviation, semi-standard deviation, Value-at-Risk, conditional Value-at-Risk, sensitivity analysis

第一章　緒論

隨著科技發展日新月異，全球金融市場日益國際化與自由化，在蓬勃發展的金融市場中，完善的投資理財規劃是投資人一致追求的目標。當然，在完善的投資理財規劃中，良好的風險管理絕對是不可或缺的要素。隨著一次次金融危機的發生，投資人更加重視風險管理的重要性，如何在多變的金融市場中，進行投資組合的最佳資產配置時，將風險控制在一定水準之下，追求投資組合的最大預期收益，或是將預期收益設定在一定水準之上，尋找投資組合的最低風險，衍然已成為了投資人共同關心的課題之一。

然而，在金融市場中，投資人在進行投資組合的最佳資產配置時，要以什麼樣的方法來衡量風險呢？其實，每一位投資人的風險態度並不盡相同，積極的投資人願意承受較高的風險，追求投資組合較大的預期收益，而保守的投資人只願意承受較低的風險，安於投資組合較小的預期收益。所以，投資人必須依據自己的風險態度，選擇一個合適的風險衡量指標(risk measure)，作為衡量風險的方法，以進行投資組合的最佳資產配置。在本文中，我們分別介紹了標準差、半標準差（semi-standard deviation）、風險值(Value-at-Risk, VaR)和條件風險值(conditional Value-at-Risk, CVaR)這四種風險衡量指標，並比較其性質以及在投資組合應用模擬結果上的差異，繼而進行實證研究。

在金融市場中，投資人在期望獲得較大收益的同時，也必須考慮其投資所伴隨的風險。Markowitz (1952)提出了一個建立在嚴謹數學基礎上的投資組合理論，該理論考慮了整體投資組合的風險，在其建構的平均數-變異數模型(mean-variance model)中，變異數或標準差被當作一個風險衡量指標，此模型對於有相同投資標的之各種不同資產配置的投資組合，在給定投資組合標準差相同的條件下，找出預期收益最大的投資組合，或是給定投資組合預期收益相同的條

件下，找出標準差最小的投資組合，這些投資組合即為效率投資組合(efficient portfolio)，有最佳的資產配置。Markowitz 發展的投資組合理論，不僅考慮了整體投資組合的風險，更提供投資人一套求得效率投資組合的方法，對於金融經濟學有顯著的貢獻，因此在 1990 年時獲得諾貝爾經濟學獎(Nobel Prize in Economic Sciences)的殊榮。

雖然變異數或標準差在平均數-變異數模型中被當作一種風險衡量指標，但由於其具有對稱性(symmetric)，若以變異數或標準差來衡量風險高低，除了較大的投資組合損失會使變異數和標準差增加外，較大的投資組合收益也會導致變異數和標準差增加。由於以變異數和標準差作為風險衡量指標可能有失精確，因此 Markowitz 提出了使用半變異數(semi-variance)或半標準差作為另一種風險衡量指標，只有較大的投資組合損失會使半變異數和半標準差增加，修正了使用變異數和標準差在衡量風險上的缺失，此種方法在 Markowitz (1959)名為「Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment」的書中有提到。

Baumol (1963)建議使用的風險衡量指標，可視為風險值的起源，而在 1970 年代末期及 1980 年代，一些主要的金融機構為了衡量其內部各單位的風險，以進行自身的風險管理，因此發展出以風險值作為一種風險衡量指標，在 1994 年時，J.P. Morgan 集團更公開了其內部計算風險值的模型以及相關資料，大幅提升了風險值的知名度。若將風險值作為投資組合的風險衡量指標，Jorion (1997)將其定義為一投資組合在給定信心水準下，特定期間內的最大可能損失，由於其概念簡單且容易計算，且適用於比較不同類型投資組合的風險，因此除了被投資人廣為接受外，無論新舊版的巴賽爾資本協定(Basel Capital Accord)也都接受風險值作為一種衡量風險的指標。

雖然風險值具有一些良好的性質，但 Artzner et al. (1999)定義了一致風險衡量指標(coherent risk measure)，並證明風險值違背一致風險衡量指標四個公理中的次可加性(subadditivity)，也就是說使用風險值作為投資組合的風險衡量指標時，

違背了「整體投資組合的風險不會大於其投資標的風險之總和」的性質，而標準差和半標準差也不為一致風險衡量指標。Rockafellar and Uryasev (2002)證明了條件風險值滿足一致風險衡量指標全部的四個公理，可作為另一種風險衡量指標，並指出風險值只能顯示尾端事件並未發生時的最大可能損失，無法顯示出一旦發生尾端事件時的損失程度。Rockafellar and Uryasev (2000)將條件風險值定義為一服從連續型分配的投資組合，在給定信心水準下，其尾端機率區間內可能發生的平均損失，可顯示出一旦投資組合發生尾端事件時的損失程度。然而，Daníelsson et al. (2005)提出在大多數的實際應用中，風險值仍然滿足次可加性，Heyde et al. (2007)則建議以共單調次可加性(comonotonic subadditivity)取代次可加性這個公理，在這個基礎下定義出了自然風險統計量(natural risk statistic)，並證明風險值和條件風險值皆為自然風險統計量。

每一種風險衡量指標都具有各自的特性，投資人可以依據自己的風險態度，從以上四種風險衡量指標中挑選出最合適的。不過隨著金融環境的變化，投資人的風險態度也可能隨之改變，例如：當積極的投資人處於金融衰退的市場時，可能會趨於保守，而當保守的投資人面對景氣繁榮的市場時，也可能會轉為積極。所以在本文中，比較了上述的標準差、半標準差、風險值和條件風險值這四種風險衡量指標，在不同金融環境下投資組合應用模擬的結果，讓投資人可以依據自身在不同金融環境下所改變的風險態度，選擇最合適的風險衡量指標，以對於感興趣的投資標的進行最佳的資產配置。

假設投資組合中所有的投資標的雖具有不同的參數，但皆服從同一種機率分配，在其它條件不變下，當金融市場處於較不穩定的環境，其投資標的所服從機率分配的尾端就會較厚。若在投資組合中所有投資標的之平均數和變異數皆保持不變的條件下，當投資標的之機率分配為常態分配、雙指數分配(double exponential distribution)、t 分配和混合常態分配(mixture of normal distribution)，這些尾端厚度不同的分配時，分別代表金融環境不同的穩定程度。對於這些投資

標的具有不同機率分配的投資組合，以模擬方法分別使用標準差、半標準差、風險值和條件風險值這四種風險衡量指標，將風險控制在一定水準之下，找出該投資組合最大的預期收益時的最佳資產配置，繼而對最佳資產配置的投資組合之模擬結果進行抽樣，並分類比較。

兩項投資標的之投資組合的模擬結果顯示，在相對穩定的金融環境下，若以標準差或半標準差作為風險衡量指標，則其投資策略會較為積極，而以風險值或條件風險值作為風險衡量指標，其投資策略就較為保守；在相對不穩定的金融環境下，以風險值作為風險衡量指標時，其投資策略最為積極，其次是半標準差或標準差，而以條件風險值作為風險衡量指標最為保守。而三項投資標的之投資組合的模擬結果顯示，在相對穩定的金融環境下，若以風險值或條件風險值作為風險衡量指標，則其投資策略會較為積極，而以標準差或半標準差作為風險衡量指標，其投資策略就較為保守；在相對不穩定的金融環境下，以風險值作為風險衡量指標時，其投資策略最為積極。藉由以上結果，投資人除了可依據自身所處的金融環境，選擇最合適的風險衡量指標外，當金融環境的景氣變動時，還可以因應其隨著景氣變動而改變的風險態度，挑選不同的風險衡量指標。除此之外，在本文中我們也採用將預期收益設定在一定水準之上，尋找投資組合的最低風險的模型，進行風險衡量指標的敏感度分析(sensitivity analysis)，以探討當一些總體經濟指標發生改變時，其最佳資產配置下投資組合的風險變化程度之差異，並進行實證研究。

我們將投資組合損失表示為單一參數的一個函數，而風險衡量指標可以表示成該參數的一個函數，此函數在該參數處的偏微分，稱之為風險衡量指標對單一參數的敏感度，其表示當該參數每變動一單位時，會造成風險衡量指標多大的變動。在本文中，我們令投資人將預期收益設定在一定水準之上，尋找投資組合的最低風險，其最佳資產配置的投資組合損失，為其中一個感興趣投資標的損失的母體平均數之函數，而最佳資產配置下的風險衡量指標也可以表示成該投資標的

損失的母體平均數之函數，則在其母體平均數處的偏微分，即為我們所求之敏感度。

假設投資組合中所有的投資標的雖具有不同的參數，但皆服從同一種機率分配，若在所有投資標的之平均數和變異數皆保持不變的條件下，當投資標的之機率分配為常態分配、雙指數分配、t 分配和混合常態分配時，我們皆分別以標準差、半標準差、風險值和條件風險值作為風險衡量指標，在將預期收益設定在一定水準之上，尋找投資組合的最低風險之模型中，以統計模擬方法計算出在最佳資產配置下，風險衡量指標對於其中一個感興趣投資標的損失的母體平均數之敏感度。除了計算模擬值之外，也利用 Karush (1939)和 Kuhn and Tucker (1951)所提出的 Karush-Kuhn-Tucker 條件(Karush-Kuhn-Tucker conditions)中的充分條件做非線性規劃求解，可計算出最佳資產配置的投資組合損失，繼而使用風險衡量指標計算出其最佳資產配置的投資組合損失之風險，再於其中一個感興趣投資標的損失的母體平均數處偏微分，即可求得其敏感度之理論值。由模擬值或理論值的敏感度顯示，當使用標準差或半標準差作為風險衡量指標時，其敏感度和其投資標的所服從的機率分配無關，而以風險值或條件風險值作為風險衡量指標時，對於投資標的所服從的機率分配改變時，其敏感度也有所不同。

除此之外，我們也利用類似的概念計算在最佳資產配置下，風險衡量指標對多重參數的敏感度，表示當多重參數皆每變動一單位時，會造成風險衡量指標多大的變動。在相同的模型中，我們以統計模擬方法計算出在最佳資產配置下，風險衡量指標對於其中每一個感興趣投資標的損失的母體平均數之敏感度，研究結果顯示，其模擬值會大於風險衡量指標對單一參數的敏感度模擬值。

風險衡量指標的敏感度分析除了可用於探討在給定的模型中，當一些總體經濟指標發生改變時，其最佳資產配置下投資組合的風險變化程度之差異外，還有簡化計算的功用。在多變的金融市場中，投資人該如何因應其隨著景氣變化而改變的風險態度，選擇不同的風險衡量指標，或是利用風險衡量指標的敏感度分析，

預測其最佳資產配置下投資組合的風險變化，以改變投資策略，為本研究所討論的主題。

本論文的架構敘述如下：第一章簡述本論文的研究動機、目的和流程；第二章藉由回顧相關的文獻，介紹並討論本文所使用的風險衡量指標；第三章分別介紹本研究中風險衡量指標及其敏感度的模型和模擬流程；第四章藉由實際的數據進行模擬和實證研究，並分析與討論其結果；第五章為本研究做一個結論，並述說未來研究的內容。

國立高雄大學 National University of Kaohsiung

第二章　文獻回顧

近年來，由於金融環境的多變，投資人對於風險管理日益重視，產業界發展出許多風險衡量指標，作為衡量風險的方法，學術界也越來越多的文獻在探討各種風險衡量指標的性質，以及它們之間的異同。不同的風險衡量指標具有各自的特性，投資人可以依據自身的條件、需求和風險態度，選擇合適的風險衡量指標來衡量其投資組合的風險。本章將從文獻中探討一些常見的風險衡量指標，例如：標準差、半標準差、風險值和條件風險值，除了介紹這些風險衡量指標的性質以及估計方法，並比較它們之間的異同之外，也說明了一致風險衡量指標須具備的條件，最後再介紹一些風險衡量指標的敏感度。

第一節　標準差

Markowitz (1952)提出了一個建立在嚴謹數學基礎上的投資組合理論，該理論考慮了整體投資組合的風險，在其建構的平均數-變異數模型中，變異數或標準差被當作一個風險衡量指標，此模型對於有相同投資標的之各種不同資產配置的投資組合，在給定投資組合標準差相同的條件下，找出預期收益最大的投資組合，或是給定投資組合預期收益相同的條件下，找出標準差最小的投資組合，這些投資組合即為效率投資組合，有最佳的資產配置。

假設一個投資組合有k項投資標的，則其收益的隨機變數可表示為：

$$R = \sum_{i=1}^{k} w_i S_i ,$$

其中S_i為第i項投資標的之收益的隨機變數，w_i為第i項投資標的之配置權重，並滿足以下兩個的條件：

(一)、$\sum_{i=1}^{k} w_i = 1$，

(二)、$0 \le w_i \le 1$。

因此，投資組合的預期收益為：

$$E(R) = \sum_{i=1}^{k} w_i E(S_i)，$$

投資組合的變異數為：

$$\text{var}(R) = \sum_{1 \le i,j \le k} w_i w_j \text{Cov}(S_i, S_j)，$$

或是

$$\text{var}(R) = E(R - \mu_R)^2，$$

其中$\mu_R = E(R)$。類似地，令$L = -R$表示投資組合的損失的隨機變數，$D_i = -S_i$表示第i項投資標的之損失的隨機變數，則投資組合的變異數也可表示為：

$$\text{var}(L) = \sum_{1 \le i,j \le k} w_i w_j \text{Cov}(D_i, D_j)，$$

或是

$$\text{var}(L) = E(L - \mu_L)^2，$$

其中$\mu_L = E(L)$。故投資組合的標準差可表示為：

$$\text{sd}(L) = \sqrt{\sum_{1 \le i,j \le k} w_i w_j \text{Cov}(D_i, D_j)}，$$

或是

$$\text{sd}(L) = \sqrt{E(L - \mu_L)^2}。$$

令$L_1, L_2, \cdots, L_n$為n個來自獨立且有共同分配的隨機變數L之觀測值，我們令樣本標準差為標準差的估計量：

$$\widehat{\text{sd}}^{n}(L) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (L_i - \bar{L})^2}，\qquad (2.1.1)$$

其中$\bar{L}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}L_i$為$L$的樣本平均數，而$\widehat{\mathrm{sd}}^{n}(L)$為$\mathrm{sd}(L)$的不偏估計量(unbiased estimator)。

雖然變異數或標準差在平均數-變異數模型中被當作一種風險衡量指標，但由於其具有對稱性，若以變異數或標準差來衡量風險高低，除了較大的投資組合損失會使變異數和標準差增加外，較大的投資組合收益也會導致變異數和標準差增加，因此可能有失精確。

第二節　半標準差

由於變異數和標準差的對稱性導致其作為風險衡量指標時可能有失精確，因此 Markowitz 提出了使用半變異數或半標準差作為另一種風險衡量指標，只有較大的投資組合損失會使半變異數和半標準差增加，修正了使用變異數和標準差在衡量風險上的缺失。令L為投資組合損失的隨機變數，定義一個新的隨機變數L^{+}，當L大於其平均數μ_L時，令L^{+}為L與其平均數μ_L的差$L-\mu_L$，當L小於或等於其平均數μ_L時，則令L^{+}為0，而隨機變數L^{+}平方的期望值即為半變異數，可表示為：

$$\mathrm{svar}(L)=E(L^{+})^{2}，$$

其中

$$L^{+}=\begin{cases}L-\mu_L, & 若L>\mu_L，\\ 0 & ，若L\le\mu_L，\end{cases}$$

或可將半變異數表示為：

$$\mathrm{svar}(L)=E\left[(L-\mu_L)\cdot I_{\{L>\mu_L\}}\right]^{2}，$$

其中$I_{\{L>\mu_L\}}$為指示函數(indicator function)，此種方法在Markowitz (1959)名為「Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment」的書中有提到，而半變異數的平方根即為半標準差，可表示為：

$$\text{ssd}(L) = \sqrt{E\left[(L-\mu_L)\cdot I_{\{L>\mu_L\}}\right]^2}\,,$$

也可視為風險衡量指標。

令$L_1, L_2, \cdots, L_n$為n個來自獨立且有共同分配的隨機變數L之觀測值，我們令樣本半標準差為半標準差的估計量：

$$\widehat{\text{ssd}}^n(L) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}[(L_i-\bar{L})\cdot I_i]^2}\,, \tag{2.2.1}$$

其中

$$I_i = \begin{cases} 1, & 若 L_i > \bar{L}\,, \\ 0, & 若 L_i \le \bar{L}\,, \end{cases}$$

為與L_i對應的指示函數之觀測值，而$\widehat{\text{ssd}}^n(L)$為$\text{ssd}(L)$的不偏估計量。

在金融市場中，投資人並不擔心自己的投資組合會發生較大的收益，他們只害怕較大損失的發生。然而，無論是較大收益或是較大損失的發生都會導致變異數和標準差增加，而只有當損失大於期望損失時才會使得半變異數和半標準差增加。因此，半變異數和半標準差修正了使用變異數和標準差作為風險衡量指標時的缺失，更能精確地衡量風險。

第三節　風險值

Baumol (1963)建議使用$\mu + q\sigma$作為風險衡量指標，其中μ和σ分別為考慮分配的平均數和標準差，q為一主觀的信心水準參數，可視為風險值的起源。在 1970 年代末期及 1980 年代，一些主要的金融機構為了衡量其內部各單位的風險，以進行自身的風險管理，因此發展出以風險值作為一種風險衡量指標，在 1994 年時，J.P. Morgan 集團更公開了其內部計算風險值的模型以及相關資料，大幅提升

了風險值的知名度。若將風險值作為投資組合的風險衡量指標，Jorion (1997)將其定義為一投資組合在給定信心水準下，特定期間內的最大可能損失，換句話說，它是投資組合所服從的分配在給定信心水準下之分位數(quantile)。令L為投資組合損失的隨機變數，其累積分配函數為$F_L(l) = P(L \leq l)$，在給定信心水準$\alpha \in (0,1)$下，L的α-分位數被定義為$F_L(l)$的反函數：

$$F_L^{-1}(\alpha) = \inf[l|F_L(l) \geq \alpha]，$$

且L的α-分位數即為風險值，可表示為：

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = F_L^{-1}(\alpha)，$$

也就是說較大的投資組合損失會落在分配的$(1-\alpha)$-尾端。舉個例子來說，假設投資組合的損失L服從一個標準常態分配，若給定信心水準$\alpha = 95\%$，其風險值$\mathrm{VaR}_{95\%}(L) \fallingdotseq 1.645$，而若給定的信心水準$\alpha = 99\%$，其風險值$\mathrm{VaR}_{99\%}(L) \fallingdotseq 2.326$。

由於風險值的概念簡單且容易計算，且適用於比較不同類型投資組合的風險，因此除了被投資人廣為接受外，無論新舊版的巴賽爾資本協定也都接受風險值作為一種衡量風險的指標。在許多文獻中，甚至是金融集團都提供了一些方法來估計風險值，其中歷史模擬法(historical simulation method)只須蒐集過去一段時間內的歷史資料，不須要假設投資組合服從任何分配，即可計算出風險值，是一種簡單的估計方法。

令$L_1, L_2, \cdots, L_n$為n個來自獨立且有共同分配的隨機變數L之觀測值，我們使用以下的估計量來估計L在給定信心水準$\alpha \in (0,1)$下的風險值：

$$\widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha^n(L) = L_{[n\alpha]:n}，\qquad (2.3.1)$$

其中$L_{i:n}$表示為n個觀測值中第i個順序統計量，$[n\alpha]$表示為$n\alpha$的高斯符號，而Serfling (1980)證明了當$n \to \infty$時，$\widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha^n(L) \longrightarrow \mathrm{VaR}_\alpha(L)$為幾乎確實地(almost surely)收斂。

雖然風險值具有一些良好的性質，但 Artzner et al. (1999)定義了一致風險衡量指標，並證明風險值違背一致風險衡量指標四個公理中的次可加性。

Rockafellar and Uryasev (2002)證明了條件風險值滿足一致風險衡量指標全部的四個公理，可作為另一種風險衡量指標，並指出風險值只能顯示尾端事件並未發生時的最大可能損失，無法顯示出一旦發生尾端事件時的損失程度。

第四節　條件風險值

條件風險值又稱作期望短缺(expected shortfall)、期望尾端損失(expected tail loss)或最差條件期望值(worst conditional expectation)……等名稱，Rockafellar and Uryasev (2000)將其定義為一服從連續型分配的投資組合，在給定信心水準下，其尾端機率區間內可能發生的平均損失，換句話說，條件風險值即為給定投資組合損失超過風險值條件下的期望值，可顯示出一旦投資組合發生尾端事件時的損失程度。令L為投資組合損失的隨機變數，其服從連續型的分配，在給定信心水準$\alpha \in (0,1)$下，條件風險值可表示為：

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(L) = E[L|L > \mathrm{VaR}_\alpha(L)]\text{，} \tag{2.4.1}$$

其中$L > \mathrm{VaR}_\alpha(L)$表示損失大於其風險值，$L$位於其機率分配之右尾。由(2.4.1)式可知條件風險值也可表示成：

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_\beta(L)d\beta\ \text{，} \tag{2.4.2}$$

以及

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\mathrm{VaR}_\alpha(L)}^\infty l\cdot f(l)dl\ \text{，} \tag{2.4.3}$$

其中$f(l)$為L的機率密度函數。Pflug (2000)證明了L的條件風險值為在給定信心水準$\alpha \in (0,1)$下，可表示為一個隨機方程式：

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(L) = \inf_{q\in\mathbb{R}}\left[q + \frac{1}{1-\alpha}E(L-q)^+\right]\text{，}$$

其中$(L-q)^+ = \max[(L-q),0]$。而 Trindade et al. (2007)證明了$q = \mathrm{VaR}_\alpha(L)$為此隨機方程式的唯一解，因此$L$的條件風險值也可表示為：

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(L) = \mathrm{VaR}_\alpha(L) + \frac{1}{1-\alpha} E[L - \mathrm{VaR}_\alpha(L)]^+ , \qquad (2.4.4)$$

而由(2.4.3)式推導至(2.4.4)式的過程詳見附錄一。

Trindade et al. (2007)令$L_1, L_2, \cdots, L_n$為n個來自獨立且有共同分配的隨機變數L之觀測值，建議使用以下的估計量來估計L在給定信心水準$\alpha \in (0,1)$下的條件風險值：

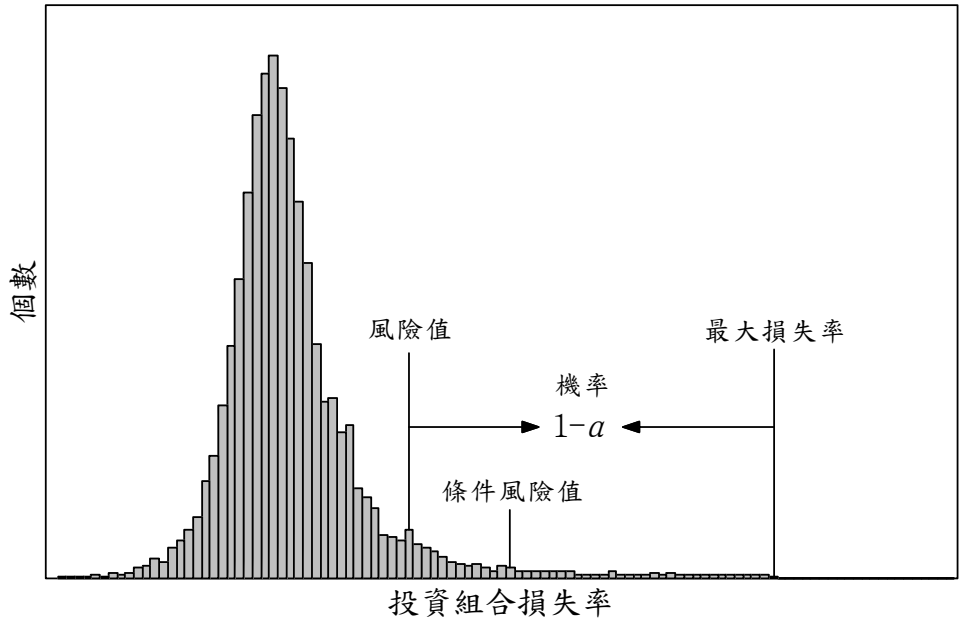
$$\widehat{\mathrm{CVaR}}_\alpha^n(L) = \inf_{q \in \mathbb{R}} \left[q + \frac{1}{n(1-\alpha)} \sum_{i=1}^{n} (L_i - q)^+ \right] ,$$

且由(2.4.4)式可得：

$$\widehat{\mathrm{CVaR}}_\alpha^n(L) = \widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha^n(L) + \frac{1}{n(1-\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \left[L_i - \widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha^n(L) \right]^+ , \qquad (2.4.5)$$

其中$\widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha^n(L)$同(2.3.1)式。下圖一為當投資組合損失的分配為已知時，使用風險值和條件風險值作為風險衡量指標時的關係，由於條件風險值為當投資組合損失超過風險值時，該區間內的平均損失，也就是$(1-\alpha)$-尾端內的平均損失，所以條件風險值恆大於或等於風險值。

圖一：投資組合損失分配的風險值和條件風險值



Andreev et al. (2005)提出了在給定特定邊際機率分配(marginal probability distribution)的條件下，條件風險值可以表示成封閉解(closed form)。此封閉解源自於 Bibby et al. (2005)和 Aït-Sahalia (1996)考慮了在給定指數自我相關函數(exponential autocorrelation function)和邊際機率分配下擴散(diffusion)的建構和估計。Aït-Sahalia (1996)使用了非參數模型取代了參數模型來估計邊際機率分配，並得到了一個非參數的估計量來估計擴散係數，而 Bibby et al. (2005)建構了擴散過程X，使得邊際機率分配落在集合$(l,u) \subset \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$，且有一個和在狀態空間$(l,u)$的 Lebesgue 測度(Lebesgue measure)有關的特定邊際機率密度函數f，此邊際機率密度函數f滿足連續的、有界的、在狀態空間(l,u)嚴格為正(strictly positive)且不為零以及擁有有限的變異數等性質。

令X_t為一平均數復歸過程(mean reverting process)的解：

$$dX_t = -\theta(X_t - \mu)\,dt + \sqrt{v(X_t)}\,dW_t \ , \tag{2.4.6}$$

其中$t \geq 0$，$\theta > 0$，$\mu \in (l,u)$且v為一定義在集合(l,u)中的非負函數使得以下條件成立：

$$\int_l^u v(X)\,f(X)\,dx < \infty \ , \tag{2.4.7}$$

其中

$$v(x) = \frac{2\theta \int_l^x (\mu - y) f(y)\,dy}{f(x)} = \frac{2\theta\mu F(x) - 2\theta \int_l^x y f(y)\,dy}{f(x)} \ , \tag{2.4.8}$$

其中$l < x < u$且F為邊際機率密度函數f的累積分配函數。對於不變的邊機機率密度函數f和自我相關函數$e^{-\theta t}$，時間序列X為平穩(stationary)且遍歷的(ergodic)。

Andreev et al. (2005)使用了上述的條件計算出條件風險值的封閉解。若由(2.4.6)式建構出時間序列X使得(2.4.7)式和(2.4.8)式成立，則X在給定信心水準$\alpha \in (0,1)$下，位於其機率分配右尾的$\mathrm{CVaR}_\alpha(X)$可表示為：

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(X) = \mu + \frac{v\big(\mathrm{VaR}_\alpha(X)\big)}{2\theta} \frac{f\big(\mathrm{VaR}_\alpha(X)\big)}{1 - F\big(\mathrm{VaR}_\alpha(X)\big)} \ , \tag{2.4.9}$$

而由(2.4.3)式推導至(2.4.9)式的過程詳見附錄一。

有了上述的結果，在給定邊際機率密度函數的條件下，便可以簡單地計算出滿足條件的機率密度函數之條件風險值。附錄二列出了一些常見機率分配的條件風險值之封閉解，並進行部分機率分配其條件風險值封閉解的推導。

第五節　一致風險衡量指標

Artzner et al. (1999)定義了一致風險衡量指標ρ:$Z \to \mathbb{R}$，其中Z表示損失，須滿足以下四個公理：

(一)、次可加性：對所有$z_1, z_2 \in Z$，滿足$\rho(z_1 + z_2) \leq \rho(z_1) + \rho(z_2)$。

(二)、正齊次性(positive homogeneity)：對所有$z \in Z$，$\lambda > 0$且$\lambda \in \mathbb{R}$，滿足$\rho(\lambda z) = \lambda\rho(z)$。

(三)、單調性(Monotonicity)：對所有$z_1, z_2 \in Z$，若$z_1 \leq z_2$，則滿足$\rho(z_1) \leq \rho(z_2)$。

(四)、平移不變性(Transitional invariance)：對所有$z \in Z$，$c \in \mathbb{R}$，滿足$\rho(z + c) = \rho(z) + c$。

第一個公理次可加性，其想法為當投資組合的投資多樣化時，不會導致更多風險的產生，也就是說，整體投資組合的風險不會大於其投資標的風險之總和。例如：股票大盤的風險不會大於單一個股的風險。使用一個滿足次可加性的風險衡量指標來衡量一個投資多樣化投資標的之投資組合風險，會小於或等於衡量投資單一投資標的之投資組合風險的總和。

第二個公理正齊次性，其表示一種流動性的概念。當投資一項較大的投資標的λz時，其流動性應該要小於或等於投資λ個較小的投資標的z，所以投資較大的投資標的λz時的風險也應該要大於或等於投資λ個較小投資標的z的風險之總和，表示成$\rho(\lambda z) \geq \lambda\rho(z)$。將此結果和一致風險衡量指標的第一個公理取交集，即為$\rho(\lambda z) = \lambda\rho(z)$。

第三個公理單調性，表示當投資標的z_1的損失恆小於或等於投資標的z_2的損失時，投資標的z_1的風險當然也要小於或等於投資標的z_2的風險，這是對於一個合理風險衡量指標的基本要求。而第四個公理平移不變性，表示若投資標的的損失增加c，則該投資標的之風險也會增加c。

若ρ滿足次可加性和正齊次性，則此風險衡量指標具備凸性(convex)，若ρ具備凸性、單調性和平移不變性則為一致風險衡量指標。風險衡量指標滿足一致風險衡量指標是相當重要的，若風險衡量指標違背一致風險衡量指標的任何一個公理，將導致與常理有嚴重不一致的結果。

一致風險衡量指標具備這些良好的特性，Rockafellar and Uryasev (2002)證明了條件風險值滿足一致風險衡量指標全部的四個公理，為一個優良的風險衡量指標，但 Artzner et al. (1999)證明風險值違背一致風險衡量指標四個公理中的次可加性，而標準差和半標準差也不為一致風險衡量指標。以下的例子說明了風險值並不滿足一致風險衡量指標的次可加性。

令Z_1和Z_2為兩個獨立且有共同分配之隨機變數，其機率密度函數皆為：

$$f_Z(z)=\begin{cases}0.95, & 若-1\le z\le 0，\\ 0.025, & 若\ 0<z\le 2。\end{cases}$$

在95%信心水準的條件下，無論Z_1或是Z_2的風險值皆等於零，且可以簡單地計算出Z_1+Z_2的風險值會大於零，也就是：

$$\mathrm{VaR}_{95\%}(Z_1+Z_2)>\mathrm{VaR}_{95\%}(Z_1)+\mathrm{VaR}_{95\%}(Z_2)=0，$$

所以風險值不滿足次可加性。

然而，Daníelsson et al. (2005)提出在大多數的實際應用中，風險值仍然滿足次可加性，Heyde et al. (2007)則建議以共單調次可加性(comonotonic subadditivity)取代次可加性這個公理，在這個基礎下定義出了自然風險統計量(natural risk statistic)，並證明風險值和條件風險值皆為自然風險統計量。

第六節　風險衡量指標的敏感度

假設損失是一些參數的函數，例如：投資組合的損失經常為利率或是投資標的價格波動的隨機函數。而損失的風險衡量指標也會是這些參數的函數，對於這些函數的偏微分即稱為風險衡量指標的敏感度，表示當參數每變動一單位時，會造成風險衡量指標多大的變動。敏感度在風險管理、證明模型適合度(model adequacy)和求解隨機最適問題(stochastic optimization problem)中，都是十分有用的。

Hong and Liu (2009)假設一損失的隨機變數L，將其表示為一參數θ的函數$L(\theta)$，令θ為一維的且$\theta \in \Theta$，其中$\Theta \subset \Re$為一開集合。若$L(\theta) = h(\theta,D)$，其中D為隨機變數或隨機向量，則其在參數θ處的偏微分表示為$L'(\theta) = \frac{\partial h(\theta,D)}{\partial \theta}$。對於所有$\theta \in \Theta$，令$\mathrm{VaR}_\alpha(\theta)$和$\mathrm{CVaR}_\alpha(\theta)$表示在給定信心水準$\alpha \in (0,1)$下，$L(\theta)$的風險值和條件風險值，皆為參數$\theta$的函數。給定以下三個假設：

假設 2.6.1　存在一個隨機變數K且$E(K) < \infty$，使得對於所有$\theta_1,\theta_2 \in \Theta$，皆滿足$|L(\theta_2) - L(\theta_1)| \le K|\theta_2 - \theta_1|$，且對於所有$\theta \in \Theta$，$L'(\theta)$皆幾乎確實地存在。

假設 2.6.2　對於所有$\theta \in \Theta$，風險值函數$\mathrm{VaR}_\alpha(\theta)$皆為可微的(differentiable)。

假設 2.6.3　對於所有$\theta \in \Theta$，$\Pr[L(\theta) = \mathrm{VaR}_\alpha(\theta)] = 0$。

定理 2.6.1　若滿足**假設 2.6.1**、**假設 2.6.2** 和**假設 2.6.3**，則對於所有$\theta \in \Theta$，

$$\mathrm{CVaR}'_\alpha(\theta) = E[L'(\theta)|L(\theta) > \mathrm{VaR}_\alpha(\theta)]。$$

由(2.4.2)式再加上一些技巧性的條件可得：

$$(1-\alpha)\mathrm{CVaR}'_\alpha(\theta) = \int_\alpha^1 VaR'_\beta(L)d\beta 。 \qquad (2.6.1)$$

由Hong and Liu (2009)所提出的**定理2.6.1**可得：

$$(1-\alpha)\mathrm{CVaR}'_\alpha(\theta) = E\left[L'(\theta)\cdot 1_{\{L(\theta)>\mathrm{VaR}_\alpha(\theta)\}}\right]$$

$$= \int_{\alpha}^{1} E[L'(\theta)|L(\theta) = \mathrm{VaR}_{\alpha}(\theta)]d\beta \text{ 。} \qquad (2.6.2)$$

由(2.6.1)式和(2.6.2)式再加上一些技巧性的條件可得：

$$\mathrm{VaR}'_{\alpha}(\theta) = E[L'(\theta)|L(\theta) = \mathrm{VaR}_{\alpha}(\theta)]\text{，}$$

此結果和Hong (2009)所導出的結果相同。

Hong (2009)證明了$\mathrm{VaR}'_{\alpha}(\theta)$的極小擾動分析(infinitesimal perturbation analysis)估計量為：

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{VaR}}_{\alpha}^{n\,\prime}(\theta) &= \lim_{\delta\to 0}\frac{\widehat{\mathrm{VaR}}_{\alpha}^{n}(\theta+\delta) - \widehat{\mathrm{VaR}}_{\alpha}^{n}(\theta)}{\delta} \\ &= \lim_{\delta\to 0}\frac{h\left(\theta+\delta, D_{[n\alpha]:n}\right) - h\left(\theta, D_{[n\alpha]:n}\right)}{\delta} \\ &= \frac{\partial h\left(\theta, D_{[n\alpha]:n}\right)}{\partial\theta}\text{，}\end{aligned}$$

可寫成：

$$\widehat{\mathrm{VaR}}_{\alpha}^{n\,\prime}(\theta) = \left.\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta}\right|_{L(\theta)=\widehat{\mathrm{VaR}}_{\alpha}^{n}(\theta)} \text{ 。}$$

Hong and Liu (2009)令$L_1(\theta), L_2(\theta), \cdots, L_n(\theta)$和$L'_1(\theta), L'_2(\theta), \cdots, L'_n(\theta)$分別為$n$個來自獨立且有共同分配的隨機變數$L(\theta)$，和其在參數$\theta$處的偏微分$L'(\theta)$之觀測值，使用這些觀測值來估計條件風險值對於參數$\theta$的敏感度$\mathrm{CVaR}'_{\alpha}(\theta)$，由**定理2.6.1**可得：

$$\begin{aligned}\mathrm{CVaR}'_{\alpha}(\theta) &= E[L'(\theta)|L(\theta) > \mathrm{VaR}_{\alpha}(\theta)] \\ &= \frac{1}{1-\alpha}E\left[L'(\theta)\cdot 1_{\{L(\theta)>\mathrm{VaR}_{\alpha}(\theta)\}}\right]\text{，}\end{aligned}$$

則提出以下條件風險值對於參數θ的敏感度$\mathrm{CVaR}'_{\alpha}(\theta)$之估計量：

$$\widehat{\mathrm{CVaR}}_{\alpha}^{n\,\prime}(\theta) = \frac{1}{n(1-\alpha)}\sum_{i=1}^{n} L'_i(\theta)\cdot 1_{\{L_i(\theta)>\widehat{\mathrm{VaR}}_{\alpha}^{n}(\theta)\}}\text{，}$$

其中$\widehat{\mathrm{VaR}}_{\alpha}^{n}(\theta)$同(2.3.1)式，為$\mathrm{VaR}_{\alpha}(\theta)$的強一致估計量(strongly consistent estimator)，並證明了$\widehat{\mathrm{CVaR}}_{\alpha}^{n\,\prime}(\theta)$也為$\mathrm{CVaR}'_{\alpha}(\theta)$的強一致估計量。

若一投資組合損失的隨機變數為$L(\theta)$，θ為其中一項投資標的之參數，則風險衡量指標ρ也會是參數θ的函數，對於不同的參數θ都會有相對應的$\rho(\theta)$。而函數$\rho(\theta)$在其參數θ處的偏微分$\rho'(\theta) = \frac{\partial \rho(\theta)}{\partial \theta}$，即為風險衡量指標$\rho$對於參數$\theta$的敏感度。風險衡量指標的敏感度在風險管理中是相當重要的，它不僅有簡化計算的功用，更反應了在不同金融環境下的風險變動。

國立高雄大學 National University of Kaohsiung

第三章　研究方法

投資人在進行投資組合的最佳資產配置時，可將風險控制在一定水準之下，追求投資組合的最大預期收益，或是將預期收益設定在一定水準之上，尋找投資組合的最低風險。本章將利用這兩種方法，分別對風險衡量指標和風險衡量指標的敏感度進行模擬研究之設計。

第一節　風險衡量指標之模擬

一、模型介紹

假設$D_1,D_2,\cdots,D_k$為k項投資人所感興趣的投資標的損失之隨機變數，則其投資組合損失的隨機變數為

$$\begin{aligned} L &= w_1D_1 + w_2D_2 + \cdots + w_kD_k \\ &= \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{D}， \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

其中$\boldsymbol{w}^T = (w_1,w_2,\cdots,w_k)$分別為$\boldsymbol{D}^T = (D_1,D_2,\cdots,D_k)$這$k$項投資標的資產配置之權重。我們使用風險衡量指標將投資組合風險控制在一定水準之下，追求投資組合最大的預期收益，可表示成：

$$\begin{cases} \text{Max.} & E(-L)， \\ \text{s.t.} & \rho(L) \le H_\rho， \\ & \boldsymbol{w}^T \cdot \mathbf{1} = 1， \\ & \boldsymbol{w} \ge \mathbf{0}， \end{cases} \tag{3.1.2}$$

其中ρ為風險衡量指標，H_ρ為風險衡量指標ρ的上限門檻(threshold)，$\mathbf{1}^T = (1,1,\cdots,1)$，$\mathbf{0}^T = (0,0,\cdots,0)$。在$D_1,D_2,\cdots,D_k$所服從的機率分配為已知的情況下，

由(3.1.2)式可能求得一組$\boldsymbol{w}^*$，為這k項投資標的最佳資產配置的權重，以及在最佳資產配置下投資組合的預期收益$E(-L)^*$和風險衡量指標$\rho(L)^*$。

二、模擬流程

由(3.1.2)式可得估計量模型：

$$\begin{cases} \text{Max.} & -\bar{L}\,, \\ \text{s.t.} & \hat{\rho}(L) \le H_\rho\,, \\ & \boldsymbol{w}^T \cdot \mathbf{1} = 1\,, \\ & \boldsymbol{w} \ge \mathbf{0}\,, \end{cases} \tag{3.1.3}$$

其中$\hat{\rho}$為風險衡量指標估計量。

投資人通常會考慮過去一段時間的歷史資料，以決定當前投資組合的最佳資產配置。若以標準差或半標準差作為風險衡量指標時，由(3.1.1)式，我們從$\boldsymbol{D}$隨機抽樣 20 組觀測值$\boldsymbol{D}_1,\boldsymbol{D}_2,\cdots,\boldsymbol{D}_{20}$，但由於巴賽爾銀行監理委員會 (Basel Committee on Banking Supervision)規範在計算風險值時，所選擇的歷史觀測值至少要一年以上，所以若以風險值或條件風險值作為風險衡量指標時，我們從$\boldsymbol{D}$隨機抽樣 250 組觀測值$\boldsymbol{D}_1,\boldsymbol{D}_2,\cdots,\boldsymbol{D}_{250}$，這些觀測值可視為各投資標的過去 20 日或 250 日的歷史資料，則可得：

$$L_1 = \boldsymbol{w}_1^T \boldsymbol{D}_1\,,$$

$$L_2 = \boldsymbol{w}_1^T \boldsymbol{D}_2\,,$$

$$\vdots$$

$$L_{20} = \boldsymbol{w}_1^T \boldsymbol{D}_{20}\,,$$

或是

$$L_1 = \boldsymbol{w}_1^T \boldsymbol{D}_1\,,$$

$$L_2 = \boldsymbol{w}_1^T \boldsymbol{D}_2\,,$$

$$\vdots$$

$$L_{250} = \boldsymbol{w}_1^T \boldsymbol{D}_{250}，$$

經由(3.1.3)式的計算，可能求得一組$\widehat{\boldsymbol{w}}_1^*$，為這$k$項投資標的最佳資產配置的權重，其中若以風險值或條件風險值作為風險衡量指標時，使用歷史模擬法來計算其值。重複以上步驟 2,000 次，可得到m組最佳資產配置的權重$\widehat{\boldsymbol{w}}_1^*, \widehat{\boldsymbol{w}}_2^*, \cdots, \widehat{\boldsymbol{w}}_m^*$，在最佳資產配置下的投資組合損失之隨機變數為$L_1^*, L_2^*, \cdots, L_m^*$為：

$$L_1^* = \widehat{\boldsymbol{w}}_1^{*T} \boldsymbol{D}，$$

$$L_2^* = \widehat{\boldsymbol{w}}_2^{*T} \boldsymbol{D}，$$

$$\vdots$$

$$L_m^* = \widehat{\boldsymbol{w}}_m^{*T} \boldsymbol{D}，$$

其中$0 \le m \le 2{,}000$，我們再分別從$L_1^*, L_2^*, \cdots, L_m^*$各隨機抽樣 20 筆觀測值，計算出這$m$個隨機變數的觀測值之收益平均數$-\bar{L}_1^*, -\bar{L}_2^*, \cdots, -\bar{L}_m^*$和風險衡量指標$\hat{\rho}_1^*, \hat{\rho}_2^*, \cdots, \hat{\rho}_m^*$，並對其進行$\hat{\rho}(L) \le H_\rho$和$\hat{\rho}(L) > H_\rho$時的分類及分析。

第二節　敏感度分析

一、單一參數模型

假設$D_1, D_2, \cdots, D_k$為k項投資人所感興趣的投資標的損失之隨機變數，則其投資組合損失的隨機變數為

$$\begin{aligned} L &= w_1 D_1 + w_2 D_2 + \cdots + w_k D_k \\ &= \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{D}， \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

其中$\boldsymbol{w}^T = (w_1, w_2, \cdots, w_k)$分別為$\boldsymbol{D}^T = (D_1, D_2, \cdots, D_k)$這$k$項投資標的資產配置之權重。令$D_1$為其母體平均數$\mu_{D_1}$的函數$D_1(\mu_{D_1})$，則$L$也可表示成$\mu_{D_1}$的一個函數：

$$L(\mu_{D_1}) = w_1 D_1(\mu_{D_1}) + w_2 D_2 + \cdots + w_k D_k。$$

我們將投資組合預期收益控制在一定水準之上，尋找投資組合$L(\mu_{D_1})$最低的風險，可表示為：

$$\begin{cases} \min. & \rho\left(L(\mu_{D_1})\right), \\ \text{s.t.} & E\left(-L(\mu_{D_1})\right) \geq H_E, \\ & \boldsymbol{w}^T \cdot \mathbf{1} = 1, \\ & \boldsymbol{w} \geq \mathbf{0}, \end{cases} \tag{3.2.2}$$

其中ρ為風險衡量指標，H_E為預期收益的下限門檻，$\mathbf{1}^T = (1,1,\cdots,1)$，$\mathbf{0}^T = (0,0,\cdots,0)$。在$D_1, D_2, \cdots, D_k$所服從的機率分配為已知的情況下，由(3.2.2)式可能求得目標函數$\rho\left(L(\mu_{D_1})\right)^*$，則在投資組合中，風險衡量指標$\rho^*$對於參數$\mu_{D_1}$的敏感度，即為函數$\rho\left(L(\mu_{D_1})\right)^*$在其參數$\mu_1$處的偏微分，可表示為：

$$\begin{aligned} \rho'(\mu_{D_1})^* &= \frac{\partial \rho\left(L(\mu_{D_1})\right)^*}{\partial \mu_{D_1}} \\ &= \lim_{\Delta\mu_{D_1}\to 0} \frac{\rho\left(L(\mu_{D_1}+\Delta\mu_{D_1})\right)^* - \rho\left(L(\mu_{D_1})\right)^*}{\Delta\mu_{D_1}}。 \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

令$\tilde{L}$為其它條件不變下，當D_1的母體平均數μ_{D_1}有極小變動量$\Delta\mu_{D_1}$時之投資組合損失，由於$\frac{\Delta D_1}{\Delta\mu_{D_1}} = 1$，故$\tilde{L}$可表示為：

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= \tilde{w}_1(D_1 + \Delta D_1) + \tilde{w}_2 D_2 + \tilde{w}_3 D_3 + \cdots + \tilde{w}_k D_k \\ &= \tilde{\boldsymbol{w}}^T \tilde{\boldsymbol{D}}, \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

其中$\tilde{\boldsymbol{w}}^T = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3, \cdots, \tilde{w}_k)$分別為$\tilde{\boldsymbol{D}}^T = (D_1 + \Delta D_1, D_2, D_3, \cdots, D_k)$這$k$項投資標的資產配置之權重。由(3.2.1)式和(3.2.4)式，我們將投資組合預期收益控制在一定水準之上，尋找投資組合L和$\tilde{L}$最低的風險，可分別表示為：

$$\begin{cases} \min. & \rho(L), \\ \text{s.t.} & E(-L) \geq H_E, \\ & \boldsymbol{w}^T \cdot \mathbf{1} = 1, \\ & \boldsymbol{w} \geq \mathbf{0}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \min. & \rho(\tilde{L}), \\ \text{s.t.} & E(-\tilde{L}) \geq H_E, \\ & \tilde{\boldsymbol{w}}^T \cdot \mathbf{1} = 1, \\ & \tilde{\boldsymbol{w}} \geq \mathbf{0}, \end{cases} \tag{3.2.5}$$

在$D_1, D_2, \cdots, D_k$所服從的機率分配為已知的情況下，由(3.2.5)式分別可能求得目標函數$\rho(L)^*$和$\rho(\tilde{L})^*$，則由(3.2.3)式可知，在投資組合中，風險衡量指標ρ^*對於參數μ_{D_1}的敏感度也可表示為：

$$\rho'(\mu_{D_1})^* = \lim_{\Delta D_1 \to 0} \frac{\rho(\tilde{L})^* - \rho(L)^*}{\Delta D_1} \text{。} \tag{3.2.6}$$

二、單一參數模擬流程

由(3.2.5)式可得估計量模型：

$$\begin{cases} \min. & \hat{\rho}(L)\text{，} \\ \text{s.t.} & -\bar{L} \geq H_E\text{，} \\ & \boldsymbol{w}^T \cdot \mathbf{1} = 1\text{，} \\ & \boldsymbol{w} \geq \mathbf{0}\text{，} \end{cases} \qquad \begin{cases} \min. & \hat{\rho}(\tilde{L})\text{，} \\ \text{s.t.} & -\bar{\tilde{L}} \geq H_E\text{，} \\ & \tilde{\boldsymbol{w}}^T \cdot \mathbf{1} = 1\text{，} \\ & \tilde{\boldsymbol{w}} \geq \mathbf{0}\text{，} \end{cases} \tag{3.2.7}$$

其中$\hat{\rho}$為風險衡量指標估計量。

由(3.2.1)式，我們從$\boldsymbol{D}$隨機抽樣n筆觀測值，且令$\Delta\mu_{D_1} = \Delta D_1 = 0.0001$，則由(3.2.1)式和(3.2.4)式可得：

$$L_1 = \boldsymbol{w}_1^T \boldsymbol{D}_1\text{，}$$

$$L_2 = \boldsymbol{w}_1^T \boldsymbol{D}_2\text{，}$$

$$\vdots$$

$$L_n = \boldsymbol{w}_1^T \boldsymbol{D}_n\text{，}$$

以及

$$\tilde{L}_1 = \tilde{\boldsymbol{w}}_1^T \tilde{\boldsymbol{D}}_1\text{，}$$

$$\tilde{L}_2 = \tilde{\boldsymbol{w}}_1^T \tilde{\boldsymbol{D}}_2\text{，}$$

$$\vdots$$

$$\tilde{L}_n = \tilde{\boldsymbol{w}}_1^T \tilde{\boldsymbol{D}}_n\text{，}$$

經由(3.2.7)式的計算，可能求得目標函數$\hat{\rho}_1(L)^*$和$\hat{\rho}_1\left(\tilde{L}\right)^*$，則風險衡量指標$\rho$對於參數$\mu_{D_1}$的敏感度之估計值為：

$$\hat{\rho}_1^{n\prime}\left(\mu_{D_1}\right)^* = \frac{\hat{\rho}_1^n\left(\tilde{L}\right)^* - \hat{\rho}_1^n(L)^*}{\Delta D_1}$$
$$= \frac{\hat{\rho}_1^n\left(\tilde{L}\right)^* - \hat{\rho}_1^n(L)^*}{0.0001},$$

重複以上步驟 2,000 次，可得到m個風險衡量指標ρ^*對於參數μ_{D_1}的敏感度估計值$\hat{\rho}_1^{n\prime}\left(\mu_{D_1}\right)^*, \hat{\rho}_2^{n\prime}\left(\mu_{D_1}\right)^*, \cdots, \hat{\rho}_m^{n\prime}\left(\mu_{D_1}\right)^*$，其中$0 \le m \le 2000$，取其平均後即為風險衡量指標$\rho^*$對於參數$\mu_{D_1}$的敏感度之模擬值$\hat{\rho}^{n\prime}\left(\mu_{D_1}\right)^*$。

三、多重參數模型

假設$D_1, D_2, \cdots, D_k$為k項投資人所感興趣的投資標的損失之隨機變數，則其投資組合損失的隨機變數為

$$L = w_1 D_1 + w_2 D_2 + \cdots + w_k D_k$$
$$= \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{D}, \quad (3.2.8)$$

其中$\boldsymbol{w}^T = (w_1, w_2, \cdots, w_k)$分別為$\boldsymbol{D}^T = (D_1, D_2, \cdots, D_k)$這$k$項投資標的資產配置之權重。令$\tilde{L}$為其它條件不變下，當$D_1, D_2, \cdots, D_k$的母體平均數皆有極小變動量為$\Delta\mu_D$時之投資組合損失，由於$\frac{\Delta D_1}{\Delta\mu_D} = 1, \frac{\Delta D_2}{\Delta\mu_D} = 1, \cdots, \frac{\Delta D_k}{\Delta\mu_D} = 1$，故令$\Delta D = \Delta D_1 = \Delta D_2 = \cdots = \Delta D_k$，$\tilde{L}$可表示為：

$$\tilde{L} = \tilde{w}_1(D_1 + \Delta D) + \tilde{w}_2(D_2 + \Delta D) + \cdots + \tilde{w}_k(D_k + \Delta D)$$
$$= \tilde{\boldsymbol{w}}^T \tilde{\boldsymbol{D}}, \quad (3.2.9)$$

其中$\tilde{\boldsymbol{w}}^T = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3, \cdots, \tilde{w}_k)$分別為$\tilde{\boldsymbol{D}}^T = (D_1 + \Delta D, D_2 + \Delta D, \cdots, D_k + \Delta D)$這$k$項投資標的資產配置之權重。我們將投資組合預期收益控制在一定水準之上，尋找投資組合L和$\tilde{L}$最低的風險，如(3.2.5)式所示。在$D_1, D_2, \cdots, D_k$所服從的機率分配為

已知的情況下，由(3.2.5)式可能求得目標函數$\rho(L)^*$和$\rho\left(\tilde{L}\right)^*$，則在投資組合中，風險衡量指標$\rho^*$對於參數$\mu_{D_1},\mu_{D_2},\cdots,\mu_{D_k}$的敏感度，我們將其表示為：

$$\rho'\left(\mu_{D_1},\mu_{D_2},\cdots,\mu_{D_k}\right)=\lim_{\Delta D\to 0}\frac{\rho\left(\tilde{L}\right)^*-\rho(L)^*}{\Delta D}\text{。}$$

四、多重參數模擬流程

由(3.2.8)式，我們分別從$\boldsymbol{D}$隨機抽樣n筆觀測值，且令$\Delta\mu_D=\Delta D=0.0001$，則由(3.2.8)式和(3.2.9)式可得：

$$L_1=\boldsymbol{w}_1^T\boldsymbol{D}_1\text{，}$$

$$L_2=\boldsymbol{w}_1^T\boldsymbol{D}_2\text{，}$$

$$\vdots$$

$$L_n=\boldsymbol{w}_1^T\boldsymbol{D}_n\text{，}$$

以及

$$\tilde{L}_1=\tilde{\boldsymbol{w}}_1^T\tilde{\boldsymbol{D}}_1\text{，}$$

$$\tilde{L}_2=\tilde{\boldsymbol{w}}_1^T\tilde{\boldsymbol{D}}_2\text{，}$$

$$\vdots$$

$$\tilde{L}_n=\tilde{\boldsymbol{w}}_1^T\tilde{\boldsymbol{D}}_n\text{，}$$

經過如(3.2.7)式所示的估計量模型之計算，可能求得目標函數$\hat{\rho}_1(L)^*$和$\hat{\rho}_1\left(\tilde{L}\right)^*$，則風險衡量指標$\rho^*$對於參數$\mu_{D_1},\mu_{D_2},\cdots,\mu_{D_k}$的敏感度之估計值為：

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_1^{n\prime}\left(\mu_{D_1},\mu_{D_2},\cdots,\mu_{D_k}\right)^*&=\frac{\hat{\rho}_1^n\left(\tilde{L}\right)^*-\hat{\rho}_1^n(L)^*}{\Delta D}\\&=\frac{\hat{\rho}_1^n\left(\tilde{L}\right)^*-\hat{\rho}_1^n(L)^*}{0.0001}\text{，}\end{aligned}$$

重複以上步驟 2,000 次，可得到m個風險衡量指標ρ對於參數$\mu_{D_1},\mu_{D_2},\cdots,\mu_{D_k}$的敏感度估計值$\hat{\rho}_1^{n\prime}\left(\mu_{D_1},\mu_{D_2},\cdots,\mu_{D_k}\right)^*,\hat{\rho}_2^{n\prime}\left(\mu_{D_1},\mu_{D_2},\cdots,\mu_{D_k}\right)^*,\cdots,\hat{\rho}_m^{n\prime}\left(\mu_{D_1},\mu_{D_2},\cdots,\mu_{D_k}\right)^*$，

其中$0 \leq m \leq 2000$，取其平均後即為風險衡量指標ρ^*對於參數$\mu_{D_1},\mu_{D_2},\cdots,\mu_{D_k}$的敏感度之模擬值$\hat{\rho}^{n'}\left(\mu_{D_1},\mu_{D_2},\cdots,\mu_{D_k}\right)^*$。

國立高雄大學 National University of Kaohsiung

第四章　模擬與實證分析

在本研究中考慮了兩項投資標的和三項投資標的之投資組合，我們計算了2010年英特爾公司(Intel Corporation, INTC)股票、花旗集團(Citigroup, C)股票和華盛頓郵報公司(The Washington Post Company, WPO)股票的每日收益，其中英特爾公司股票的每日收益之平均數約為0.016%，標準差約為1.589%，花旗集團股票的每日收益之平均數約為0.160%，標準差約為2.390%，而華盛頓郵報公司股票的每日收益之平均數約為0.020%，標準差約為2.102%。假設S_1、S_2和S_3分別為INTC、C和WPO這三項投資人所感興趣的投資標的收益之隨機變數，則S_1的平均數百分比$\mu_{S_1} = 0.016$，標準差百分比$\sigma_{S_1} = 1.589$，S_2的平均數百分比$\mu_{S_2} = 0.160$，標準差百分比$\sigma_{S_2} = 2.390$，而S_3的平均數百分比$\mu_{S_3} = 0.020$，標準差百分比$\sigma_{S_3} = 2.102$。若令其投資標的損失的隨機變數分別為$D_1 = -S_1$、$D_2 = -S_2$和$D_3 = -S_3$，則D_1的平均數百分比$\mu_{D_1} = -0.016$，標準差百分比為$\sigma_{D_1} = 1.589$，D_2的平均數百分比$\mu_{D_2} = -0.160$，標準差百分比為$\sigma_{D_2} = 2.390$，而D_3的平均數百分比$\mu_{D_3} = -0.020$，標準差百分比為$\sigma_{D_3} = 2.102$。

第一節　機率分配及其參數

D_1、D_2和D_3雖然具有不同的參數，但我們假設它們服從同一種機率分配。在控制$\mu_{D_1} = -0.016$、$\sigma_{D_1} = 1.589$、$\mu_{D_2} = -0.160$、$\sigma_{D_2} = 2.390$、$\mu_{D_3} = -0.020$和$\sigma_{D_3} = 2.102$皆不變的條件下，當其分配分別為常態分配、t分配、雙指數分配和混合常態分配時，其機率分配的型式如下。

一、常態分配

令D服從一具有參數μ_D和σ_D^2的常態分配，其機率密度函數為

$$f_D(d)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_D}e^{\frac{-(d-\mu_D)^2}{2\cdot\sigma_D^2}},$$

其中$d\in\mathbb{R}$，可計算出 $E(D)=\mu_D$，$\mathrm{var}(D)=\sigma_D^2$。令$D_1$服從參數$\mu_{D_1}=-0.016$，$\sigma_{D_1}^2=(1.589)^2$的常態分配，其機率密度函數為

$$f_{D_1}(d_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 1.589}e^{\frac{-[d_1-(-0.016)]^2}{2\cdot(1.589)^2}},$$

其中$d_1\in\mathbb{R}$。令D_2服從參數$\mu_{D_2}=-0.160$，$\sigma_{D_2}^2=(2.390)^2$的常態分配，其機率密度函數為

$$f_{D_2}(d_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 2.390}e^{\frac{-[d_2-(-0.160)]^2}{2\cdot(2.390)^2}},$$

其中$d_2\in\mathbb{R}$。令D_3服從參數$\mu_{D_3}=-0.020$，$\sigma_{D_2}^2=(2.102)^2$的常態分配，其機率密度函數為

$$f_{D_3}(d_3)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 2.102}e^{\frac{-[d_3-(-0.020)]^2}{2\cdot(2.102)^2}},$$

其中$d_2\in\mathbb{R}$。因此，$\mu_{D_1}=-0.016$，$\sigma_{D_1}=1.589$、$\mu_{D_2}=-0.160$，$\sigma_{D_2}=2.390$且$\mu_{D_3}=-0.020$，$\sigma_{D_3}=2.102$。

二、雙指數分配

令Y服從一具有參數λ的雙指數分配，其機率密度函數為

$$f_Y(y)=\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|y|},$$

其中$y\in\mathbb{R}$，$\lambda>0$，可計算出 $E(Y)=0$，$\mathrm{var}(Y)=\frac{2}{\lambda^2}$。令$Y_1$服從參數$\lambda_1=0.890$的雙指數分配，其機率密度函數為

$$f_{Y_1}(y_1)=\frac{0.890}{2}e^{-0.890|y_1|},$$

其中$y_1 \in \mathbb{R}$。令Y_2服從參數$\lambda_2 = 0.592$的雙指數分配，其機率密度函數為

$$f_{Y_2}(y_2) = \frac{0.592}{2} e^{-0.592|y_2|} \ ,$$

其中$y_2 \in \mathbb{R}$。令Y_3服從參數$\lambda_3 = 0.673$的雙指數分配，其機率密度函數為

$$f_{Y_3}(y_3) = \frac{0.673}{2} e^{-0.673|y_3|} \ ,$$

其中$y_3 \in \mathbb{R}$。令$D_1 = Y_1 - 0.016$、$D_2 = Y_2 - 0.160$且$D_3 = Y_3 - 0.020$，則$\mu_{D_1} = -0.016$，$\sigma_{D_1} \fallingdotseq 1.589$、$\mu_{D_2} = -0.160$，$\sigma_{D_2} \fallingdotseq 2.390$且$\mu_{D_3} = -0.020$，$\sigma_{D_3} \fallingdotseq 2.102$。

三、t 分配

令Y服從一具有參數v的 t 分配，其機率密度函數為

$$f_Y(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left(1 + \frac{y^2}{v}\right)^{\frac{-(v+1)}{2}} \ ,$$

其中$y \in \mathbb{R}$，$v > 0$。可計算出當$v > 1$時，$E(Y) = 0$，而當$v > 2$時，$\text{var}(Y) = \frac{v}{v-2}$。令$Y_1$服從參數$v_1 = 3.312$的 t 分配，其機率密度函數為

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{\Gamma\left(\frac{3.312+1}{2}\right)}{\sqrt{3.312\pi}\Gamma\left(\frac{3.312}{2}\right)} \left(1 + \frac{{y_1}^2}{3.312}\right)^{\frac{-(3.312+1)}{2}} \ ,$$

其中$y_1 \in \mathbb{R}$。令Y_2服從參數$v_2 = 2.424$的 t 分配，其機率密度函數為

$$f_{Y_2}(y_2) = \frac{\Gamma\left(\frac{2.424+1}{2}\right)}{\sqrt{2.424\pi}\Gamma\left(\frac{2.424}{2}\right)} \left(1 + \frac{{y_2}^2}{2.424}\right)^{\frac{-(2.424+1)}{2}} \ ,$$

其中$y_2 \in \mathbb{R}$。令Y_3服從參數$v_3 = 2.585$的 t 分配，其機率密度函數為

$$f_{Y_3}(y_3) = \frac{\Gamma\left(\frac{2.585+1}{2}\right)}{\sqrt{2.585\pi}\Gamma\left(\frac{2.585}{2}\right)} \left(1 + \frac{{y_3}^2}{2.585}\right)^{\frac{-(2.585+1)}{2}} \ ,$$

其中 $y_3 \in \mathbb{R}$。令 $D_1 = Y_1 - 0.016$、$D_2 = Y_2 - 0.160$ 且 $D_3 = Y_3 - 0.020$，則 $\mu_{D_1} = -0.016$，$\sigma_{D_1} \fallingdotseq 1.589$、$\mu_{D_2} = -0.160$，$\sigma_{D_2} \fallingdotseq 2.390$ 且 $\mu_{D_3} = -0.020$，$\sigma_{D_3} \fallingdotseq 2.102$。

四、混合常態分配

令B服從一具有參數p的 Bernoulli 分配(Bernoulli distribution)，其機率質量函數為

$$f_B(b) = \begin{cases} 1-p, & 若 b = 0， \\ p, & 若 b = 1， \\ 0, & 其它， \end{cases}$$

其中$0 \le p \le 1$，又令N_1服從一具有參數μ_{N_1}和$\sigma_{N_1}^2$的常態分配，N_2服從一具有參數μ_{N_2}和$\sigma_{N_2}^2$的常態分配，則D服從一混合常態分配，表示為：

$$D \sim BN_1 + (1-B)N_2, \tag{4.1.1}$$

可計算出 $E(D) = p\mu_{N_1} + (1-p)\mu_{N_2}$，$\text{var}(D) = \sigma_{N_1}^2 p + \sigma_{N_2}^2(1-p) + (\mu_{N_1} - \mu_{N_2})^2 p(1-p)$，計算過程詳見附錄三。令$Y_1$服從參數$\mu_{Y_1} = -0.016$，$\sigma_{Y_1}^2 = (0.2808)^2$的常態分配，$Y_2$服從參數$\mu_{Y_2} = -0.016$，$\sigma_{Y_2}^2 = 7^2$的常態分配，則$D_1$服從混合常態分配

$$D_1 \sim BY_1 + (1-B)Y_2，$$

令Z_1服從參數$\mu_{Z_1} = -0.160$，$\sigma_{Z_1}^2 = (0.8658)^2$的常態分配，$Z_2$服從參數$\mu_{Z_2} = -0.160$，$\sigma_{Z_2}^2 = 10^2$的常態分配，則$D_2$服從混合常態分配

$$D_2 \sim BZ_1 + (1-B)Z_2，$$

令U_1服從參數$\mu_{U_1} = -0.020$，$\sigma_{U_1}^2 = (0.6227)^2$的常態分配，$U_2$服從參數$\mu_{U_2} = -0.020$，$\sigma_{U_2}^2 = 9^2$的常態分配，則$D_3$服從混合常態分配

$$D_3 \sim BU_1 + (1-B)U_2，$$

其中隨機變數B服從一 Bernoulli 分配，其參數$p = 0.95$。因此，$\mu_{D_1} = -0.016$，$\sigma_{D_1} \fallingdotseq 1.589$、$\mu_{D_2} = -0.160$，$\sigma_{D_2} \fallingdotseq 2.390$且$\mu_{D_3} = -0.020$，$\sigma_{D_3} \fallingdotseq 2.102$。

下表一和表二分別為D_1和D_2服從常態分配、雙指數分配、t 分配和混合常態分配時，一些敘述統計量的模擬值，其模擬的樣本個數為 1,000,000，模擬 2,000 次後取其平均的結果。

表一：D_1的敘述統計量模擬值

D_1的敘述統計量	常態分配	雙指數分配	t 分配	混合常態分配
平均數	-0.0160	-0.0160	-0.0160	-0.0160
標準差	1.5890	1.5890	1.5893	1.5888
偏態係數(skewness)	-0.0001	0.0003	-0.3213	0.0012
峰態係數(kurtosis)	3.0000	5.9988	427.6112	56.4952
最小值	-7.7429	-15.4166	-97.6970	-29.5981
第 75 百分位數	1.0558	0.7628	0.7397	0.1847
第 90 百分位數	2.0204	1.7923	1.5810	0.3783
第 95 百分位數	2.5977	2.5712	2.2498	0.5210
第 99 百分位數	3.6804	4.3794	4.2003	5.8747
最大值	7.7112	15.3939	92.8594	29.6456

表二：D_2的敘述統計量模擬值

D_2的敘述統計量	常態分配	雙指數分配	t 分配	混合常態分配
平均數	-0.1600	-0.1600	-0.1599	-0.1600
標準差	2.3900	2.3900	2.3389	2.3900
偏態係數	0.0000	-0.0001	2.7321	-0.0012
峰態係數	3.0000	5.9990	11148.1312	46.0326
最小值	-11.7742	-23.3465	-366.0366	-42.5130
第 75 百分位數	1.4519	1.0114	0.6289	0.4567
第 90 百分位數	2.9028	2.5600	1.5886	1.0479
第 95 百分位數	3.7711	3.7314	2.4398	1.4718
第 99 百分位數	5.3997	6.4512	5.3673	8.2552
最大值	11.4716	23.0094	391.9880	42.0954

其中由於D_1和D_2服從 t 分配時，其參數υ皆小於或等於 4（D_3亦然），因此理論上峰態係數並不存在，所以導致其峰態係數的模擬值很大。由表一和表二皆可看出 t 分配和混合常態分配相較於常態分配和雙指數分配，其尾端較厚。

第二節　門檻設定

在本研究中，我們分別使用標準差、半標準差、風險值和條件風險值作為風險衡量指標，來衡量投資組合風險的高低。由於我們要將投資組合的風險控制在一定水準之下，追求投資組合的最大預期收益，或是將預期收益設定在一定水準之上，尋找投資組合的最低風險，所以必須決定一個投資人可以接受的風險衡量指標上限門檻H_ρ或是預期收益下限門檻H_E。以下將分別介紹本研究中投資人在使用不同的風險衡量指標來衡量投資組合風險時，如何在相同的標準下，訂定不同的風險衡量指標上限門檻H_ρ以及預期收益下限門檻H_E。

一、風險衡量指標上限門檻

當使用標準差作為風險衡量指標時，我們假設投資人可以接受的風險衡量指標上限門檻H_{sd}，是投資標的機率分配皆服從常態分配的假設下，其每項投資標的資產配置的權重相等時，投資組合累積分配函數為95%時的分位數。也就是說，當考慮兩項投資標的之投資組合時，假設D_1和D_2皆服從常態分配，其標準差分別為$\sigma_{D_1} = 1.589$和$\sigma_{D_2} = 2.390$，且$w = (1-w) = 0.5$，則投資組合$\hat{L} = 0.5 \cdot D_1 + 0.5 \cdot D_2$也服從一常態分配，令風險衡量指標的上限門檻$H_{\text{sd}}$為投資組合累積分配函數為95%時的分位數，即為$\hat{L}$的每單位標準差$\sigma_{\hat{L}}$再乘上1.645，計算如下：

$$H_{\text{sd}} = \sigma_{\hat{L}} \cdot 1.645$$

$$= \sqrt{0.5^2 \cdot (1.589)^2 + 0.5^2 \cdot (2.390)^2} \cdot 1.645$$

$$\fallingdotseq 2.361。$$

在相同的假設之下，由於$\hat{L}$所服從的常態分配為一左右對稱的機率分配，故其半變異數為變異數的$\frac{1}{2}$倍，半標準差為標準差的$\frac{1}{\sqrt{2}}$倍，因此，當使用半標準差作為風險衡量指標時，其風險衡量指標的上限門檻H_{ssd}也要修正成以標準差作為風險衡量指標時的$\frac{1}{\sqrt{2}}$倍

$$H_{\text{ssd}} = \frac{H_{\text{sd}}}{\sqrt{2}}$$

$$\fallingdotseq \frac{2.361}{\sqrt{2}}$$

$$\fallingdotseq 1.669。$$

在相同的假設之下，當使用風險值作為風險衡量指標時，H_{VaR}即為投資組合損失$\hat{L}$的累積分配函數為95%時的分位數，故利用將風險衡量指標的上限門檻H_{VaR}標準化後的結果，即可以計算出風險衡量指標的上限門檻H_{VaR}

$$\frac{H_{\text{VaR}} - \mu_{\hat{L}}}{\sigma_{\hat{L}}} = 1.645$$

$$\Rightarrow \frac{H_{\text{VaR}} - [0.5 \cdot (-0.016) + 0.5 \cdot (-0.160)]}{\sqrt{0.5^2 \cdot (1.589)^2 + 0.5^2 \cdot (2.390)^2}} = 1.645$$

$$\Rightarrow H_{\text{VaR}} \fallingdotseq 2.273。$$

在相同的假設之下，當使用條件風險值作為風險衡量指標時，可依據以風險值作為風險衡量指標時的風險衡量指標上限門檻H_{VaR}，由(2.4.3)式計算出以條件風險值作為風險衡量指標時的風險衡量指標上限門檻H_{CVaR}

$$H_{\text{CVaR}} = \frac{1}{0.05} \int_{H_{\text{VaR}}}^{\infty} \frac{l}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\hat{L}}} e^{\frac{-(l-\mu_{\hat{L}})^2}{2 \cdot \sigma_{\hat{L}}^2}} dl$$

$$\fallingdotseq \frac{1}{0.05} \int_{2.273}^{\infty} \frac{l}{\sqrt{2\pi \cdot \left[0.5^2 \cdot (1.589)^2 + 0.5^2 \cdot (2.390)^2\right]}} e^{\frac{-\{l-[0.5 \cdot (-0.016) + 0.5 \cdot (-0.160)]\}^2}{2 \cdot \left[0.5^2 \cdot (1.589)^2 + 0.5^2 \cdot (2.390)^2\right]}} dl$$

≒ 2.871。

令(2.1.1)、(2.2.1)、(2.3.1)和(2.4.5)式分別為標準差、半標準差、給定信心水準$\alpha = 95\%$條件下的風險值和條件風險值之估計量，其相對應的風險衡量指標上限門檻H_{sd}=2.361、$H_{\text{ssd}} = 1.669$、$H_{\text{VaR}} = 2.273$和$H_{\text{CVaR}} = 2.871$，對於不同的風險衡量指標，可將(3.1.3)式分別表示為

$$\begin{cases} \text{Max.} & -\bar{L}, \\ \text{s.t.} & \widehat{\text{sd}}^{n}(L) \le 2.361, \\ & 0 \le w \le 1, \end{cases} \tag{4.2.1}$$

$$\begin{cases} \text{Max.} & -\bar{L}, \\ \text{s.t.} & \widehat{\text{ssd}}^{n}(L) \le 1.669, \\ & 0 \le w \le 1, \end{cases} \tag{4.2.2}$$

$$\begin{cases} \text{Max.} & -\bar{L}, \\ \text{s.t.} & \widehat{\text{VaR}}^{n}_{95\%}(L) \le 2.273, \\ & 0 \le w \le 1, \end{cases} \tag{4.2.3}$$

$$\begin{cases} \text{Max.} & -\bar{L}, \\ \text{s.t.} & \widehat{\text{CVaR}}^{n}_{95\%}(L) \le 2.871, \\ & 0 \le w \le 1。 \end{cases} \tag{4.2.4}$$

以使用不同的風險衡量指標將投資組合風險控制在相同的標準的水準之下，追求投資組合最大的預期收益。

當考慮三項投資標的之投資組合時，假設D_1、D_2和D_3皆服從常態分配，其標準差分別為$\sigma_{D_1} = 1.589$、$\sigma_{D_2} = 2.390$和$\sigma_{D_3} = 2.102$，且$w_1 = w_2 = w_3 = \frac{1}{3}$，則投資組合$\hat{L} = \frac{1}{3}\cdot D_1 + \frac{1}{3}\cdot D_2 + \frac{1}{3}\cdot D_3$也服從一常態分配，以標準差作為風險衡量指標時，其風險衡量指標的上限門檻H_{sd}為

$$H_{\text{sd}} = \sigma_{\hat{L}}\cdot 1.645$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot(1.589)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot(2.390)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot(2.102)^2}\cdot 1.645$$

$\fallingdotseq 1.186$。

當使用半標準差作為風險衡量指標時，其風險衡量指標的上限門檻H_{ssd}修正成以標準差作為風險衡量指標時的$\frac{1}{\sqrt{2}}$倍

$$H_{\text{ssd}} = \frac{H_{\text{sd}}}{\sqrt{2}}$$

$$\fallingdotseq 0.839。$$

利用將風險衡量指標的上限門檻H_{VaR}標準化後的結果，即可以計算出風險衡量指標的上限門檻H_{VaR}

$$\frac{H_{\text{VaR}} - \mu_{\hat{L}}}{\sigma_{\hat{L}}} = 1.645$$

$$\Rightarrow \frac{H_{\text{VaR}} - \left[\frac{1}{3}\cdot(-0.016) + \frac{1}{3}\cdot(-0.160) + \frac{1}{3}\cdot(-0.020)\right]}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot(1.589)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot(2.390)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot(2.102)^2}} = 1.645$$

$$\Rightarrow H_{\text{VaR}} \fallingdotseq 1.885。$$

以條件風險值作為風險衡量指標時，其風險衡量指標的上限門檻H_{CVaR}為

$$H_{\text{CVaR}} = \frac{1}{0.05}\int_{H_{\text{VaR}}}^{\infty} \frac{l}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\hat{L}}} e^{\frac{-(l-\mu_{\hat{L}})^2}{2\cdot\sigma_{\hat{L}}^2}}\, dl$$

$$\fallingdotseq 2.871。$$

對於不同的風險衡量指標，可將(3.1.3)式分別表示為

$$\begin{cases} \text{Max.} & -\bar{L}， \\ \text{s.t.} & \widehat{\text{sd}}^{n}(L) \le 1.186， \\ & 0 \le w_i \le 1， \quad i = 1,2,3， \end{cases} \tag{4.2.5}$$

$$\begin{cases} \text{Max.} & -\bar{L}， \\ \text{s.t.} & \widehat{\text{ssd}}^{n}(L) \le 0.839， \\ & 0 \le w_i \le 1， \quad i = 1,2,3， \end{cases} \tag{4.2.6}$$

$$\begin{cases} \text{Max.} & -\bar{L}\,, \\ \text{s.t.} & \widehat{\text{VaR}}_{95\%}^{n}(L) \le 1.885\,, \\ & 0 \le w_i \le 1\,, \quad i = 1,2,3\,, \end{cases} \tag{4.2.7}$$

$$\begin{cases} \text{Max.} & -\bar{L}\,, \\ \text{s.t.} & \widehat{\text{CVaR}}_{95\%}^{n}(L) \le 2.481\,, \\ & 0 \le w_i \le 1\,, \quad i = 1,2,3\,。 \end{cases} \tag{4.2.8}$$

以使用不同的風險衡量指標將投資組合風險控制在相同的標準的水準之下，追求投資組合最大的預期收益。

二、預期收益下限門檻

無論使用何種風險衡量指標，我們皆假設投資人可以接受的風險衡量指標上限門檻H_E，是投資組合其每項投資標的資產配置的權重相等時的預期收益。也就是說，當考慮兩項投資標的之投資組合時，假設D_1和D_2的平均數百分比分別為$\mu_{D_1} = -0.016$和$\mu_{D_2} = -0.160$，且$w = (1-w) = 0.5$，令預期收益的下限門檻H_E為投資組合$\hat{L} = 0.5 \cdot D_1 + 0.5 \cdot D_2$的預期收益，即為

$$\begin{aligned} H_E &= E\left(-\hat{L}\right) \\ &= -0.5 \cdot (-0.016) - 0.5 \cdot (-0.160) \\ &= 0.088\,, \end{aligned}$$

對於不同的風險衡量指標，可將(3.2.7)式表示為

$$\begin{cases} \text{min.} & \hat{\rho}(L)\,, \\ \text{s.t.} & -\bar{L} \ge 0.088\,, \\ & 0 \le w \le 1\ , \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{min.} & \hat{\rho}\left(\tilde{L}\right)\,, \\ \text{s.t.} & -\bar{L} \ge 0.088\,, \\ & 0 \le \tilde{w} \le 1\ , \end{cases} \tag{4.2.9}$$

其中$\hat{\rho}(L)$可為$\widehat{\text{sd}}^{n}(L)$、$\widehat{\text{ssd}}^{n}(L)$、$\widehat{\text{VaR}}_{95\%}^{n}(L)$和$\widehat{\text{CVaR}}_{95\%}^{n}(L)$，$\hat{\rho}\left(\tilde{L}\right)$可為$\widehat{\text{sd}}^{n}\left(\tilde{L}\right)$、$\widehat{\text{ssd}}^{n}\left(\tilde{L}\right)$、$\widehat{\text{VaR}}_{95\%}^{n}\left(\tilde{L}\right)$和$\widehat{\text{CVaR}}_{95\%}^{n}\left(\tilde{L}\right)$。

當考慮三項投資標的之投資組合時，假設D_1、D_2和D_3的平均數百分比分別為$\mu_{D_1} = -0.016$、$\mu_{D_2} = -0.160$和$\mu_{D_3} = -0.020$，且$w_1 = w_2 = w_3 = \frac{1}{3}$，令預期收益的下限門檻$H_E$為投資組合$\hat{L} = \frac{1}{3}\cdot D_1 + \frac{1}{3}\cdot D_2 + \frac{1}{3}\cdot D_3$的預期收益，即為

$$\begin{aligned} H_E &= E(-\hat{L}) \\ &= -\frac{1}{3}\cdot(-0.016) - \frac{1}{3}\cdot(-0.160) - \frac{1}{3}\cdot(-0.020) \\ &\fallingdotseq 0.065， \end{aligned}$$

對於不同的風險衡量指標，可將(3.2.7)式表示為

$$\begin{cases} \min. & \hat{\rho}(L)， \\ \text{s.t.} & -\bar{L} \geq 0.065， \\ & 0 \leq w_i \leq 1， \quad i = 1,2,3， \end{cases} \qquad \begin{cases} \min. & \hat{\rho}(\tilde{L})， \\ \text{s.t.} & -\bar{L} \geq 0.065， \\ & 0 \leq \tilde{w}_i \leq 1， \quad i = 1,2,3， \end{cases} \tag{4.2.10}$$

其中$\hat{\rho}(L)$可為$\widehat{\text{sd}}^n(L)$、$\widehat{\text{ssd}}^n(L)$、$\widehat{\text{VaR}}^n_{95\%}(L)$和$\widehat{\text{CVaR}}^n_{95\%}(L)$，$\hat{\rho}(\tilde{L})$可為$\widehat{\text{sd}}^n(\tilde{L})$、$\widehat{\text{ssd}}^n(\tilde{L})$、$\widehat{\text{VaR}}^n_{95\%}(\tilde{L})$和$\widehat{\text{CVaR}}^n_{95\%}(\tilde{L})$。

國立高雄大學 National University of Kaohsiung

第三節　風險衡量指標

在本節中，我們利用前兩節所決定的機率分配和各種風險衡量指標的上限門檻，分別進行了兩項和三項投資標的之投資組合的模擬，並討論其結果。此外，我們也利用實證資料和風險衡量指標上限門檻，計算出三項投資標的之投資組合的結果。

一、兩項投資標的之投資組合

令一投資組合的投資標的項目數$k = 2$，其投資組合損失的隨機變數為

$$L = wD_1 + (1-w)D_2$$

$$= \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{D}\ ,$$

其中$\boldsymbol{w}^T = (w, 1-w)$分別為$\boldsymbol{D}^T = (D_1, D_2)$這兩項投資標的資產配置的權重。在控制$\mu_{D_1} = -0.016$、$\sigma_{D_1} = 1.589$、$\mu_{D_2} = -0.160$和$\sigma_{D_2} = 2.390$皆不變的條件下，當$D_1$和$D_2$皆為常態分配、雙指數分配、t 分配和混合常態分配時，進行第三章第一節的模擬流程，並分別以(4.2.1)、(4.2.2)、(4.2.3)和(4.2.4)式取代(3.1.3)式，對於各種分配皆可以得到數筆$\widehat{w}^*$、$\hat{\rho}^*$和$-\bar{L}^*$，其中$\hat{\rho}^*$可為$\widehat{\text{sd}}^*$、$\widehat{\text{ssd}}^*$、$\widehat{\text{VaR}}^*$和$\widehat{\text{CVaR}}^*$。

其結果如附錄四中的表九、表十、表十一和表十二為各種分配分別對應風險衡量指標$\widehat{\text{sd}}^*$、$\widehat{\text{ssd}}^*$、$\widehat{\text{VaR}}^*$和$\widehat{\text{CVaR}}^*$的結果，而附錄四中的圖二、圖三、圖四和圖五分別為使用標準差、半標準差、風險值和條件風險值作為風險衡量指標，當D_1和D_2皆為各種分配時，使用其m組最佳資產配置的權重$\widehat{\boldsymbol{w}}^*$中，$m$個第一個投資標的$D_1$的最佳配置權重$\widehat{w}^*$所繪製而成的直方圖。

表三為令$\hat{L} = 0.5 \cdot D_1 + 0.5 \cdot D_2$，當$D_1$和$D_2$皆服從常態分配、雙指數分配、t 分配和混合常態分配時，$\hat{L}$的一些敘述統計量模擬值，其模擬的樣本個數為 1,000,000，模擬 2,000 次後取其平均的結果。由表三中可看出當投資標的皆服從 t 分配和混合常態分配，相較於服從常態分配和雙指數分配時，其尾端較厚。

表三：$\hat{L}$的敘述統計量模擬值

$\hat{L}$的敘述統計量	常態分配	雙指數分配	t 分配	混合常態分配
平均數	-0.0880	-0.0880	-0.0880	-0.0880
標準差	1.4350	1.4350	1.4131	1.4350
偏態係數	-0.0000	0.0001	-0.7192	-0.0006
峰態係數	3.0000	4.7237	6194.3687	28.7161
最小值	-7.0726	-12.1351	-190.2047	-22.2951
第 75 百分位數	0.8799	0.7216	0.5271	0.2535
第 90 百分位數	1.7511	1.6178	1.1991	0.6050
第 95 百分位數	2.2724	2.2528	1.7284	0.9407
第 99 百分位數	3.2503	3.6698	3.3286	5.3415
最大值	6.8843	11.9394	186.7710	22.0317

由圖二、圖三、圖四和圖五可看出，無論使用何種風險衡量指標，在進行投資組合的最佳資產配置時，若投資標的所服從的機率分配之尾端皆較厚，較容易發生把資產全部配置在同一個投資標的上的情形，其原因為投資標的所服從機率分配的尾端較厚，則表示其較容易發生極端事件，若其中一個投資標的一筆資料發生了極大損失的極端事件，會大幅減少其平均收益$-\bar{L}$和大幅提高其風險$\hat{\rho}(L)$，若有絲毫的資產配置在該投資標的，也許就無法落在可接受的風險衡量指標上限門檻內，此時投資人很可能就把資產全部配置在另一個有較大平均收益和較低風險的投資標的。而若其中一個投資標的一筆資料發生了極大收益的極端事件，當使用半標準差、風險值和條件風險值作為風險衡量指標時，會大幅增加其平均收益$-\bar{L}$和但不影響其風險$\hat{\rho}(L)$，此時投資人很可能把資產全部配置在該投資標的。然而，若使用標準差作為風險衡量指標，若發生了極大收益的極端事件，除了會導致其平均收益$-\bar{L}$的大幅增加，也會使其風險$\hat{\rho}(L)$大幅增加，因此降低了投資人把資產全部配置在同一個投資標的上的機會。由圖二和圖三可看出，雖然使用標準差和半標準差作為風險衡量指標時，當投資標的所服從的機率分配之尾端較厚時，皆較容易發生把資產全部配置在同一個投資標的之情形，但由於上述原因，在投資標的服從相同的機率分配之條件下，使用標準差作為風險衡量指標時，把資產全部配置在同一個投資標的上的情形，皆比使用半標準差作為風險衡量指標時少，且當投資標的所服從的機率分配之尾端較厚時，其差距較大。

由圖二、圖三、圖四和圖五可看出，當投資標的所服從的機率分配為常態分配或雙指數分配時，使用標準差或半標準差作為風險衡量指標，比使用風險值或條件風險值作為風險衡量指標時，較容易發生把資產全部配置在同一個投資標的上的情形，其原因為當使用標準差或半標準差作為風險衡量指標時，收集的觀測值資料為 20 筆，而當使用風險值或條件風險值作為風險衡量指標時，收集的測值資料為 250 筆，所以使用標準差或半標準差作為風險衡量指標，其觀測值資料較不容易實際反映出投資標的所服從的機率分配，導致投資標的容易出現較小平

均收益卻伴隨較高風險，或較大平均收益卻伴隨較低風險的觀測值統計量資料，因此投資人也較容易把資產全部配置在同一個投資標的上。

由表九可看出，無論投資標的服從何種機率分配，當$\widehat{\text{sd}}^* > 2.361$時的$-\bar{L}^*$平均皆為正值，且皆大於當$\widehat{\text{sd}}^* \leq 2.361$時的$-\bar{L}^*$平均，例如：當投資標的服從常態分配，$\widehat{\text{sd}}^* > 2.361$時的$-\bar{L}^*$平均 0.1664 為正，且大於$\widehat{\text{sd}}^* \leq 2.361$時的$-\bar{L}^*$平均 0.0917。而由表八、表九和表十可看出，無論投資標的服從何種機率分配，當$\widehat{\text{ssd}}^* > 1.669$、$\widehat{\text{VaR}}^* > 2.273$或$\widehat{\text{CVaR}}^* > 2.871$時，其對應的$-\bar{L}^*$平均皆為負值，而當$\widehat{\text{ssd}}^* \leq 1.669$、$\widehat{\text{VaR}}^* \leq 2.273$或$\widehat{\text{CVaR}}^* \leq 2.871$時，其對應的$-\bar{L}^*$平均皆為正值。因為使用具有對稱性的標準差作為風險衡量指標時，除了較大的投資組合損失會使標準差增加外，較大的投資組合收益也會導致標準差增加，所以當觀測值資料的標準差超過其下限門檻時，有可能是其中有較高收益的觀測值資料發生所導致的，因此若投資標的收益的母體平均數皆為正值，則無論投資組合的觀測值資料之標準差是否超過其下限門檻，其收益$-\bar{L}^*$平均皆很可能為正。由於第二個投資標的之收益有較大的母體平均數和標準差，所以當投資組合的觀測值資料之標準差超過其下限門檻時，大多是將較多資產配置在第二個投資標的D_2，因此無論投資標的服從何種機率分配，當$\widehat{\text{sd}}^* > 2.361$時的$-\bar{L}^*$平均皆大於當$\widehat{\text{sd}}^* \leq 2.361$時的$-\bar{L}^*$平均。至於使用不具有對稱性的半標準差、風險值和條件風險值作為風險衡量指標時，當$\hat{\rho}(L) > H_\rho$時，其中有較高損失的觀測值資料發生所導致的，所以其$-\bar{L}^*$平均皆很可能為負。

由表九、表十、表十一和表十二可看出，當投資標的所服從的機率分配為常態分配，使用標準差或半標準差作為風險衡量指標，比使用風險值或條件風險值作為風險衡量指標時，其$\widehat{\text{sd}}^*$和$\widehat{\text{ssd}}^*$全部m個的$\hat{w}^*$平均為 0.4481 和 0.4186 皆較$\widehat{\text{VaR}}^*$和$\widehat{\text{CVaR}}^*$全部m個的$\hat{w}^*$平均 0.5840 和 0.5726 低，而當投資標的所服從的機率分配為雙指數分配時，也有如此情形。由圖二、圖三、圖四和圖五也可看出，當投資標的所服從的機率分配為常態分配，使用標準差或半標準差作為風險衡量指標

時，$\hat{w}^*$的中位數為 0.1551 和 0.1336，也意味著其將較高比例的資產配置在第一個投資標的D_1的情形相對較少，也表示將較高比例的資產配置在第二個投資標的D_2的情形相對較多，而當投資標的所服從的機率分配為雙指數分配時，也有如此情形。由於D_1相較D_2是一個較小收益且較低風險的投資標的，所以當投資標的所服從的機率分配為常態分配或雙指數分配時，使用標準差或半標準差作為風險衡量指標時，投資人在進行投資組合的最佳資產配置時，會較為積極。

由圖二、圖三、圖四和圖五以及表九、表十、表十一和表十二皆可看出，當使用標準差、半標準差、風險值和條件風險值作為風險衡量指標時，在進行投資組合的最佳資產配置時，若投資標的所服從的機率分配之尾端皆較厚，其將較高比例的資產配置在第一個投資標的D_1的情形相對較少，所以顯示當使用標準差、半標準差、風險值和條件風險值作為風險衡量指標時，投資標的所服從的機率分配之尾端皆較厚，投資人的資產配置會較為積極，而此種情形又以使用風險值作為衡量風險指標時最為明顯。

由圖二、圖三、圖四和圖五以及表九、表十、表十一和表十二皆可看出，當投資標的所服從的機率分配為 t 分配或混合常態分配時，以風險值作為風險衡量指標時的最佳資產配置最為積極，其次為半標準差和標準差，最保守的為條件風險值。

綜合以上討論，當金融市場處於較穩定的環境時（投資標的所服從的機率分配皆為常態分配或雙指數分配時），態度積極的投資人可選擇標準差或半標準差作為風險衡量指標，反之，態度保守的投資人可選擇風險值或條件風險值作為風險衡量指標。當金融市場處於較不穩定的環境時（投資標的所服從的機率分配皆為 t 分配或混合常態數分配時），態度積極的投資人可選擇風險值作為風險衡量指標，其次選擇半標準差或標準差作為風險衡量指標，而態度保守的投資人可選擇條件風險值作為風險衡量指標。

二、三項投資標的之投資組合

令一投資組合的投資標的項目數$k=3$，其投資組合損失的隨機變數為

$$L = w_1D_1 + w_2D_2 + w_3D_3$$

$$= \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{D}\text{，}$$

其中$\boldsymbol{w}^T=(w_1,w_2,w_3)$分別為$\boldsymbol{D}^T=(D_1,D_2,D_3)$這三項投資標的的資產配置的權重。在控制$\mu_{D_1}=-0.016$、$\sigma_{D_1}=1.589$、$\mu_{D_2}=-0.160$、$\sigma_{D_2}=2.390$、$\mu_{D_3}=-0.020$和$\sigma_{D_3}=2.102$皆不變的條件下，當$D_1$、$D_2$和$D_3$皆為常態分配、雙指數分配、t 分配和混合常態分配時，進行第三章第一節的模擬流程，並分別以(4.2.5)、(4.2.6)、(4.2.7)和(4.2.8)式取代(3.1.3)式，對於各種分配皆可以得到數筆$\hat{w}_1^*$、$\hat{w}_2^*$、$\hat{w}_3^*$、$\hat{\rho}^*$和$-\bar{L}^*$，其中$\hat{\rho}^*$可為$\widehat{\text{sd}}^*$、$\widehat{\text{ssd}}^*$、$\widehat{\text{VaR}}^*$和$\widehat{\text{CVaR}}^*$。

其結果如附錄五中的表十三、表十四、表十五和表十六為各種分配分別對應風險衡量指標$\widehat{\text{sd}}^*$、$\widehat{\text{ssd}}^*$、$\widehat{\text{VaR}}^*$和$\widehat{\text{CVaR}}^*$的結果，其中可看出無論投資標的服從何種機率分配以及使用何種風險衡量指標，表中全部m個的$\hat{\rho}^*$平均和$-\bar{L}^*$平均大多比附錄四中的表九、表十、表十一和表十二相對應的$\hat{\rho}^*$平均和$-\bar{L}^*$平均還要小，其原因為本研究中無論使用何種風險衡量指標，計算出的三項投資標的之投資組合其風險衡量指標上限門檻，皆比兩項投資標的之投資組合的風險衡量指標上限門檻還要低，所決定出的m組最佳資產配置的權重$\hat{\boldsymbol{w}}^*$自然也會比較保守，因此有較低的風險和較小的收益。

由表十三、表十四、表十五和表十六可看出，無論投資標的服從何種機率分配，當$\widehat{\text{sd}}^*>1.186$時的$-\bar{L}^*$平均皆為正值，且當$\widehat{\text{ssd}}^*>0.839$、$\widehat{\text{VaR}}^*>1.885$或$\widehat{\text{CVaR}}^*>2.481$時，其對應的$-\bar{L}^*$平均皆為負值，而當$\widehat{\text{ssd}}^*\le 0.839$、$\widehat{\text{VaR}}^*\le 1.885$或$\widehat{\text{CVaR}}^*\le 2.481$時，其對應的$-\bar{L}^*$平均皆為正值。因為使用具有對稱性的標準差作為風險衡量指標時，除了較大的投資組合損失會使標準差增加外，較大的投資組合收益也會導致標準差增加，所以當觀測值資料的標準差超過其下限門檻時，有

可能是其中有較高收益的觀測值資料發生所導致的，因此若投資標的收益的母體平均數皆為正值，則無論投資組合的觀測值資料之標準差是否超過其下限門檻，其收益$-\bar{L}^*$平均皆很可能為正。至於使用不具有對稱性的半標準差、風險值和條件風險值作為風險衡量指標時，當$\hat{\rho}(L) > H_\rho$時，其中有較高損失的觀測值資料發生所導致的，所以其$-\bar{L}^*$平均皆很可能為負。

由表十三、表十四、表十五和表十六可看出，當投資標的所服從的機率分配為常態分配，使用標準差或半標準差作為風險衡量指標，比使用風險值或條件風險值作為風險衡量指標時，其$\widehat{\text{sd}}^*$和$\widehat{\text{ssd}}^*$全部m個的$\hat{w}_1^*$平均為 0.4631 和 0.4572 皆較$\widehat{\text{VaR}}^*$和$\widehat{\text{CVaR}}^*$全部m個的$\hat{w}_1^*$平均 0.4280 和 0.4178 高，而$\widehat{\text{sd}}^*$和$\widehat{\text{ssd}}^*$全部m個的$\hat{w}_2^*$平均為 0.2550 和 0.2628 皆較$\widehat{\text{VaR}}^*$和$\widehat{\text{CVaR}}^*$全部m個的$\hat{w}_2^*$平均 0.3254 和 0.3315 低，當投資標的所服從的機率分配為雙指數分配時，也有類似的情形。由於在三個投資標的中，D_1具有較小的收益和較低的風險，而D_2具有較大的收益和較高的風險，所以當投資標的所服從的機率分配為常態分配或雙指數分配時，使用標準差或半標準差作為風險衡量指標時，投資人在進行投資組合的最佳資產配置時，會較為保守。

由表十三、表十四、表十五和表十六可看出，當投資標的所服從的機率分配為 t 分配時，以風險值作為風險衡量指標時的最佳資產配置最為積極，其次為條件風險值，最保守的為半標準差和標準差。而當投資標的所服從的機率分配為混合常態分配時，仍以風險值作為風險衡量指標時的最佳資產配置最為積極，其次為標準差和半標準差，最保守的為條件風險值。

綜合以上討論，當金融市場處於較穩定的環境時（投資標的所服從的機率分配皆為常態分配或雙指數分配時），態度積極的投資人可選擇風險值或條件風險值作為風險衡量指標，反之，態度保守的投資人可選擇標準差或半標準差作為風險衡量指標。當金融市場處於較不穩定的環境時（投資標的所服從的機率分配皆

為 t 分配或混合常態數分配時)，態度積極的投資人可選擇風險值作為風險衡量指標。

三、實證研究

令一投資組合的投資標的項目數$k=3$，其投資組合損失的隨機變數為

$$L = w_1 D_1 + w_2 D_2 + w_3 D_3$$

$$= \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{D}，$$

其中$\boldsymbol{w}^T = (w_1, w_2, w_3)$分別為$\boldsymbol{D}^T = (D_1, D_2, D_3)$這三項投資標的資產配置的權重。令$D_1$、$D_2$和$D_3$分別為 2010 年英特爾公司股票、花旗集團股票和華盛頓郵報公司股票的每日收益，從年初至年底依序有$\boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2, \cdots, \boldsymbol{D}_{251}$共 251 筆日收益資料，若以風險值或條件風險值作為風險衡量指標時，可得：

$$L_1 = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{D}_1，$$

$$L_2 = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{D}_2，$$

$$\vdots$$

$$L_{251} = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{D}_{251}，$$

而若以標準差或半標準差作為風險衡量指標時，可得：

$$L_1 = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{D}_{232}，$$

$$L_2 = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{D}_{233}，$$

$$\vdots$$

$$L_{20} = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{D}_{251}，$$

對於不同的風險衡量指標，分別經由(4.2.5)、(4.2.6)、(4.2.7)和(4.2.8)式的計算，皆可能求得一組$\widehat{\boldsymbol{w}}^*$，為這三項投資標的最佳資產配置的權重，將其帶入 2011 年年英特爾公司股票、花旗集團股票和華盛頓郵報公司股票首 20 筆日收益資料$\boldsymbol{D}_1^*, \boldsymbol{D}_2^*, \cdots, \boldsymbol{D}_{20}^*$，表示為

$$L_1^* = \widehat{\boldsymbol{w}}^{*T}\boldsymbol{D}_1^*,$$

$$L_2^* = \widehat{\boldsymbol{w}}^{*T}\boldsymbol{D}_2^*,$$

$$\vdots$$

$$L_{20}^* = \widehat{\boldsymbol{w}}^{*T}\boldsymbol{D}_{20}^*,$$

並計算出這 20 筆資料的收益平均數$-\bar{L}^*$和風險衡量指標$\hat{\rho}^*$，其結果如表四，可看出當使用風險值作為風險衡量指標時有最大的收益，其次為條件風險值，而當使用標準差作為風險衡量指標時則有最小的收益。

表四：使用各種風險衡量指標時三項投資標的之投資組合的實證結果

風險衡量指標	標準差	半標準差	風險值	條件風險值
$-\bar{L}^*$	-0.0507	-0.0379	0.0680	0.0426
$\hat{\rho}^*$	1.6871	1.5900	0.9464	1.0435

第四節　敏感度

在本節中，我們利用第一節和第二節所決定的機率分配和預期收益率下限門檻，分別進行了兩項和三項投資標的之投資組合中，各種風險衡量指標對參數敏感度的模擬，並討論其結果。此外，我們也利用實證資料和預期收益率下限門檻，計算出三項投資標的之投資組合中，風險衡量指標對參數敏感度的結果。

一、兩項投資標的之投資組合

令一投資組合的投資標的項目數$k = 2$，其投資組合損失的隨機變數為

$$L = wD_1 + (1-w)D_2$$

$$= \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{D},$$

其中$\boldsymbol{w}^T = (w, 1-w)$分別為$\boldsymbol{D}^T = (D_1, D_2)$這兩項投資標的資產配置的權重。在控制$\mu_{D_1} = -0.016$、$\sigma_{D_1} = 1.589$、$\mu_{D_2} = -0.160$和$\sigma_{D_2} = 2.390$皆不變的條件下，當$D_1$

和D_2皆為常態分配、雙指數分配、t 分配和混合常態分配時，皆進行第三章第二節的單一參數模擬流程和多重參數模擬流程，並以(4.2.9)式取代(3.2.7)式，可計算得風險衡量指標對單一參數的敏感度之模擬值$\widehat{\mathrm{sd}}^{n\prime}(\mu_{D_1})^*$、$\widehat{\mathrm{ssd}}^{n\prime}(\mu_{D_1})^*$、$\widehat{\mathrm{VaR}}_{95\%}^{n\prime}(\mu_{D_1})^*$和$\widehat{\mathrm{CVaR}}_{95\%}^{n\prime}(\mu_{D_1})^*$，和風險衡量指標對多重參數的敏感度之模擬值$\widehat{\mathrm{sd}}^{n\prime}(\mu_{D_1},\mu_{D_2})^*$、$\widehat{\mathrm{ssd}}^{n\prime}(\mu_{D_1},\mu_{D_2})^*$、$\widehat{\mathrm{VaR}}_{95\%}^{n\prime}(\mu_{D_1},\mu_{D_2})^*$和$\widehat{\mathrm{CVaR}}_{95\%}^{n\prime}(\mu_{D_1},\mu_{D_2})^*$，其結果如附錄七中的表十七和附錄八中的表十八，分別為風險衡量指標對單一參數敏的感度和風險衡量指標對多重參數敏的感度之結果。

表十七中的理論值是藉由 Karush-Kuhn-Tucker 條件中的充分條件做非線性規劃求解，可計算出最佳資產配置的投資組合損失，繼而使用風險衡量指標計算出其最佳資產配置的投資組合損失之風險，再於其中第一個投資標的損失的母體平均數處偏微分，即可求得其敏感度之理論值，其推導過程詳見附錄六。

由附錄七中的表十七以及圖七、圖八和圖十可看出，當投資標的所服從的機率分配為常態分配、雙指數分配和混合常態分配，皆使用標準差、半標準差和條件風險值作為風險衡量指標時，當樣本個數n越大時，其風險衡量指標對單一參數敏感度之模擬值皆有朝理論值收斂的趨勢，例如：當投資標的所服從的機率分配為常態分配，使用標準差或半標準差作為風險衡量指標時，當樣本個數$n = 1{,}000{,}000$，其模擬值$\widehat{\mathrm{sd}}^{n\prime}(\mu_{D_1})^*$和$\widehat{\mathrm{ssd}}^{n\prime}(\mu_{D_1})^*$的絕對偏差(absolute bias)約等於 0，而模擬標準差也分為別下降為 0.1384 和 0.0982。

由附錄七中的圖九可看出，無論投資標的所服從的機率分配為何，當使用風險值作為風險衡量指標時，其模擬值並不隨著樣本個數n的增加而越來越趨近於理論值。例如：由表十七可看出，當投資標的所服從的機率分配為常態分配，使用風險值作為風險衡量指標時，當樣本個數$n = 1{,}000{,}000$，其模擬值$\widehat{\mathrm{VaR}}_{95\%}^{n\prime}(\mu_{D_1})^*$的絕對偏差約等於 0.1290，而模擬標準差高達了 702.7176。由於

使用風險值作為風險衡量指標進行投資組合的最佳資產配置時，容易產生多重局部最小值（multiple local minima），此問題在 Gaivoronski and Pflug (2005)的論文中有提及。因此，當我們在進行風險值敏感度的模擬時，投資組合在參數變動前後的最佳資產配置可能有明顯的差異，因此風險值敏感度的估計值也可能有明顯的差異，導致風險值敏感度的模擬值，並不容易隨著樣本個數n的增加而朝理論值收斂。

由表十七以及圖七、圖八、圖九和圖十可看出，當投資標的所服從的機率分配為 t 分配時，只有使用條件風險值作為風險量指標，當樣本個數n越大時，其風險衡量指標的敏感度模擬值才有收斂的趨勢。而附錄八中的表十八以及圖十一、圖十二、圖十三和圖十四可看出，風險衡量指標對多重參數的敏感度和風險衡量指標對單一參數的敏感度，兩者敏感度的模擬值收斂與否完全一致，若其敏感度的模擬值有收斂時，風險衡量指標對多重參數的敏感度，會十分接近風險衡量指標對單一參數的敏感度之兩倍。

由附錄七中風險衡量指標對單一參數的敏感度之模擬值或理論值顯示，當使用標準差或半標準差作為風險衡量指標時，其敏感度和其投資標的所服從的機率分配無關，而以風險值或條件風險值作為風險衡量指標時，對於投資標的所服從的機率分配改變時，其敏感度也有所不同，而附錄八中的風險衡量指標對多重參數的敏感度之模擬值亦然。

二、三項投資標的之投資組合

令一投資組合的投資標的項目數$k = 3$，其投資組合損失的隨機變數為

$$L = w_1 D_1 + w_2 D_2 + w_3 D_3$$

$$= \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{D}，$$

其中$\boldsymbol{w}^T=(w_1,w_2,w_3)$分別為$\boldsymbol{D}^T=(D_1,D_2,D_3)$這三項投資標的資產配置的權重。在控制$\mu_{D_1}=-0.016$、$\sigma_{D_1}=1.589$、$\mu_{D_2}=-0.160$、$\sigma_{D_2}=2.390$、$\mu_{D_3}=-0.020$和$\sigma_{D_3}=2.102$皆不變的條件下，當$D_1$、$D_2$和$D_3$皆為常態分配、雙指數分配、t 分配和混合常態分配時，皆進行第三章第二節的單一參數模擬流程和多重參數模擬流程，並以(4.2.10)式取代(3.2.7)式，可計算得風險衡量指標對單一參數的敏感度之模擬值$\widehat{\mathrm{sd}}^{n\prime}\left(\mu_{D_1}\right)^*$、$\widehat{\mathrm{ssd}}^{n\prime}\left(\mu_{D_1}\right)^*$、$\widehat{\mathrm{VaR}}_{95\%}^{n\prime}\left(\mu_{D_1}\right)^*$和$\widehat{\mathrm{CVaR}}_{95\%}^{n\prime}\left(\mu_{D_1}\right)^*$，和風險衡量指標對多重參數的敏感度之模擬值$\widehat{\mathrm{sd}}^{n\prime}\left(\mu_{D_1},\mu_{D_2},\mu_{D_3}\right)^*$、$\widehat{\mathrm{ssd}}^{n\prime}\left(\mu_{D_1},\mu_{D_2},\mu_{D_3}\right)^*$、$\widehat{\mathrm{VaR}}_{95\%}^{n\prime}\left(\mu_{D_1},\mu_{D_2},\mu_{D_3}\right)^*$和$\widehat{\mathrm{CVaR}}_{95\%}^{n\prime}\left(\mu_{D_1},\mu_{D_2},\mu_{D_3}\right)^*$，其結果如附錄九中的表十九和附錄十中的表二十，分別為風險衡量指標對單一參數敏的感度和風險衡量指標對多重參數敏的感度之結果。

由附錄九中的表十九和附錄十中的表二十可看出，當考慮三項投資標的之投資組合時，無論風險衡量指標對單一或多重參數的敏感度，其模擬值收斂與否和考慮兩項投資標的之投資組合時完全一致。

國立高雄大學 National University of Kaohsiung

三、實證研究

令一投資組合的投資標的項目數$k=3$，其投資組合損失的隨機變數為

$$L=w_1D_1+w_2D_2+w_3D_3$$
$$=\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{D}\text{，}$$

其中$\boldsymbol{w}^T=(w_1,w_2,w_3)$分別為$\boldsymbol{D}^T=(D_1,D_2,D_3)$這三項投資標的資產配置的權重。令$D_1$、$D_2$和$D_3$分別為 2010 年英特爾公司股票、花旗集團股票和華盛頓郵報公司股票的每日收益，從年初至年底依序有$\boldsymbol{D}_1,\boldsymbol{D}_2,\cdots,\boldsymbol{D}_{251}$共 251 筆日收益資料，可得：

$$L_1=\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{D}_1\text{，}$$

$$L_2 = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{D}_2 ,$$

$$\vdots$$

$$L_{251} = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{D}_{251} ,$$

由(3.2.4)式可得：

$$\tilde{L}_1 = \boldsymbol{w}^T \tilde{\boldsymbol{D}}_1 ,$$

$$\tilde{L}_2 = \boldsymbol{w}^T \tilde{\boldsymbol{D}}_2 ,$$

$$\vdots$$

$$\tilde{L}_{251} = \boldsymbol{w}^T \tilde{\boldsymbol{D}}_{251} ,$$

經由(4.2.10)式的計算，可能求得目標函數$\hat{\rho}(L)^*$和$\hat{\rho}\left(\tilde{L}\right)^*$，則風險衡量指標$\rho$對於參數$\mu_{D_1}$的敏感度為：

$$\hat{\rho}'\left(\mu_{D_1}\right)^* = \frac{\hat{\rho}\left(\tilde{L}\right)^* - \hat{\rho}(L)^*}{\Delta D_1} = \frac{\hat{\rho}\left(\tilde{L}\right)^* - \hat{\rho}(L)^*}{0.0001} ,$$

或是由(3.2.9)式可得：

$$\tilde{L}_1 = \boldsymbol{w}^T \tilde{\boldsymbol{D}}_1 ,$$

$$\tilde{L}_2 = \boldsymbol{w}^T \tilde{\boldsymbol{D}}_2 ,$$

$$\vdots$$

$$\tilde{L}_{251} = \boldsymbol{w}^T \tilde{\boldsymbol{D}}_{251} ,$$

經由(4.2.10)式的計算，可能求得目標函數$\hat{\rho}(L)^*$和$\hat{\rho}\left(\tilde{L}\right)^*$，則風險衡量指標$\rho$對於參數$\mu_{D_1},\mu_{D_2},\mu_{D_3}$的敏感度為：

$$\hat{\rho}'\left(\mu_{D_1},\mu_{D_2},\mu_{D_3}\right)^* = \frac{\hat{\rho}\left(\tilde{L}\right)^* - \hat{\rho}(L)^*}{\Delta D_1} = \frac{\hat{\rho}\left(\tilde{L}\right)^* - \hat{\rho}(L)^*}{0.0001} ,$$

以上結果如下頁表五，可看出風險值的敏感度依然不合理，而在剩餘的三個風險衡量指標中，條件風險值的敏感度最大，其次為標準差，而半標準差的敏感度最小。

表五：三項投資標的之投資組合中風險衡量指標對參數敏感度的實證結果

風險衡量指標	標準差	半標準差	風險值	條件風險值
$\hat{\rho}'(\mu_{D_1})^*$	2.3494	1.8838	-3.7617	4.6916
$\hat{\rho}'(\mu_{D_1},\mu_{D_2},\mu_{D_3})^*$	5.2201	3.7975	1509.2132	10.8443

我們利用模擬方法或實證資料計算出風險衡量指標的敏感度，當一些總體經濟指標發生改變時（如：利率上升），造成投資標的所服從機率分配之參數的變動（如：預期損失上升），利用敏感度就可以輕易地計算出，在其最佳資產配置下，投資組合風險的變動結果。

國立高雄大學 National University of Kaohsiung

第五章　結論

當投資人在進行投資組合的最佳資產配置時，要如何挑選一個最合適的風險衡量指標，是個十分重要的課題。根據研究的結果，投資人可以依據自身在面對不同金融環境時的風險態度，選擇最合適的風險衡量指標。在本研究中，兩項投資標的之投資組合的模擬結果顯示，在相對穩定的金融環境下，積極的投資人應該以標準差或半標準差作為風險衡量指標，而保守的投資人則應該選擇風險值或條件風險值作為風險衡量指標；在相對不穩定的金融環境下，積極的投資人應以風險值作為風險衡量指標，其次以半標準差或標準差作為風險衡量指標，保守的投資人則應選擇條件風險值作為風險衡量指標。而三項投資標的之投資組合的模擬結果顯示，在相對穩定的金融環境下，積極的投資人應該以風險值或條件風險值作為風險衡量指標，而保守的投資人則應該選擇標準差或半標準差作為風險衡量指標；在相對不穩定的金融環境下，積極的投資人應以風險值作為風險衡量指標。

在風險衡量指標敏感度模擬的研究中，當投資組合的投資標的所服從之分配為常態分配、雙指數分配和混合常態分配時，無論使用標準差、半標準差或條件風險值作為風險衡量指標，皆可模擬出其敏感度，而在實證研究中，使用標準差、半標準差或條件風險值作為風險衡量指標時，也可計算出其合理的敏感度。如此一來，當一些總體經濟指標發生改變，造成投資標的分配參數的變動時，投資人即可利用敏感度的模擬值輕易地計算出，在最佳資產配置下其投資組合風險的變動結果。

然而，在本研究中，由於使用風險值作為風險衡量指標進行投資組合的最佳資產配置時，容易產生多重局部最小值的問題，因此無法以本研究的方法模擬出其敏感度，未來研究將改善或採取其它模擬方法，以試圖決此問題。而當投資標

的服從 t 分配，使用標準差或半標準差作為風險衡量指標時，並無法求得其敏感度的模擬值，未來也將探究其原因並試圖解決此問題。此外，利用含飄移項的隨機漫步模型(random walk model with drift)表示景氣繁榮或衰退的金融環境，並計算出風險值和條件風險值的敏感度，討論在不同金融景氣的環境下其敏感度的差異，為本研究後續所能探討的課題。

參考文獻

1. Aït-Sahalia, Y. (1996). Nonparametric Pricing of Interest Rate Derivative Securities. *Econometrica* **64**(3) 527–560.
2. Andreev, A., A. Kanto, and P. Malo (2005). On Closed-Form Calculation of CVaR. Working paper, Helsinki School of Economics, Helsinki.
3. Artzner, P., F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath (1999). Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance* **9**(3) 203–228.
4. Baumol, D. P. (1963). An Expected Gain-Confidence Limit Criterion for Portfolio Selection. *Management Science* **10**(1) 174-182.
5. Bibby, B. M., I. M. Skovgaard, and M. Sørensen (2005). Diffusion-type Models with Given Marginal and Autocorrelation Function. *Bernoulli* **11**(2) 191–220.
6. Daníelsson, J., B. N. Jorgensen, G. Samorodnitsky, M. Sarma, and C. G. de Vries (2005). Subadditivity Re-Examined: the Case for Value-at-Risk. Preprint, London School of Economics, London.
7. Gaivoronski, A. A. and G. Pflug (2005). Value-at-Risk in Portfolio Optimization: Properties and Computational Approach. *Journal of Risk* **7**(2) 1-31.
8. Heyde, C. C., S. G. Kou, and X. H. Peng (2007). What Is a Good External Risk Measure: Bridging the Gaps between Robustness, Subadditivity, and Insurance Risk Measures. Working paper, Department of Industrial Engineering and Operations Research, Columbia University, New York.
9. Hong, L. J. (2009). Estimating Quantile Sensitivities. *Operations Research* **57**(1) 118–130.

10. Hong, L. J. and G. Liu (2009). Simulating Sensitivities of Conditional Value at Risk *Management Science* **55**(2) 281-293.
11. Jorion, P. (1997). *Value at Risk: the New Benchmark for Controlling Market Risk.* McGraw-Hill, New York.
12. Karush, W. (1939). Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Constraints. Master's thesis, Department of Mathematics, University of Chicago, Chicago.
13. Kuhn, H. W. and A. W. Tucker (1951). Nonlinear Programming. *Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* 481-492.
14. Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance* **7**(1) 77–91.
15. Markowitz, H. (1959). *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment.* Wiley, New York.
16. Pflug, G. (2000). Some Remarks on the Value-at-Risk and the Conditional Value-at-Risk. S. Uryasev, ed. *Probabilistic Constrained Optimization Methodology and Applications*. Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, 272–281.
17. Rockafellar, R. T. and S. Uryasev (2000). Optimization of Conditional Value-at-Risk. *Journal of Risk* **2** 21–41.
18. Rockafellar, R. T. and S. Uryasev (2002). Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions. *Journal of Banking and Finance* **26** 1443–1471.
19. Serfling, R. J. (1980). *Approximation Theorems of Mathematical Statistics.* Wiley, New York.
20. Trindade, A. A., S. Uryasev, A. Shapiro, and G. Zrazhevsky (2007). Financial Prediction with Constrained Tail Risk. *Journal of Banking and Finance* **31** 3524–3538.

附錄一

由(2.4.3)式可知：

$$\begin{aligned}
\mathrm{CVaR}_\alpha(L) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_{\mathrm{VaR}_\alpha(L)}^{\infty} l\cdot f(l)dl \\
&= \mathrm{VaR}_\alpha(L) + \frac{1}{1-\alpha}\left[\int_{\mathrm{VaR}_\alpha(L)}^{\infty} l\cdot f(l)dl - \mathrm{VaR}_\alpha(L)\int_{\mathrm{VaR}_\alpha(L)}^{\infty} f(l)dl\right] \\
&= \mathrm{VaR}_\alpha(L) + \frac{1}{1-\alpha}\left[\int_{\mathrm{VaR}_\alpha(L)}^{\infty} l\cdot f(l)dl - \int_{\mathrm{VaR}_\alpha(L)}^{\infty} \mathrm{VaR}_\alpha(L)\cdot f(l)dl\right] \\
&= \mathrm{VaR}_\alpha(L) + \frac{1}{1-\alpha}\int_{\mathrm{VaR}_\alpha(L)}^{\infty} [l-\mathrm{VaR}_\alpha(L)]\cdot f(l)dl \\
&= \mathrm{VaR}_\alpha(L) + \frac{1}{1-\alpha}E[L-\mathrm{VaR}_\alpha(L)]^+ ,
\end{aligned}$$

可得(2.4.4)式。

由(2.4.3)式可知：

$$\begin{aligned}
\mathrm{CVaR}_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_{\mathrm{VaR}_\alpha(X)}^{\infty} x\cdot f(x)dx \\
&= \mu + \frac{1}{1-\alpha}\left[\mu\alpha - \mu + \int_{\mathrm{VaR}_\alpha(X)}^{\infty} x\cdot f(x)dx\right] \\
&= \mu + \frac{1}{1-\alpha}\left[\mu\alpha - \int_{-\infty}^{\mathrm{VaR}_\alpha(X)} x\cdot f(x)dx\right] \\
&= \mu + \frac{\mu F\left(\mathrm{VaR}_\alpha(X)\right) - \int_{-\infty}^{\mathrm{VaR}_\alpha(X)} x\cdot f(x)dx}{f\left(\mathrm{VaR}_\alpha(X)\right)}\cdot\frac{f\left(\mathrm{VaR}_\alpha(X)\right)}{1-F\left(\mathrm{VaR}_\alpha(X)\right)} \\
&= \mu + \frac{v\left(\mathrm{VaR}_\alpha(X)\right)}{2\theta}\frac{f\left(\mathrm{VaR}_\alpha(X)\right)}{1-F\left(\mathrm{VaR}_\alpha(X)\right)} ,
\end{aligned}$$

可得(2.4.9)式。

附錄二

表六、表七和表八為 Andreev et al. (2005)所介紹常見機率分配的條件風險值之封閉解。

表六：常見機率分配的條件風險值之封閉解

分配和區間	機率密度函數$f(x)$	平均數μ	平方擴散$v(x)$	條件風險值$\mathrm{CVaR}_\alpha(X)$
標準常態 $(-\infty,\infty)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$	0	2θ	$\frac{f(q)}{1-F(q)}$
t $(-\infty,\infty)$	$\frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\left(1+\frac{1}{v}x^2\right)^{\frac{-(v+1)}{2}}$ $v>0$	0	$\frac{2\theta}{v-1}(v+x^2)$	$\frac{v+q^2}{v-1}\frac{f(q)}{1-F(q)}$
Laplace $(-\infty,\infty)$	$\frac{a^2-b^2}{2a}e^{bx-a\lvert x\rvert}$ $a^2>b^2$	$\frac{2b}{a^2-b^2}$	$\frac{2\theta}{a^2-b^2}(1+a\lvert x\rvert+bx)$	$\frac{2b}{a^2-b^2}+\frac{1+a\lvert q\rvert+bq}{a^2-b^2}\frac{f(q)}{1-F(q)}$
Logistic $(-\infty,\infty)$	$\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$	0	$2\theta[(e^x+e^{-x}+2)\log(1+e^x)-x(1+e^x)]$	$[(e^q+e^{-q}+2)\log(1+e^q)-q(1+e^q)]\frac{f(q)}{1-F(q)}$
極值 $(-\infty,\infty)$	$e^{-x-e^{-x}}$	γ	$2\theta e^x\left(\gamma-x+e^{e^{-x}}Ei(-e^{-x})\right)$	$\gamma+\left[e^q\left(\gamma-q+e^{e^{-q}}Ei(-e^{-q})\right)\right]\frac{f(q)}{1-F(q)}$

註：表中$q=\mathrm{VaR}_\alpha(X)$，Ei為指數積分函數(exponential integral function)

國立高雄大學 National University of Kaohsiung

表七：常見機率分配的條件風險值之封閉解（續）

分配和區間	機率密度函數$f(x)$	平均數μ	平方擴散$v(x)$	條件風險值$\mathrm{CVaR}_\alpha(X)$
Pareto $(0,\infty)$	$a(1+x)^{-a-1}$ $a>1$	$\frac{1}{a-1}$	$\frac{2\theta}{a-1}x(1-x)$	$\frac{1}{a-1}[1+q(1+q)]\frac{f(q)}{1-F(q)}$
指數 $(0,\infty)$	$\lambda e^{-\lambda x}$ $\lambda>0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{2\theta}{\lambda}x$	$\frac{1}{\lambda}+q$
Gamma $(0,\infty)$	$\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-\lambda x}$ $a\geq 1,\lambda>0$	$\frac{a}{\lambda}$	$\frac{2\theta}{\lambda}x$	$\frac{1}{\lambda}(a+q)\frac{f(q)}{1-F(q)}$
卡方 $(0,\infty)$	$\frac{1}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}x^{\frac{v}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}x}$ $v\geq 2$	v	$4\theta x$	$v+2q\frac{f(q)}{1-F(q)}$
逆 Gamma $(0,\infty)$	$\frac{\delta^\lambda}{\Gamma(\lambda)}x^{-\lambda-1}e^{\frac{-\delta}{x}}$ $\delta>0,\lambda>1$	$\frac{\delta}{\lambda-1}$	$\frac{2\theta}{\lambda-1}x^2$	$\frac{1}{\lambda-1}\left[\delta+q^2\frac{f(q)}{1-F(q)}\right]$

註：表中$q=\mathrm{VaR}_\alpha(X)$

國立高雄大學 National University of Kaohsiung

表八：常見機率分配的條件風險值之封閉解（續）

分配和區間	機率密度函數$f(x)$	平均數μ	平方擴散$v(x)$	條件風險值$\mathrm{CVaR}_\alpha(X)$
逆高斯 $(0,\infty)$	$\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}}e^{\frac{\lambda(x-\delta)^2}{2\delta^2 x}}$ $\delta>0,\lambda>0$	δ	$\frac{4\theta\delta}{f(x)}e^{\frac{2\lambda}{\delta}}\Phi\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{x}}\left(\frac{x}{\delta}+1\right)\right)$	$\delta+2\delta e^{\frac{2\lambda}{\delta}}\Phi\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{q}}\left(\frac{q}{\delta}+1\right)\right)\frac{f(q)}{1-F(q)}$
F $(0,\infty)$	$\frac{a^{\frac{a}{2}}b^{\frac{b}{2}}}{B\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)}\frac{x^{\frac{a}{2}-1}}{(b+ax)^{\frac{a+b}{2}}}$ $a\geq 2,b>2$	$\frac{b}{b-2}$	$\frac{4\theta}{a(b-2)}x(b+ax)$	$\frac{b}{b-2}+\frac{2q(b+aq)}{a(b-2)}\frac{f(q)}{1-F(q)}$
log-常態 $(0,\infty)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}x}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\log(x)-\delta)^2}$	$e^{\delta+2\sigma^2}$	$\frac{2\theta\mu}{f(x)}\left[\Phi\left(\frac{\log(x)-\delta}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\log(x)-\delta}{\sigma}-\sigma\right)\right]$	$\mu+\mu\left[\Phi\left(\frac{\log(q)-\delta}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\log(q)-\delta}{\sigma}-\sigma\right)\right]\frac{1}{1-F(q)}$
Weibull $(0,\infty)$	$cx^{c-1}e^{-x^c}$ $c>0$	$\Gamma\left(\frac{1}{c}+1\right)$	$\frac{2\theta}{f(x)}\left[\Gamma\left(\frac{1}{c}+1\right)\left(1-e^{-x^c}\right)-\Gamma\left(x^c;\frac{1}{c}+1\right)\right]$	$\Gamma\left(\frac{1}{c}+1\right)+\frac{1}{1-F(q)}\left[\Gamma\left(\frac{1}{c}+1\right)\left(1-e^{-q^c}\right)-\Gamma\left(q^c;\frac{1}{c}+1\right)\right]$

註：表中$q=\mathrm{VaR}_\alpha(X)$，Φ為標準常態分配的累積分配函數，$\Gamma(x;a)$為不完整 gamma 函數(incomplete gamma function)

以下將計算標準常態分配、t 分配和 Laplace 分配的條件風險值之封閉解。

一、標準常態分配

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x} yf(y)\,dy &= \int_{-\infty}^{x} \frac{y}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy^2 \\ &= \left[\frac{-1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\right]_{-\infty}^{x} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\ ,\end{aligned}$$

其中$x \in \mathbb{R}$。因此，由(2.4.8)式可得：

$$v(x) = 2\theta\ ,$$

再由(2.4.9)式可得：

$$\mathrm{CVaR}_{\alpha}(X) = \frac{f\big(\mathrm{VaR}_{\alpha}(X)\big)}{1 - F\big(\mathrm{VaR}_{\alpha}(X)\big)}\ 。$$

二、t 分配

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x} yf(y)\,dy &= \int_{-\infty}^{x} \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} y\left(1+\frac{1}{v}y^2\right)^{\frac{-(v+1)}{2}}\,dy \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{v}y^2\right)^{\frac{-(v+1)}{2}}\,dy^2 \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2}\left[\frac{2v}{1-v}\left(1+\frac{1}{v}y^2\right)^{\frac{1-v}{2}}\right]_{-\infty}^{x} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2}\left[\frac{2v}{1-v}\left(1+\frac{1}{v}x^2\right)^{\frac{1-v}{2}}\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \frac{v}{1-v} \left(1+\frac{1}{v}x^2\right)^{\frac{1-v}{2}} ,$$

其中$x \in \mathbb{R}$，$v > 0$。因此，由(2.4.8)式可得：

$$v(x) = \frac{2\theta}{v-1}(v+x^2) ,$$

再由(2.4.9)式可得：

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(X) = \frac{v+[VaR_\alpha(X)]^2}{v-1} \frac{f\left(\mathrm{VaR}_\alpha(X)\right)}{1-F\left(\mathrm{VaR}_\alpha(X)\right)} 。$$

三、Laplace 分配

考慮以下兩種情況。

情況一：

若$x < 0$，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x} yf(y)\,dy &= \int_{-\infty}^{x} \frac{a^2-b^2}{2a} ye^{(b+a)y}\,dy \\ &= \frac{a^2-b^2}{2a}\left[\frac{x}{b+a}e^{(b+a)x} - \frac{1}{(b+a)^2}e^{(b+a)x}\right] \\ &= \frac{a^2-b^2}{2a}\left[\frac{x}{b+a} - \frac{1}{(b+a)^2}\right]e^{(b+a)x} ,\end{aligned}$$

X的累積分配函數為：

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{a^2-b^2}{2a} e^{(b+a)y}\,dy \\ &= \frac{a^2-b^2}{2a}\left[\frac{1}{b+a}e^{(b+a)y}\right]_{-\infty}^{x} \\ &= \frac{a^2-b^2}{2a}\frac{1}{b+a}e^{(b+a)x} ,\end{aligned}$$

其中$x \in \mathbb{R}$。因此，由(2.4.8)式可得：

$$v(x) = \frac{2\theta}{a^2-b^2}(1-ax+bx) ,$$

再由(2.4.9)式可得：

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(X)=\frac{2b}{a^2-b^2}+\frac{1-a\mathrm{VaR}_\alpha(X)+b\mathrm{VaR}_\alpha(X)}{a^2-b^2}\frac{f\left(\mathrm{VaR}_\alpha(X)\right)}{1-F\left(\mathrm{VaR}_\alpha(X)\right)}。$$

情況二：

若$x\geq 0$，

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{x} yf(y)\,dy=\int_{-\infty}^{0}\frac{a^2-b^2}{2a}ye^{(b+a)y}\,dy+\int_{0}^{x}\frac{a^2-b^2}{2a}ye^{(b-a)y}\,dy\\
&=\frac{a^2-b^2}{2a}\left[-\frac{1}{(a+b)^2}\right]+\frac{a^2-b^2}{2a}\left[\frac{y}{b-a}e^{(b-a)y}-\frac{1}{(b-a)^2}e^{(b-a)y}\right]_0^x\\
&=\frac{a^2-b^2}{2a}\left[-\frac{1}{(a+b)^2}\right]+\frac{a^2-b^2}{2a}\left\{\left[\frac{x}{b-a}-\frac{1}{(b-a)^2}\right]e^{(b-a)x}+\frac{1}{(b-a)^2}\right\}\\
&=\frac{a^2-b^2}{2a}\left\{\left[\frac{x}{b-a}-\frac{1}{(b-a)^2}\right]e^{(b-a)x}-\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b-a)^2}\right\}
\end{aligned}$$

X的累積分配函數為：

$$\begin{aligned}
F(x)&=\int_{-\infty}^{0}\frac{a^2-b^2}{2a}e^{(b+a)y}\,dy+\int_{0}^{x}\frac{a^2-b^2}{2a}e^{(b-a)y}\,dy\\
&=\frac{a^2-b^2}{2a}\left[\frac{1}{b+a}e^{(b+a)y}\right]_{-\infty}^{0}+\frac{a^2-b^2}{2a}\left[\frac{1}{b-a}e^{(b-a)y}\right]_0^x\\
&=\frac{a^2-b^2}{2a}\frac{1}{b+a}+\frac{a^2-b^2}{2a}\left[\frac{1}{b-a}e^{(b-a)x}-\frac{1}{b-a}\right]\\
&=\frac{a^2-b^2}{2a}\left[\frac{1}{b-a}e^{(b-a)x}+\frac{1}{b+a}-\frac{1}{b-a}\right]，
\end{aligned}$$

其中$x\in\mathbb{R}$。因此，由(2.4.8)式可得：

$$v(x)=\frac{2\theta}{a^2-b^2}(1+ax+bx)，$$

再由(2.4.9)式可得：

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(X)=\frac{2b}{a^2-b^2}+\frac{1+a\mathrm{VaR}_\alpha(X)+b\mathrm{VaR}_\alpha(X)}{a^2-b^2}\frac{f\left(\mathrm{VaR}_\alpha(X)\right)}{1-F\left(\mathrm{VaR}_\alpha(X)\right)}。$$

綜合以上兩種情況，可得：

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(X)=\frac{2b}{a^2-b^2}+\frac{1+a|\mathrm{VaR}_\alpha(X)|+b\mathrm{VaR}_\alpha(X)}{a^2-b^2}\frac{f\left(\mathrm{VaR}_\alpha(X)\right)}{1-F\left(\mathrm{VaR}_\alpha(X)\right)}。$$

附錄三

由(4.1.1)式，令$D|B \sim BN_1 + (1-B)N_2$，D的期望值為：

$$\begin{aligned} E(D) &= E[E(D|B)] \\ &= E[B \cdot E(N_1) + (1-B)E(N_2)] \\ &= E\left[B\mu_{N_1} + (1-B)\mu_{N_2}\right] \\ &= p\mu_{N_1} + (1-p)\mu_{N_2} \text{。} \end{aligned}$$

D的變異數為：

$$\begin{aligned} \text{var}(D) &= E[\text{var}(D|B)] + \text{var}[E(D|B)] \\ &= E[B^2\text{var}(N_1) + (1-B)^2\text{var}(N_2)] + \text{var}[B \cdot E(N_1) + (1-B)E(N_2)] \\ &= E\left[B^2\sigma_{N_1}^2 + (1-B)^2\sigma_{N_2}^2\right] + \text{var}\left[B\mu_{N_1} + (1-B)\mu_{N_2}\right] \\ &= \sigma_{N_1}^2 E(B^2) + \sigma_{N_2}^2 E(1-B)^2 + \mu_{N_1}^2\text{var}(B) + \mu_{N_2}^2\text{var}(1-B) \\ &\quad +2\mu_{N_1}\mu_{N_2}\text{Cov}(B,1-B) \\ &= \sigma_{N_1}^2\{\text{var}(B) + [E(B)]^2\} + \sigma_{N_2}^2\{\text{var}(1-B) + [E(1-B)]^2\} \\ &\quad +\left[\mu_{N_1}^2 p(1-p) + \mu_{N_2}^2 p(1-p) - 2\mu_{N_1}\mu_{N_2}p(1-p)\right] \\ &= \sigma_{N_1}^2[p(1-p) + p^2] + \sigma_{N_2}^2[p(1-p) + (1-p)^2] + \left(\mu_{N_1} - \mu_{N_2}\right)^2 p(1-p) \\ &= \sigma_{N_1}^2 p + \sigma_{N_2}^2(1-p) + \left(\mu_{N_1} - \mu_{N_2}\right)^2 p(1-p) \text{。} \end{aligned}$$

附錄四

表九：以標準差作為風險衡量指標時兩項投資標的之投資組合的模擬結果

標準差		個數	$\widehat{w}^*$平均	$\widehat{\mathrm{sd}}^*$平均(%)	$-\overline{L}^*$平均(%)
常態分配	全部m個	2000	0.4481	1.9593	0.1081
	$\widehat{\mathrm{sd}}^* \leq 2.361$	1562	0.5659	1.7689	0.0917
	$\widehat{\mathrm{sd}}^* > 2.361$	438	0.0284	2.6384	0.1664
雙指數分配	全部m個	2000	0.4476	1.9010	0.1022
	$\widehat{\mathrm{sd}}^* \leq 2.361$	1591	0.5409	1.6723	0.0804
	$\widehat{\mathrm{sd}}^* > 2.361$	409	0.0847	2.7904	0.1871
t分配	全部m個	2000	0.4116	1.6931	0.1001
	$\widehat{\mathrm{sd}}^* \leq 2.361$	1765	0.4461	1.4365	0.0980
	$\widehat{\mathrm{sd}}^* > 2.361$	235	0.1521	3.6206	0.1155
混合常態分配	全部m個	1996	0.4282	1.5376	0.1007
	$\widehat{\mathrm{sd}}^* \leq 2.361$	1574	0.4625	0.9924	0.0945
	$\widehat{\mathrm{sd}}^* > 2.361$	422	0.3004	3.5710	0.1242

國立高雄大學 National University of Kaohsiung

表十：以半標準差作為風險衡量指標時兩項投資標的之投資組合的模擬結果

半標準差		個數	$\widehat{w}^*$平均	$\widehat{\text{ssd}}^*$平均(%)	$-\bar{L}^*$平均(%)
常態分配	全部m個	2000	0.4186	1.3206	0.1045
	$\widehat{\text{ssd}}^* \leq 1.669$	1504	0.4893	1.0534	0.2573
	$\widehat{\text{ssd}}^* > 1.669$	496	0.2043	2.1309	-0.3588
雙指數分配	全部m個	2000	0.4339	1.3009	0.0970
	$\widehat{\text{ssd}}^* \leq 1.669$	1470	0.5005	0.9815	0.2499
	$\widehat{\text{ssd}}^* > 1.669$	530	0.2491	2.1870	-0.3272
t分配	全部m個	2000	0.3979	1.0816	0.0991
	$\widehat{\text{ssd}}^* \leq 1.669$	1707	0.4155	0.8321	0.1896
	$\widehat{\text{ssd}}^* > 1.669$	293	0.2953	2.5350	-0.4282
混合常態分配	全部m個	1995	0.4056	0.9358	0.0972
	$\widehat{\text{ssd}}^* \leq 1.669$	1619	0.4298	0.4300	0.2209
	$\widehat{\text{ssd}}^* > 1.669$	376	0.3014	3.1139	-0.4353

國立高雄大學 National University of Kaohsiung

表十一：以風險值作為風險衡量指標時兩項投資標的之投資組合的模擬結果

風險值		個數	$\hat{w}^*$平均	$\widehat{\text{VaR}}^*$平均(%)	$-\bar{L}^*$平均(%)
常態分配	全部m個	1836	0.5840	2.0388	0.0784
	$\widehat{\text{VaR}}^* \leq 2.273$	1221	0.5912	1.6905	0.1704
	$\widehat{\text{VaR}}^* > 2.273$	615	0.5697	2.7304	-0.1041
雙指數分配	全部m個	1897	0.5475	2.0290	0.0878
	$\widehat{\text{VaR}}^* \leq 2.273$	1271	0.5643	1.5669	0.1860
	$\widehat{\text{VaR}}^* > 2.273$	626	0.5133	2.9673	-0.1114
t分配	全部m個	1972	0.2257	1.9517	0.1250
	$\widehat{\text{VaR}}^* \leq 2.273$	1430	0.2408	1.4644	0.2423
	$\widehat{\text{VaR}}^* > 2.273$	542	0.1861	3.2375	-0.1845
混合常態分配	全部m個	2000	0.2237	1.3237	0.1262
	$\widehat{\text{VaR}}^* \leq 2.273$	1862	0.2294	0.9929	0.1825
	$\widehat{\text{VaR}}^* > 2.273$	138	0.1474	5.7869	-0.6336

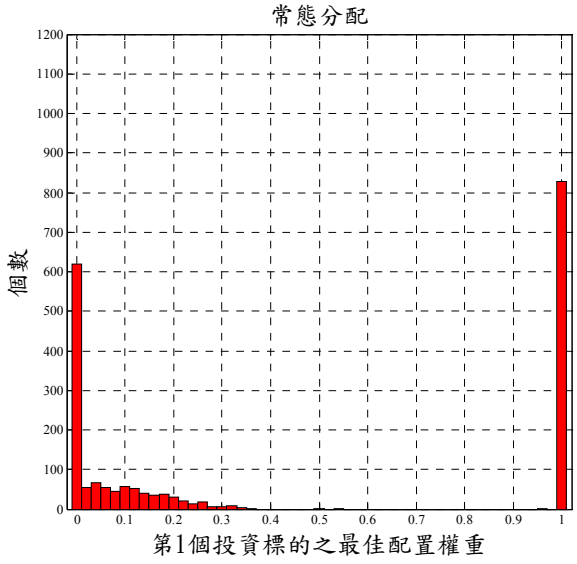
國立高雄大學 National University of Kaohsiung

表十二：以條件風險值作為風險衡量指標時兩項投資標的之投資組合的模擬結果

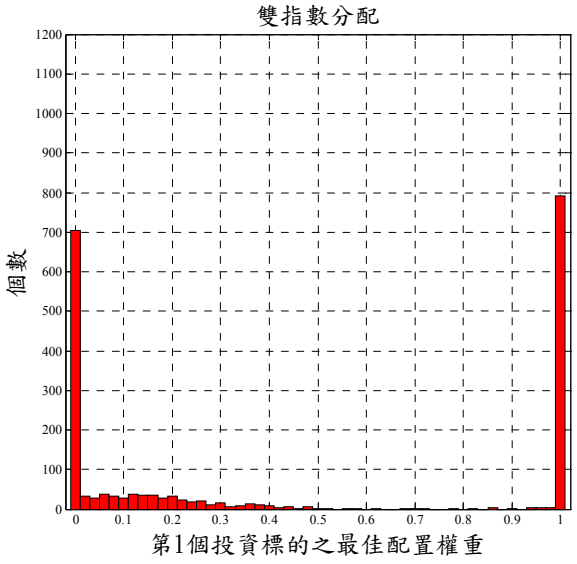
條件風險值		個數	$\widehat{w}^*$平均	$\widehat{\text{CVaR}}^*$平均(%)	$-\bar{L}^*$平均(%)
常態分配	全部m個	2000	0.5726	2.6594	0.0802
	$\widehat{\text{CVaR}}^* \leq 2.871$	1294	0.5812	2.1879	0.1609
	$\widehat{\text{CVaR}}^* > 2.871$	706	0.5568	3.5235	-0.0678
雙指數分配	全部m個	2000	0.6079	2.6789	0.0709
	$\widehat{\text{CVaR}}^* \leq 2.871$	1265	0.6127	2.0185	0.1622
	$\widehat{\text{CVaR}}^* > 2.871$	735	0.5997	3.8157	-0.0863
t分配	全部m個	1996	0.4719	2.8738	0.1023
	$\widehat{\text{CVaR}}^* \leq 2.871$	1355	0.4825	1.8458	0.1981
	$\widehat{\text{CVaR}}^* > 2.871$	641	0.4496	5.0468	-0.1004
混合常態分配	全部m個	1985	0.5517	3.1471	0.0781
	$\widehat{\text{CVaR}}^* \leq 2.871$	1341	0.5646	1.0253	0.2086
	$\widehat{\text{CVaR}}^* > 2.871$	644	0.5248	7.5652	-0.1936

國立高雄大學 National University of Kaohsiung

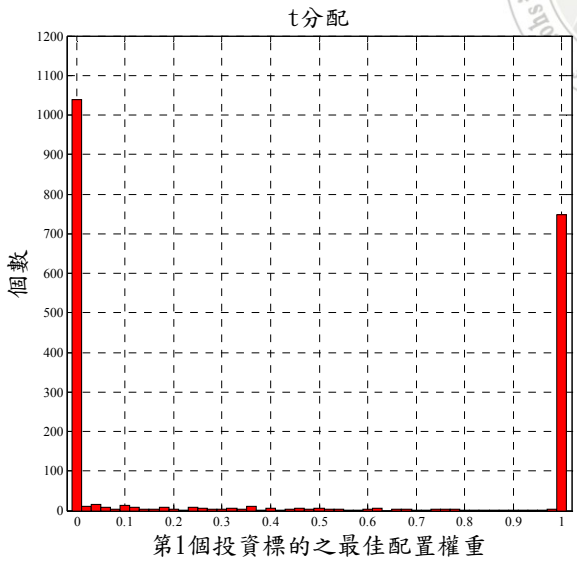
圖二：以標準差作為風險衡量指標時兩項投資標的之投資組合的$\hat{w}^*$



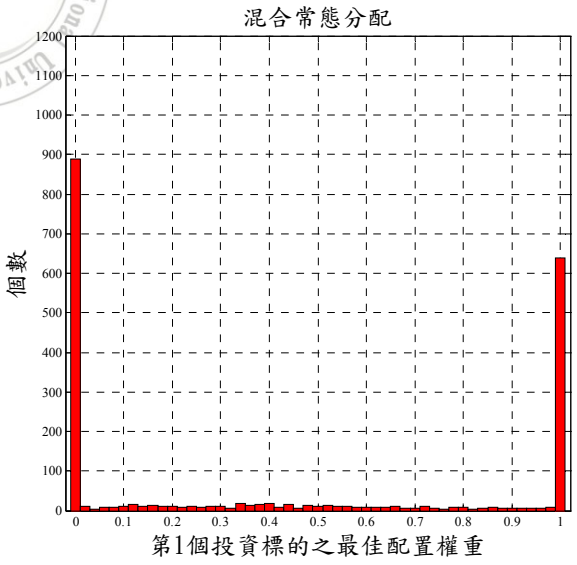
第一四分位數	中位數	第三四分位數
0.0000	0.1551	1.0000



第一四分位數	中位數	第三四分位數
0.0000	0.1905	1.0000



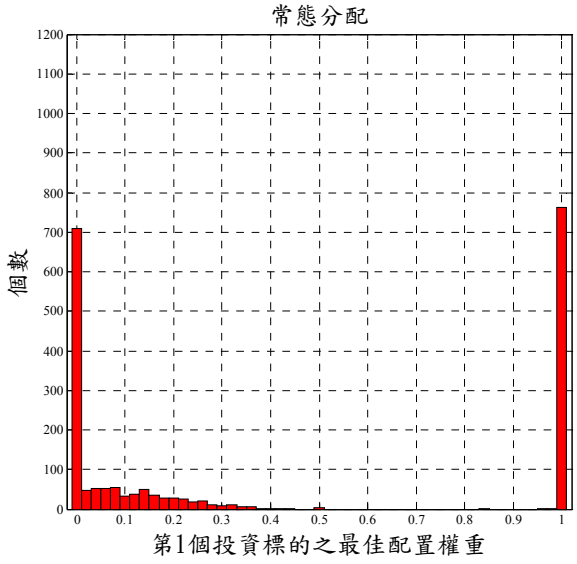
第一四分位數	中位數	第三四分位數
0.0000	0.0000	1.0000



第一四分位數	中位數	第三四分位數
0.0000	0.2195	1.0000

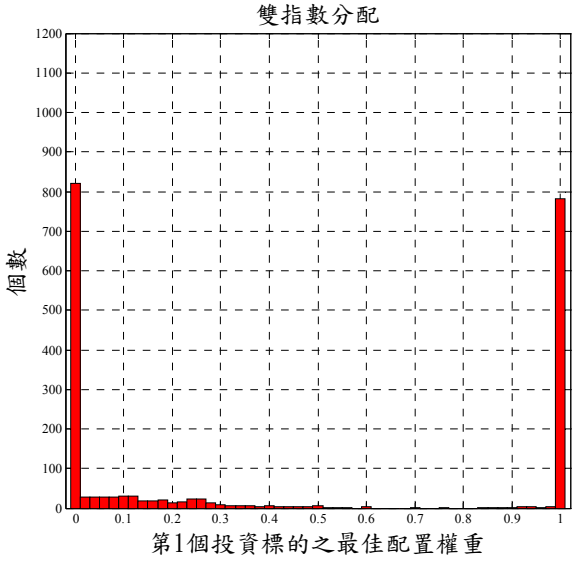
圖三：以半標準差作為風險衡量指標時兩項投資標的之投資組合的$\hat{w}^*$

常態分配



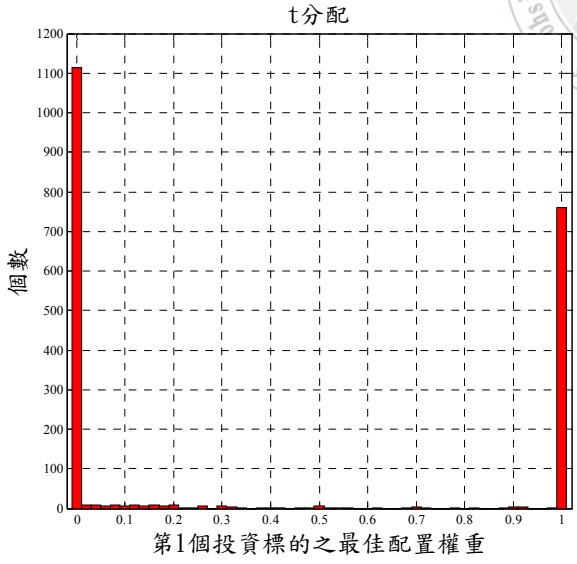
第一四分位數	中位數	第三四分位數
0.0000	0.1336	1.0000

雙指數分配



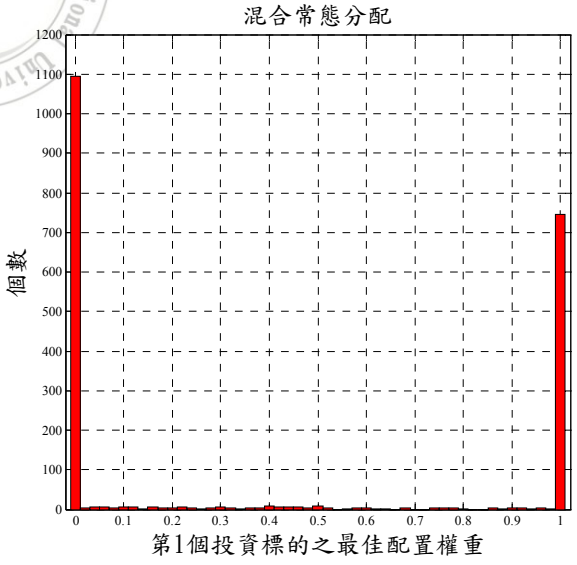
第一四分位數	中位數	第三四分位數
0.0000	0.1333	1.0000

t分配



第一四分位數	中位數	第三四分位數
0.0000	0.0000	1.0000

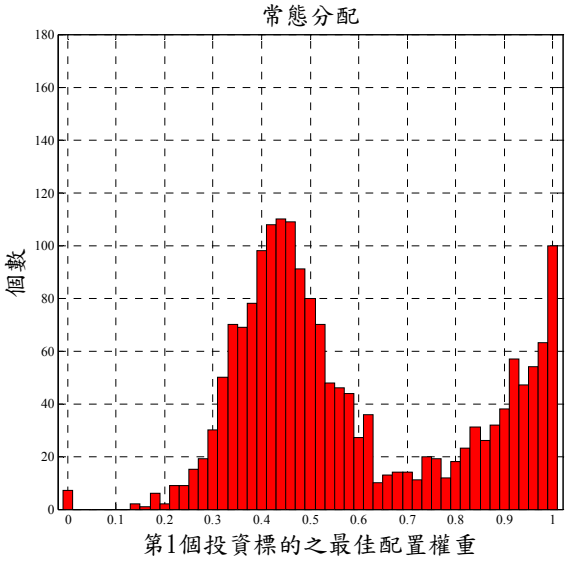
混合常態分配



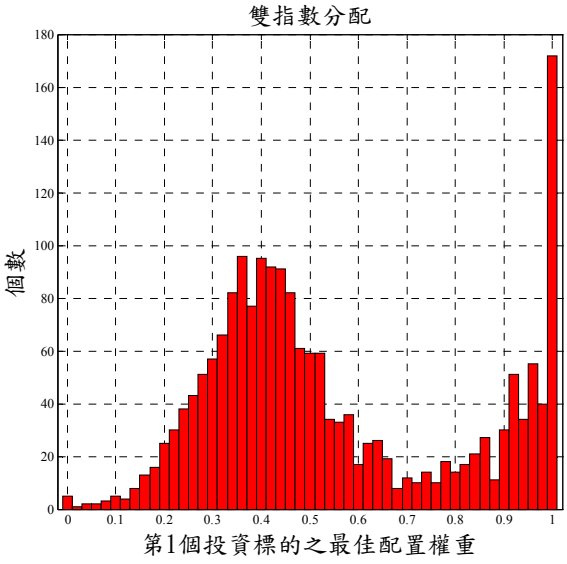
第一四分位數	中位數	第三四分位數
0.0000	0.0000	1.0000

國立高雄大學 National University of Kaohsiung

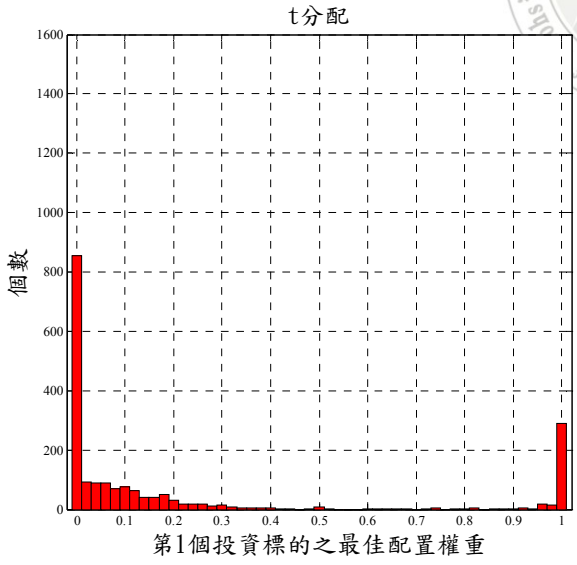
圖四：以風險值作為風險衡量指標時兩項投資標的之投資組合的$\hat{w}^*$



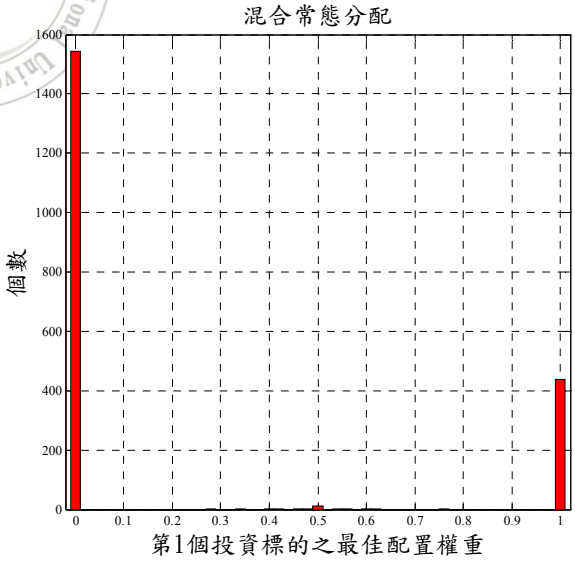
第一四分位數	中位數	第三四分位數
0.4093	0.4967	0.8205



第一四分位數	中位數	第三四分位數
0.3549	0.4610	0.7874



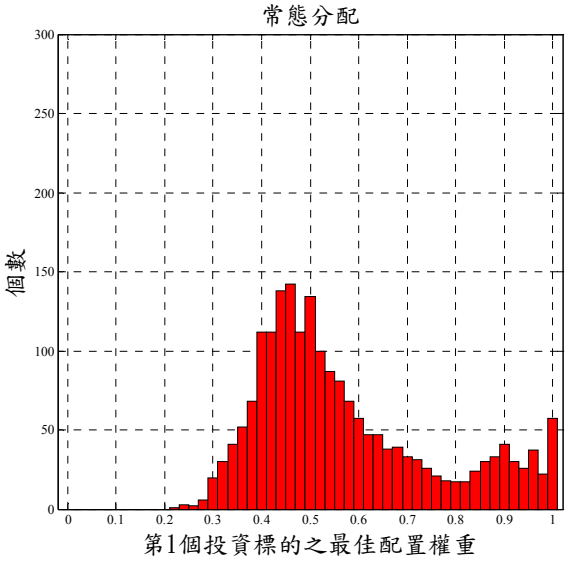
第一四分位數	中位數	第三四分位數
0.0000	0.0384	0.1994



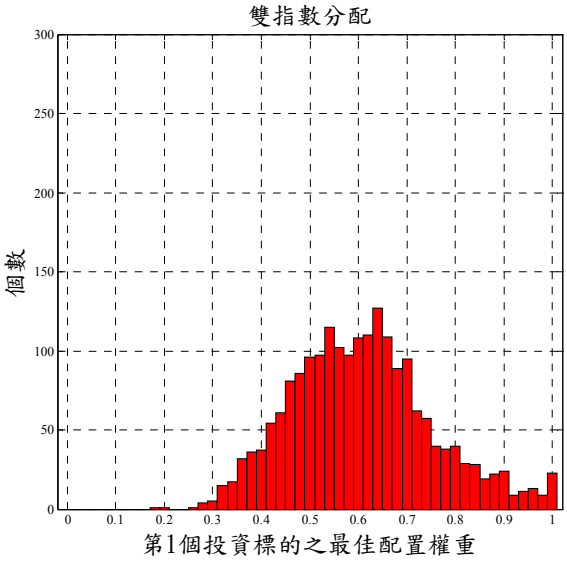
第一四分位數	中位數	第三四分位數
0.0000	0.0000	0.0000

國立高雄大學 National University of Kaohsiung

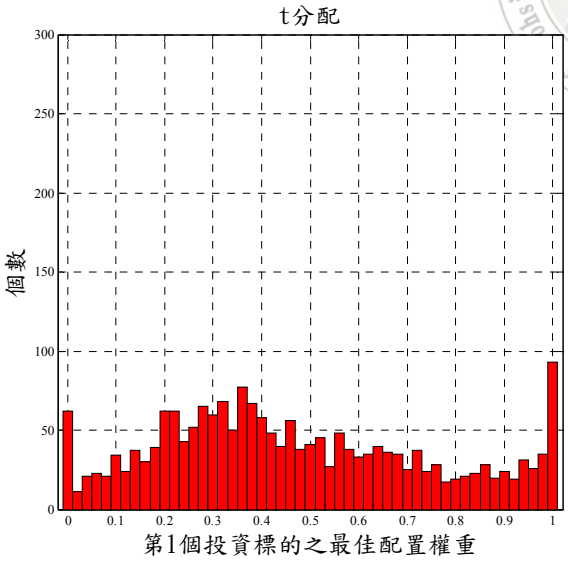
圖五：以條件風險值作為風險衡量指標時兩項投資標的之投資組合的$\hat{w}^*$



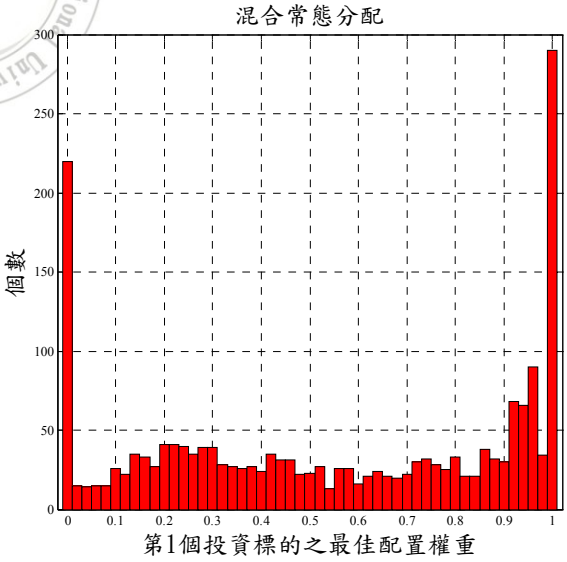
第一四分位數	中位數	第三四分位數
0.4376	0.5160	0.6712



第一四分位數	中位數	第三四分位數
0.5035	0.6029	0.6931



第一四分位數	中位數	第三四分位數
0.2613	0.4232	0.6780



第一四分位數	中位數	第三四分位數
0.2274	0.5660	0.9245

附錄五

表十三：以標準差作為風險衡量指標時三項投資標的之投資組合的模擬結果

標準差		個數	$\widehat{w}_1^*$平均	$\widehat{w}_2^*$平均	$\widehat{w}_3^*$平均	$\widehat{\mathrm{sd}}^*$平均(%)	$-\bar{L}^*$平均(%)
常態分配	全部m個	1984	0.4631	0.2550	0.2818	1.3084	0.0421
	$\widehat{\mathrm{sd}}^* \le 1.186$	700	0.4942	0.2315	0.2743	1.0347	0.0483
	$\widehat{\mathrm{sd}}^* > 1.186$	1284	0.4462	0.2679	0.2859	1.4576	0.0387
雙指數分配	全部m個	1983	0.4421	0.2721	0.2858	1.3584	0.0527
	$\widehat{\mathrm{sd}}^* \le 1.186$	737	0.4812	0.2467	0.2721	1.0158	0.0592
	$\widehat{\mathrm{sd}}^* > 1.186$	1246	0.4189	0.2871	0.2940	1.5610	0.0489
t分配	全部m個	1993	0.3142	0.3803	0.3055	1.4210	0.0666
	$\widehat{\mathrm{sd}}^* \le 1.186$	879	0.3494	0.3478	0.3027	0.9636	0.0513
	$\widehat{\mathrm{sd}}^* > 1.186$	1114	0.2864	0.4059	0.3077	1.7819	0.0786
混合常態分配	全部m個	1950	0.2967	0.4450	0.2583	1.4636	0.0828
	$\widehat{\mathrm{sd}}^* \le 1.186$	1097	0.3350	0.3952	0.2698	0.6933	0.0849
	$\widehat{\mathrm{sd}}^* > 1.186$	853	0.2475	0.5090	0.2435	2.4543	0.0802

國立高雄大學 National University of Kaohsiung

表十四：以半標準差作為風險衡量指標時三項投資標的之投資組合的模擬結果

半標準差		個數	$\widehat{w}_1^*$平均	$\widehat{w}_2^*$平均	$\widehat{w}_3^*$平均	$\widehat{\text{ssd}}^*$平均(%)	$-\bar{L}^*$平均(%)
常態分配	全部m個	1977	0.4572	0.2628	0.2800	0.9092	0.0569
	$\widehat{\text{ssd}}^* \le 0.839$	932	0.4616	0.2592	0.2792	0.5678	0.2650
	$\widehat{\text{ssd}}^* > 0.839$	1045	0.4532	0.2661	0.2807	1.2137	-0.1287
雙指數分配	全部m個	1972	0.4178	0.2831	0.2991	0.9551	0.0651
	$\widehat{\text{ssd}}^* \le 0.839$	905	0.4220	0.2870	0.2909	0.5384	0.2969
	$\widehat{\text{ssd}}^* > 0.839$	1067	0.4142	0.2799	0.3060	1.3085	-0.1316
t分配	全部m個	1990	0.3144	0.3872	0.2984	0.9590	0.0687
	$\widehat{\text{ssd}}^* \le 0.839$	1077	0.3169	0.3788	0.3043	0.5047	0.2719
	$\widehat{\text{ssd}}^* > 0.839$	913	0.3116	0.3970	0.2914	1.4949	-0.1709
混合常態分配	全部m個	1953	0.3039	0.4446	0.2515	0.9013	0.0970
	$\widehat{\text{ssd}}^* \le 0.839$	1333	0.3114	0.4483	0.2402	0.3110	0.2623
	$\widehat{\text{ssd}}^* > 0.839$	620	0.2879	0.4365	0.2756	2.1705	-0.2586

國立高雄大學 National University of Kaohsiung

表十五：以風險值作為風險衡量指標時三項投資標的之投資組合的模擬結果

風險值		個數	$\hat{w}_1^*$平均	$\hat{w}_2^*$平均	$\hat{w}_3^*$平均	$\widehat{\text{VaR}}^*$平均(%)	$-\bar{L}^*$平均(%)
常態分配	全部m個	1970	0.4280	0.3254	0.2466	1.8168	0.0545
	$\widehat{\text{VaR}}^* \leq 1.885$	1119	0.4405	0.3186	0.2409	1.4340	0.1695
	$\widehat{\text{VaR}}^* > 1.885$	851	0.4116	0.3344	0.2541	2.3203	-0.0967
雙指數分配	全部m個	1979	0.4175	0.3419	0.2406	1.8195	0.0684
	$\widehat{\text{VaR}}^* \leq 1.885$	1190	0.4300	0.3343	0.2358	1.3617	0.1801
	$\widehat{\text{VaR}}^* > 1.885$	789	0.3986	0.3534	0.2479	2.5099	-0.1002
t分配	全部m個	1992	0.2099	0.5803	0.2098	1.7697	0.0932
	$\widehat{\text{VaR}}^* \leq 1.885$	1314	0.2134	0.5746	0.2119	1.2623	0.2295
	$\widehat{\text{VaR}}^* > 1.885$	678	0.2030	0.5913	0.2057	2.7529	-0.1711
混合常態分配	全部m個	2000	0.1541	0.6558	0.1901	1.3289	0.1037
	$\widehat{\text{VaR}}^* \leq 1.885$	1794	0.1638	0.6398	0.1964	0.9627	0.1720
	$\widehat{\text{VaR}}^* > 1.885$	206	0.0704	0.7951	0.1345	4.5182	-0.4909

國立高雄大學 National University of Kaohsiung

表十六：以條件風險值作為風險衡量指標時三項投資標的之投資組合的模擬結果

條件風險值		個數	$\widehat{w}_1^*$平均	$\widehat{w}_2^*$平均	$\widehat{w}_3^*$平均	$\widehat{\text{CVaR}}^*$平均(%)	$-\bar{L}^*$平均(%)
常態分配	全部m個	2000	0.4178	0.3315	0.2507	2.3447	0.0638
	$\widehat{\text{CVaR}}^* \leq 2.481$	1241	0.4255	0.3241	0.2505	1.9166	0.1326
	$\widehat{\text{CVaR}}^* > 2.481$	759	0.4053	0.3437	0.2510	3.0446	-0.0488
雙指數分配	全部m個	2000	0.4212	0.3074	0.2715	2.4186	0.0589
	$\widehat{\text{CVaR}}^* \leq 2.481$	1198	0.4258	0.2979	0.2762	1.7938	0.1410
	$\widehat{\text{CVaR}}^* > 2.481$	802	0.4142	0.3215	0.2643	3.3518	-0.0638
t分配	全部m個	1999	0.3252	0.4128	0.2620	2.5880	0.0801
	$\widehat{\text{CVaR}}^* \leq 2.481$	1273	0.3412	0.3977	0.2611	1.6230	0.1603
	$\widehat{\text{CVaR}}^* > 2.481$	726	0.2971	0.4392	0.2637	4.2800	-0.0605
混合常態分配	全部m個	1976	0.3414	0.3890	0.2696	3.0558	0.0736
	$\widehat{\text{CVaR}}^* \leq 2.481$	1277	0.3594	0.3839	0.2566	1.0494	0.2139
	$\widehat{\text{CVaR}}^* > 2.481$	699	0.3085	0.3982	0.2933	6.7214	-0.1828

國立高雄大學 National University of Kaohsiung

附錄六

考慮一個非線性規劃問題：

$$\begin{cases} \min. & f(x)\ , \\ \text{s.t.} & g_i(x) \geq 0\ , \\ & h_j(x) = 0\ , \end{cases}$$

其中$i = 1,2,\cdots,m$，$j = 1,2,\cdots,n$，若$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$和$g_i: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$皆為連續可微的凸函數(convex function)，且$h_j: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$為一仿射函數(affine function)，則有一點x^*使得

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) - \sum_{j=1}^{n} \mu_i \nabla h_j(x^*) = 0\ , \\ g_i(x^*) \geq 0\ , \\ h_j(x^*) = 0\ , \\ \lambda_i \geq 0\ , \\ \lambda_i g_i(x^*) = 0\ , \end{cases} \tag{6.6.1}$$

其中$i = 1,2,\cdots,m$，$j = 1,2,\cdots,n$，則x^*即為全域最小值(global minimum)，為Karush-Kuhn-Tucker條件中的充分條件。

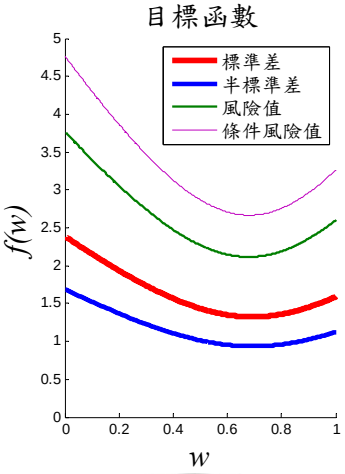
一、以標準差作為風險衡量指標

考慮一個非線性規劃問題：

$$\begin{cases} \min. & f(w) = \sqrt{w^2\sigma_{D_1}^2 + (1-w)^2\sigma_{D_2}^2} \\ \text{s.t.} & g_1(w) = -w\mu_{D_1} - (1-w)\mu_{D_2} - H_E \geq 0 \\ & g_2(w) = w \geq 0 \\ & g_3(w) = 1 - w \geq 0 \end{cases} \tag{6.6.2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \min. & f(w) = \sqrt{1.589^2 w^2 + 2.39^2 (1-w)^2}\,, \\ \text{s.t.} & g_1(w) = 0.016w + 0.16(1-w) - 0.088 \geq 0\,, \\ & g_2(w) = w \geq 0\,, \\ & g_3(w) = 1 - w \geq 0\,, \end{cases}$$

圖六：目標函數$f(w)$的圖形



其中當$w \in [0,1]$時，f為連續可微的凸函數（如圖六），g_1、g_2和g_3也皆為連續可微的凸函數，計算出$\nabla f(w)$、$\nabla g_1(w)$、$\nabla g_2(w)$和$\nabla g_3(w)$分別如下：

$$\begin{cases} \nabla f(w) = \dfrac{-11.4242(1-w) + 5.049842w}{2\sqrt{5.7121(1-w)^2 + 2.524921w^2}}\,, \\ \nabla g_1(w) = -0.144\,, \\ \nabla g_2(w) = 1\,, \\ \nabla g_3(w) = -1\,, \end{cases}$$

由(6.6.1)式可得：

$$\begin{cases} \text{(a)} & \dfrac{-11.4242(1-w^*) + 5.049842w^*}{2\sqrt{5.7121(1-w^*)^2 + 2.524921w^{*2}}} + 0.144\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0\,, \\ \text{(b)} & 0.016w^* + 0.16(1-w^*) - 0.088 \geq 0\,, \\ \text{(c)} & w^* \geq 0\,, \\ \text{(d)} & 1 - w^* \geq 0\,, \\ \text{(e)} & \lambda_i \geq 0\,, \\ \text{(f)} & \lambda_1[-0.016w^* - 0.16(1-w^*) - 0.088] = 0\,, \\ \text{(g)} & \lambda_2 w^* = 0\,, \\ \text{(h)} & \lambda_3(-w^*) = 0\,, \end{cases} \qquad (6.6.3)$$

其中$i = 1,2,3$，可討論以下八種情況。

情況一：

當$\lambda_1 = 0$、$\lambda_2 = 0$、$\lambda_3 = 0$時，由(6.6.3)式中的(a)式可得：

$$\frac{-11.4242(1-w^*)+5.049842w^*}{2\sqrt{5.7121(1-w^*)^2+2.524921w^{*2}}}=0$$

$$\Rightarrow w^* \fallingdotseq 0.6935，$$

將結果$w^* \fallingdotseq 0.6935$代入(b)式不合。

情況二：

當$\lambda_1 \neq 0$、$\lambda_2 = 0$、$\lambda_3 = 0$時，由(6.6.3)式中的(f)式可得：

$$0.016w^* + 0.16(1-w^*) - 0.088 = 0$$

$$\Rightarrow w^* = 0.5。 \tag{6.6.4}$$

情況三：

當$\lambda_1 = 0$、$\lambda_2 \neq 0$、$\lambda_3 = 0$時，由(6.6.3)式中的(g)式可得：

$$w^* = 0。 \tag{6.6.5}$$

情況四：

當$\lambda_1 = 0$、$\lambda_2 = 0$、$\lambda_3 \neq 0$時，由(6.6.3)式中的(h)式可得：

$$w^* = 0。 \tag{6.6.6}$$

情況五：

當$\lambda_1 \neq 0$、$\lambda_2 \neq 0$、$\lambda_3 = 0$時，由(6.6.3)式中的(f)式和(g)式可得：

$$\begin{cases} 0.016w^* + 0.16(1-w^*) - 0.088=0， \\ w^* = 0， \end{cases} \tag{6.6.7}$$

結果矛盾，故不合。

情況六：

當$\lambda_1 \neq 0$、$\lambda_2 = 0$、$\lambda_3 \neq 0$時，由(6.6.3)式中的(f)式和(h)式可得：

$$\begin{cases} 0.016w^* + 0.16(1-w^*) - 0.088=0， \\ w^* = 0， \end{cases} \tag{6.6.8}$$

結果矛盾，故不合。

情況七：

當$\lambda_1 = 0$、$\lambda_2 \neq 0$、$\lambda_3 \neq 0$時，由(6.6.3)式中的(g)式和(h)式可得：

$$w^* = 0。 \tag{6.6.9}$$

情況八：

當$\lambda_1 \neq 0$、$\lambda_2 \neq 0$、$\lambda_3 \neq 0$時，由(6.6.3)式中的(f)式和(g)式和(h)式可得：

$$\begin{cases} 0.016w^* + 0.16(1 - w^*) - 0.088=0， \\ w^* = 0， \end{cases} \tag{6.6.10}$$

結果矛盾，故不合。

綜合以上八種情況，w^*可能為 0.5 或 0，由於

$$f(0.5) \fallingdotseq 1.4350 < 2.39 = f(0)，$$

所以此問題在下列情況時$f(w^*)$有最適解：

$$\begin{aligned} &-w^*\mu_{D_1} - (1 - w^*)\mu_{D_2} - H_{\text{sd}} = 0 \\ \Rightarrow\ &w^* = \frac{-H_E - \mu_{D_2}}{\mu_{D_1} - \mu_{D_2}}。 \end{aligned} \tag{6.6.11}$$

接下來我們要計算(3.2.6)式，將(6.6.2)式表示如下：

$$\begin{aligned} &f(w^*) = \sqrt{w^{*2}\sigma_{D_1}^2 + (1 - w^*)^2\sigma_{D_2}^2} \\ \Rightarrow\ &f(w^*) = \sqrt{\left(\frac{-H_E - \mu_{D_2}}{\mu_{D_1} - \mu_{D_2}}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(1 - \frac{-H_E - \mu_{D_2}}{\mu_{D_1} - \mu_{D_2}}\right)^2 \sigma_2^2}， \end{aligned} \tag{6.6.12}$$

我們將(6.6.12)式表示成sd^*對於參數μ_{D_1}的函數：

$$\text{sd}\left(\mu_{D_1}\right)^* = \sqrt{\left(\frac{-0.088 + 0.16}{\mu_{D_1} + 0.16}\right)^2 \cdot 1.589^2 + \left(1 - \frac{-0.088 + 0.16}{\mu_{D_1} + 0.16}\right)^2 \cdot 2.39^2}，$$

對其於$\mu_{D_1} = -0.016$處微分可得：

$$\text{sd}'(-0.016)^* \fallingdotseq 3.8559，$$

即為所求。

二、半標準差作為風險衡量指標

由於我們考慮投資標的皆服從的分配為常態分配、雙指數分配、t 分配和混合常態分配，都為對稱分配，因此其投資組合所服從的分配也具有對稱性，故投資組合的半標準差會是標準差的$\frac{1}{\sqrt{2}}$倍，考慮一個非線性規劃問題：

$$\begin{cases} \min. & f(w)=\sqrt{\dfrac{w^2\sigma_{D_1}^2+(1-w)^2\sigma_{D_2}^2}{2}} \\ \text{s.t.} & g_1(w)=-w\mu_{D_1}-(1-w)\mu_{D_2}-H_E\geq 0 \\ & g_2(w)=w\geq 0 \\ & g_3(w)=1-w\geq 0 \end{cases} \tag{6.6.13}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \min. & f(w)=\sqrt{\dfrac{1.589^2w^2+2.39^2(1-w)^2}{2}}\ , \\ \text{s.t.} & g_1(w)=0.016w+0.16(1-w)-0.088\geq 0\ , \\ & g_2(w)=w\geq 0\ , \\ & g_3(w)=1-w\geq 0\ , \end{cases}$$

其中當$w\in[0,1]$時，f為連續可微的凸函數（如圖六），g_1、g_2和g_3也皆為連續可微的凸函數，計算出$\nabla f(w)$、$\nabla g_1(w)$、$\nabla g_2(w)$和$\nabla g_3(w)$分別如下：

$$\begin{cases} \nabla f(w)=\dfrac{-11.4242(1-w)+5.049842w}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5.7121(1-w)^2+2.524921w^2}}\ , \\ \nabla g_1(w)=-0.144\ , \\ \nabla g_2(w)=1\ , \\ \nabla g_3(w)=-1\ , \end{cases}$$

由(6.6.1)式可得：

$$\frac{-11.4242(1-w^*)+5.049842w^*}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5.7121(1-w^*)^2+2.524921w^{*2}}}+0.144\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0\ , \tag{6.6.14}$$

以及(6.6.3)式中的(b)式～(h)式，可討論八種情況。

情況一：

當$\lambda_1 = 0$、$\lambda_2 = 0$、$\lambda_3 = 0$時，由(6.6.14)式可得：

$$\frac{-11.4242(1-w^*)+5.049842w^*}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5.7121(1-w^*)^2+2.524921w^{*2}}}=0$$

$$\Rightarrow w^* \fallingdotseq 0.6935，$$

將結果$w^* \fallingdotseq 0.6935$代入(6.6.3)式中的(b)式不合。

其餘七種情況同(6.6.4)式～(6.6.10)式，因此其最適解也同(6.6.11)式。

接下來我們要計算(3.2.6)式，將(6.6.13)式表示如下：

$$f(w^*)=\sqrt{\frac{w^{*2}\sigma_{D_1}^2+(1-w^*)^2\sigma_{D_2}^2}{2}}$$

$$\Rightarrow f(w^*)=\sqrt{\frac{\left(\frac{-H_E-\mu_{D_2}}{\mu_{D_1}-\mu_{D_2}}\right)^2\sigma_1^2+\left(1-\frac{-H_E-\mu_{D_2}}{\mu_{D_1}-\mu_{D_2}}\right)^2\sigma_2^2}{2}}，\qquad (6.6.15)$$

我們將(6.6.15)式表示成ssd^*對於參數μ_{D_1}的函數：

$$\text{ssd}\left(\mu_{D_1}\right)^*=\sqrt{\frac{\left(\frac{-0.088+0.16}{\mu_{D_1}+0.16}\right)^2\cdot 1.589^2+\left(1-\frac{-0.088+0.16}{\mu_{D_1}+0.16}\right)^2\cdot 2.39^2}{2}}，$$

對其於$\mu_{D_1} = -0.016$處微分可得：

$$\text{ssd}'(-0.016)^* \fallingdotseq 2.7266，$$

即為所求。

二、風險值作為風險衡量指標

若投資標的皆服從常態分配時，考慮一個非線性規劃問題：

$$\begin{cases} \min. & f(w)=1.645\sqrt{w^2\sigma_{D_1}^2+(1-w)^2\sigma_{D_2}^2}+\left[w\mu_{D_1}+(1-w)\mu_{D_2}\right] \\ \text{s.t.} & g_1(w)=-w\mu_{D_1}-(1-w)\mu_{D_2}-H_E\geq 0 \\ & g_2(w)=w\geq 0 \\ & g_3(w)=1-w\geq 0 \end{cases} \tag{6.6.16}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \min. & f(w)=1.645\sqrt{1.589^2w^2+2.39^2(1-w)^2}-0.016w-0.16(1-w)， \\ \text{s.t.} & g_1(w)=0.016w+0.16(1-w)-0.088\geq 0， \\ & g_2(w)=w\geq 0， \\ & g_3(w)=1-w\geq 0， \end{cases}$$

其中當$w\in[0,1]$時，f為連續可微的凸函數（如圖六），g_1、g_2和g_3也皆為連續可微的凸函數，計算出$\nabla f(w)$、$\nabla g_1(w)$、$\nabla g_2(w)$和$\nabla g_3(w)$分別如下：

$$\begin{cases} \nabla f(w)=0.144+\dfrac{0.8225[-11.4242(1-w)+5.049842w]}{\sqrt{5.7121(1-w)^2+2.524921w^2}}， \\ \nabla g_1(w)=-0.144， \\ \nabla g_2(w)=1， \\ \nabla g_3(w)=-1， \end{cases}$$

由(6.6.1)式可得：

$$0.144+\frac{0.8225[-11.4242(1-w^*)+5.049842w^*]}{\sqrt{5.7121(1-w^*)^2+2.524921w^{*2}}}+0.144\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0， \tag{6.6.17}$$

以及(6.6.3)式中的(b)式～(h)式，可討論八種情況。

情況一：

當$\lambda_1=0$、$\lambda_2=0$、$\lambda_3=0$時，由(6.6.14)式可得：

$$0.144+\frac{0.8225[-11.4242(1-w^*)+5.049842w^*]}{\sqrt{5.7121(1-w^*)^2+2.524921w^{*2}}}=0$$

$$\Rightarrow w^*\fallingdotseq 0.6794，$$

將結果$w^*\fallingdotseq 0.6794$代入(6.6.3)式中的(b)式不合。

其餘七種情況同(6.6.4)式～(6.6.10)式，因此其最適解也同(6.6.11)式。

接下來我們要計算(3.2.6)式，將(6.6.16)式表示如下：

$$f(w^*) = 1.645\sqrt{w^{*2}\sigma_{D_1}^2 + (1-w^*)^2\sigma_{D_2}^2} + \left[w^*\mu_{D_1} + (1-w^*)\mu_{D_2}\right]$$

$$\Rightarrow f(w^*) = 1.645\sqrt{\frac{\left(\frac{-H_E-\mu_{D_2}}{\mu_{D_1}-\mu_{D_2}}\right)^2\sigma_1^2 + \left(1-\frac{-H_E-\mu_{D_2}}{\mu_{D_1}-\mu_{D_2}}\right)^2\sigma_2^2}{2}}$$

$$+\left[\left(\frac{-H_E-\mu_{D_2}}{\mu_{D_1}-\mu_{D_2}}\right)\mu_{D_1} + \left(1-\frac{-H_E-\mu_{D_2}}{\mu_{D_1}-\mu_{D_2}}\right)\mu_{D_2}\right], \qquad (6.6.18)$$

我們將(6.6.18)式表示成$\mathrm{VaR}^*_{95\%}$對於參數μ_{D_1}的函數：

$$\mathrm{VaR}_{95\%}(\mu_{D_1})^* = 1.645\sqrt{\frac{\left(\frac{-0.088+0.16}{\mu_{D_1}+0.16}\right)^2\cdot 1.589^2 + \left(1-\frac{-0.088+0.16}{\mu_{D_1}+0.16}\right)^2\cdot 2.39^2}{2}}$$

$$+\left[\left(\frac{-0.088+0.16}{\mu_{D_1}+0.16}\right)\mu_{D_1} + \left(1-\frac{-0.088+0.16}{\mu_{D_1}+0.16}\right)\mu_{D_2}\right],$$

對其於$\mu_{D_1} = -0.016$處微分可得：

$$\mathrm{VaR}'_{95\%}(-0.016)^* \fallingdotseq 6.3430,$$

即為所求。

國立高雄大學 National University of Kaohsiung

二、條件風險值作為風險衡量指標

若投資標的皆服從常態分配時，由(2.4.3)式可得投資組合的條件風險值：

$$\mathrm{CVaR}_{95\%}(L) = \frac{1}{0.05}\int_{\mathrm{VaR}_{95\%}(L)}^{\infty} l\cdot f(l)dl$$

$$= \frac{1}{0.05}\int_{1.645\sigma_L+\mu_L}^{\infty} \frac{l}{\sqrt{2\pi}\sigma_L} e^{\frac{-(l-\mu_L)^2}{2\cdot\sigma_L^2}} dl$$

$$= \frac{1}{0.05}\left[\int_{1.645\sigma_L+\mu_L}^{\infty} \frac{(l-\mu_L)}{\sqrt{2\pi}\sigma_L} e^{\frac{-(l-\mu_L)^2}{2\cdot\sigma_L^2}} dl + \int_{1.645\sigma_L+\mu_L}^{\infty} \frac{\mu_L}{\sqrt{2\pi}\sigma_L} e^{\frac{-(l-\mu_L)^2}{2\cdot\sigma_L^2}} dl\right]$$

$$= \frac{1}{0.05}\left[\int_{1.645\sigma_L+\mu_L}^{\infty} \frac{(l-\mu_L)}{\sqrt{2\pi}\sigma_L} e^{\frac{-(l-\mu_L)^2}{2\cdot\sigma_L^2}} d(l-\mu_L) + 0.05\mu_L\right]$$

$$= \frac{1}{0.05}\left\{\left[\frac{-\sigma_L}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(l-\mu_L)^2}{2\cdot\sigma_L^2}}\right]_{1.645\sigma_L+\mu_L}^{\infty}\right\} + \mu_L$$

$$= \frac{1}{0.05}\left(\frac{\sigma_L}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1.645^2}{2}}\right) + \mu_L \text{，}$$

考慮一個非線性規劃問題：

$$\begin{cases} \min. \quad f(w) = \dfrac{1}{0.05}\sqrt{\dfrac{w^2\sigma_{D_1}^2 + (1-w)^2\sigma_{D_2}^2}{2\pi}}\, e^{\frac{-1.645^2}{2}} + w\mu_{D_1} + (1-w)\mu_{D_2} \\ \text{s.t.} \quad g_1(w) = -w\mu_{D_1} - (1-w)\mu_{D_2} - H_E \geq 0 \\ \qquad g_2(w) = w \geq 0 \\ \qquad g_3(w) = 1 - w \geq 0 \end{cases} \tag{6.6.19}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \min. \quad f(w) = \dfrac{1}{0.05}\sqrt{\dfrac{1.589^2w^2 + 2.39^2(1-w)^2}{2\pi}}\, e^{\frac{-1.645^2}{2}} - 0.016w - 0.16(1-w) \text{，} \\ \text{s.t.} \quad g_1(w) = 0.016w + 0.16(1-w) - 0.088 \geq 0 \text{，} \\ \qquad g_2(w) = w \geq 0 \text{，} \\ \qquad g_3(w) = 1 - w \geq 0 \text{，} \end{cases}$$

其中當$w \in [0,1]$時，f為連續可微的凸函數（如圖六），g_1、g_2和g_3也皆為連續可微的凸函數，計算出$\nabla f(w)$、$\nabla g_1(w)$、$\nabla g_2(w)$和$\nabla g_3(w)$分別如下：

$$\begin{cases} \nabla f(w) = 0.144 + \dfrac{e^{\frac{-1.645^2}{2}}[-11.4242(1-w) + 5.049842w]}{0.1\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{5.7121(1-w)^2 + 2.524921w^2}} \text{，} \\ \nabla g_1(w) = -0.144 \text{，} \\ \nabla g_2(w) = 1 \text{，} \\ \nabla g_3(w) = -1 \text{，} \end{cases}$$

由(6.6.1)式可得：

$$0.144 + \frac{e^{\frac{-1.645^2}{2}}[-11.4242(1-w^*) + 5.049842w^*]}{0.1\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{5.7121(1-w^*)^2 + 2.524921w^{*2}}} + 0.144\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \text{，} \tag{6.6.20}$$

以及(6.6.3)式中的(b)式～(h)式，可討論八種情況。

情況一：

當$\lambda_1 = 0$、$\lambda_2 = 0$、$\lambda_3 = 0$時，由(6.6.20)式可得：

$$0.144+\frac{e^{\frac{-1.645^2}{2}}[-11.4242(1-w^*)+5.049842w^*]}{0.1\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{5.7121(1-w^*)^2+2.524921w^{*2}}}=0$$

$$\Rightarrow w^* \fallingdotseq 0.6918,$$

將結果$w^* \fallingdotseq 0.6918$代入(6.6.3)式中的(b)式不合。

其餘七種情況同(6.6.4)式～(6.6.10)式，因此其最適解也同(6.6.11)式。

接下來我們要計算(3.2.6)式，將(6.6.19)式表示如下：

$$f(w^*)=\frac{1}{0.05}\sqrt{\frac{w^{*2}\sigma_{D_1}^2+(1-w^*)^2\sigma_{D_2}^2}{2\pi}}e^{\frac{-1.645^2}{2}}+w^*\mu_{D_1}+(1-w^*)\mu_{D_2}$$

$$\Rightarrow f(w^*)=\frac{1}{0.05}\sqrt{\frac{\left(\frac{-H_E-\mu_{D_2}}{\mu_{D_1}-\mu_{D_2}}\right)^2\sigma_{D_1}^2+\left(1-\frac{-H_E-\mu_{D_2}}{\mu_{D_1}-\mu_{D_2}}\right)^2\sigma_{D_2}^2}{2\pi}}e^{\frac{-1.645^2}{2}}$$

$$+\left(\frac{-H_E-\mu_{D_2}}{\mu_{D_1}-\mu_{D_2}}\right)\mu_{D_1}+\left(1-\frac{-H_E-\mu_{D_2}}{\mu_{D_1}-\mu_{D_2}}\right)\mu_{D_2}, \qquad (6.6.21)$$

我們將(6.6.21)式表示成$\mathrm{CVaR}_{95\%}^*$對於參數μ_{D_1}的函數：

$$\mathrm{CVaR}_{95\%}^*(\mu_{D_1})^*$$

$$=\frac{1}{0.05}\sqrt{\frac{\left(\frac{-0.088+0.16}{\mu_{D_1}+0.16}\right)^2\cdot 1.589^2+\left(1-\frac{-0.088+0.16}{\mu_{D_1}+0.16}\right)^2\cdot 2.39^2}{2\pi}}e^{\frac{-1.645^2}{2}}$$

$$+\left[\left(\frac{-0.088+0.16}{\mu_{D_1}+0.16}\right)\mu_{D_1}+\left(1-\frac{-0.088+0.16}{\mu_{D_1}+0.16}\right)\mu_{D_2}\right],$$

對其於$\mu_{D_1}=-0.016$處微分可得：

$$\mathrm{CVaR}'_{95\%}(-0.016)^* \fallingdotseq 7.9518,$$

即為所求。

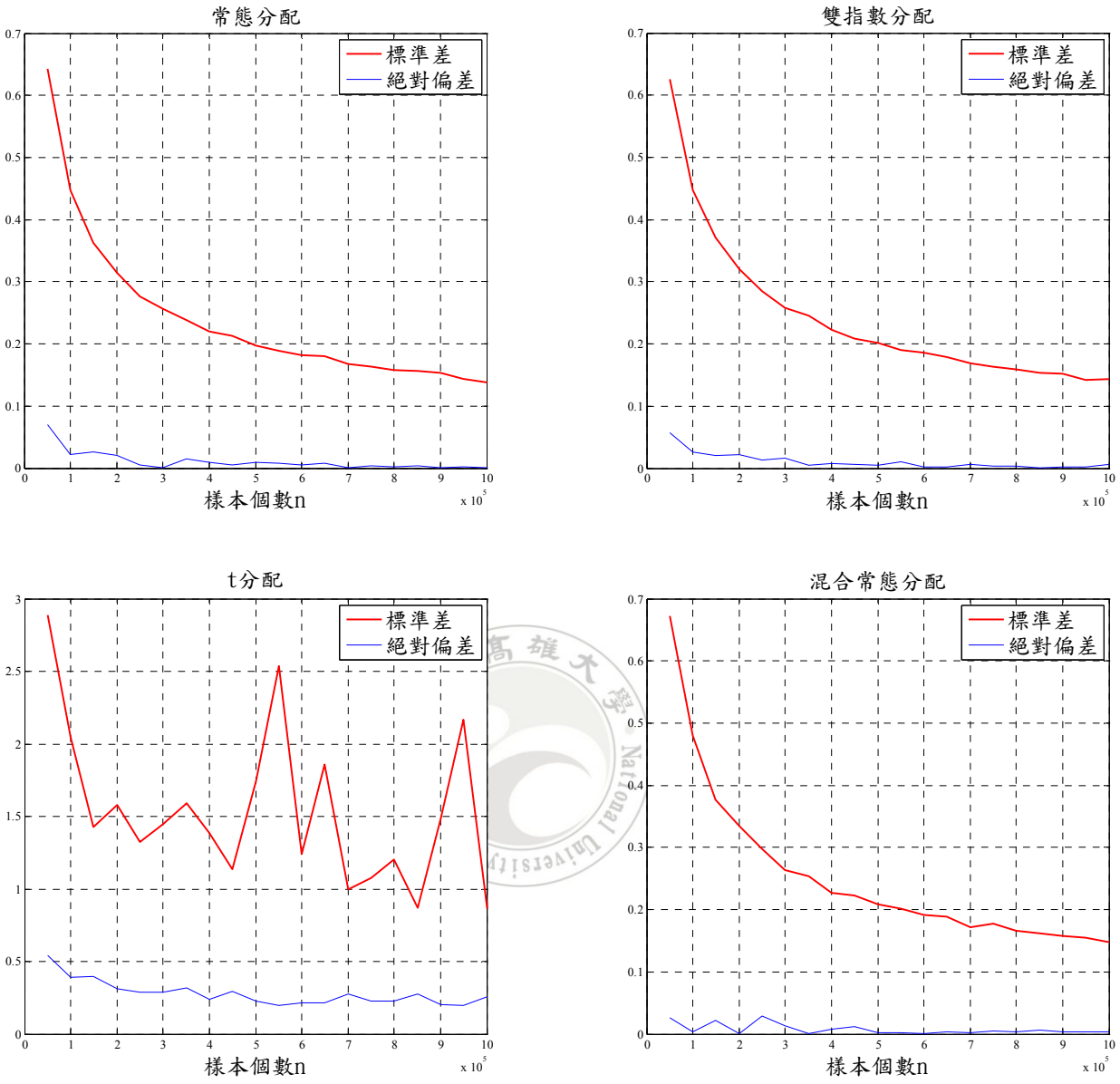
附錄七

表十七：兩項投資標的之投資組合中風險衡量指標對單一參數的敏感度

	理論值		模擬值		絕對偏差	標準差
常態分配	$\mathrm{sd}'(\mu_{D_1})$	3.8559	$\widehat{\mathrm{sd}}^{n\prime}(\mu_{D_1})$	3.8559	0.0000	0.1384
	$\mathrm{ssd}'(\mu_{D_1})$	2.7266	$\widehat{\mathrm{ssd}}^{n\prime}(\mu_{D_1})$	2.7266	0.0000	0.0982
	$\mathrm{VaR}'_{95\%}(\mu_{D_1})$	6.3430	$\widehat{\mathrm{VaR}}^{n}_{95\%}{}'(\mu_{D_1})$	6.2140	**0.1290**	**702.7176**
	$\mathrm{CVaR}'_{95\%}(\mu_{D_1})$	7.9518	$\widehat{\mathrm{CVaR}}^{n}_{95\%}{}'(\mu_{D_1})$	7.9480	0.0038	0.2954
雙指數分配	$\mathrm{sd}'(\mu_{D_1})$	3.8559	$\widehat{\mathrm{sd}}^{n\prime}(\mu_{D_1})$	3.8491	0.0068	0.1429
	$\mathrm{ssd}'(\mu_{D_1})$	2.7266	$\widehat{\mathrm{ssd}}^{n\prime}(\mu_{D_1})$	2.7294	0.0028	0.1025
	$\mathrm{VaR}'_{95\%}(\mu_{D_1})$		$\widehat{\mathrm{VaR}}^{n}_{95\%}{}'(\mu_{D_1})$	1.6849		**674.5474**
	$\mathrm{CVaR}'_{95\%}(\mu_{D_1})$		$\widehat{\mathrm{CVaR}}^{n}_{95\%}{}'(\mu_{D_1})$	9.8847		0.4165
t分配	$\mathrm{sd}'(\mu_{D_1})$	3.8559	$\widehat{\mathrm{sd}}^{n\prime}(\mu_{D_1})$	3.5998	**0.2561**	**0.8659**
	$\mathrm{ssd}'(\mu_{D_1})$	2.7266	$\widehat{\mathrm{ssd}}^{n\prime}(\mu_{D_1})$	2.5360	**0.1906**	**0.7639**
	$\mathrm{VaR}'_{95\%}(\mu_{D_1})$		$\widehat{\mathrm{VaR}}^{n}_{95\%}{}'(\mu_{D_1})$	8.0159		**585.8373**
	$\mathrm{CVaR}'_{95\%}(\mu_{D_1})$		$\widehat{\mathrm{CVaR}}^{n}_{95\%}{}'(\mu_{D_1})$	5.3135		0.3768
混合常態分配	$\mathrm{sd}'(\mu_{D_1})$	3.8559	$\widehat{\mathrm{sd}}^{n\prime}(\mu_{D_1})$	3.8590	0.0031	0.1473
	$\mathrm{ssd}'(\mu_{D_1})$	2.7266	$\widehat{\mathrm{ssd}}^{n\prime}(\mu_{D_1})$	2.7300	0.0034	0.1241
	$\mathrm{VaR}'_{95\%}(\mu_{D_1})$		$\widehat{\mathrm{VaR}}^{n}_{95\%}{}'(\mu_{D_1})$	6.4914		**150.8799**
	$\mathrm{CVaR}'_{95\%}(\mu_{D_1})$		$\widehat{\mathrm{CVaR}}^{n}_{95\%}{}'(\mu_{D_1})$	5.9649		0.2135

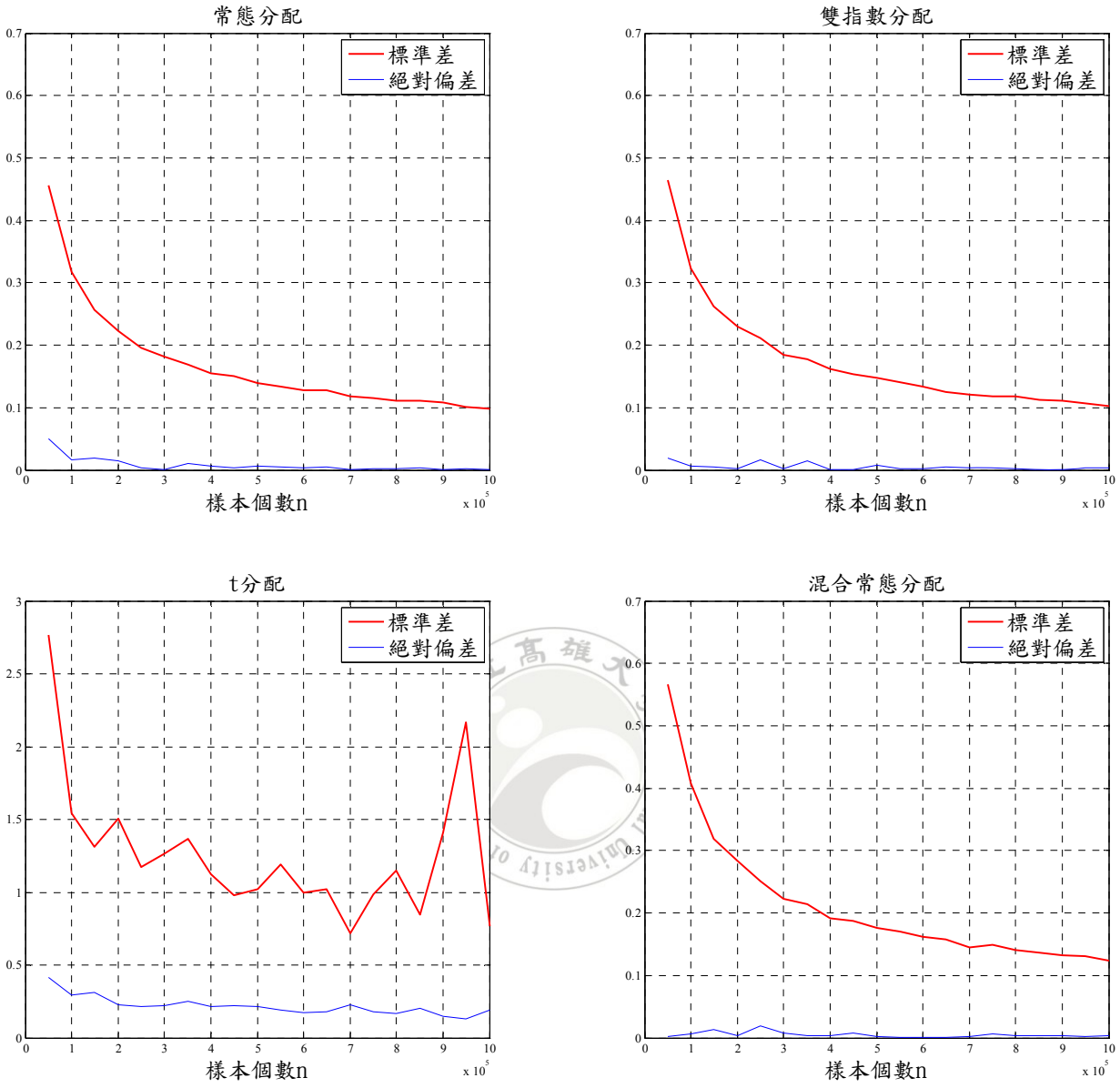
註：表中樣本個數$n = 1{,}000{,}000$

圖七：兩項投資標的之投資組合中標準差對單一參數敏感度之點估計結果

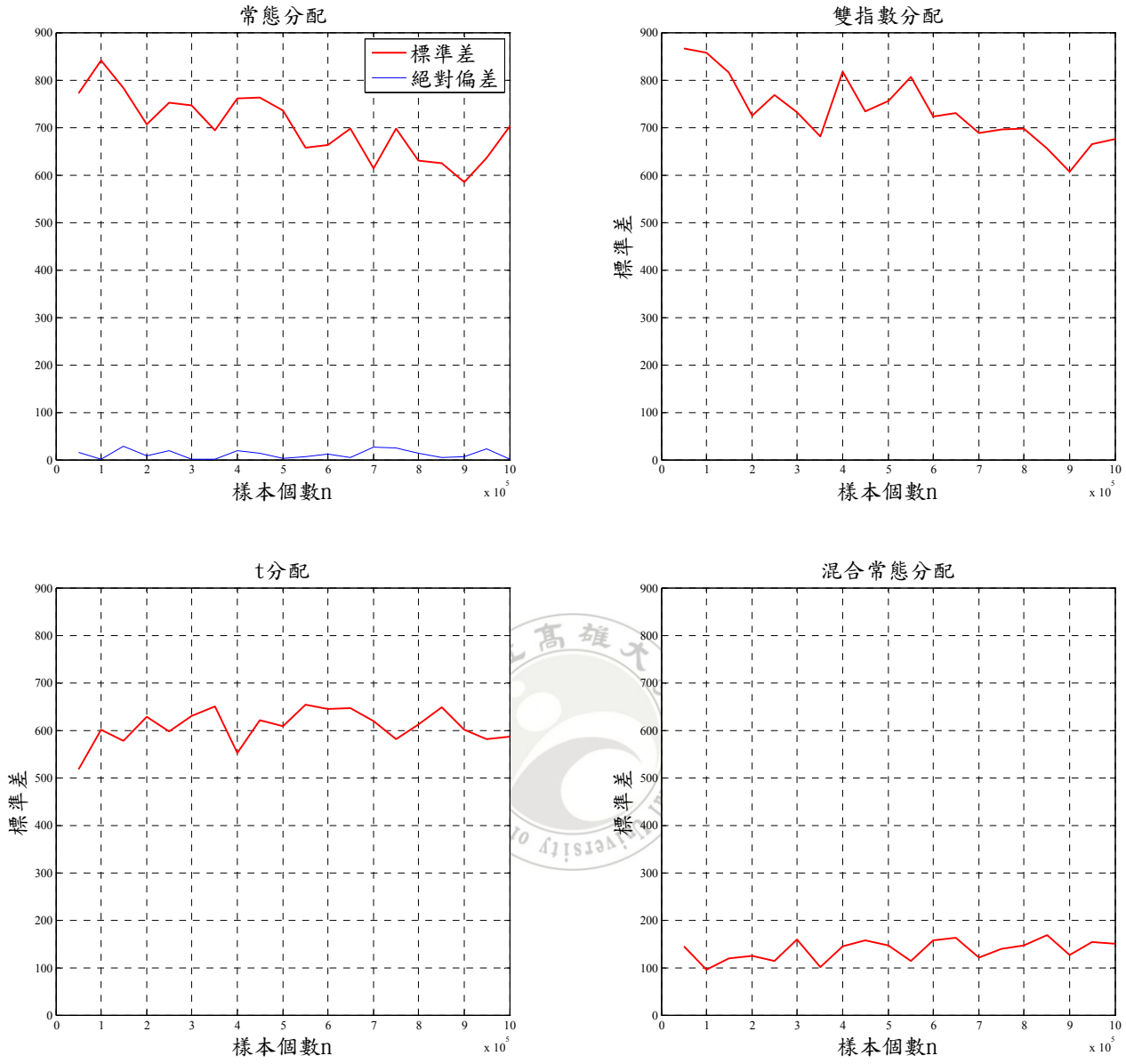


高雄大學 National University

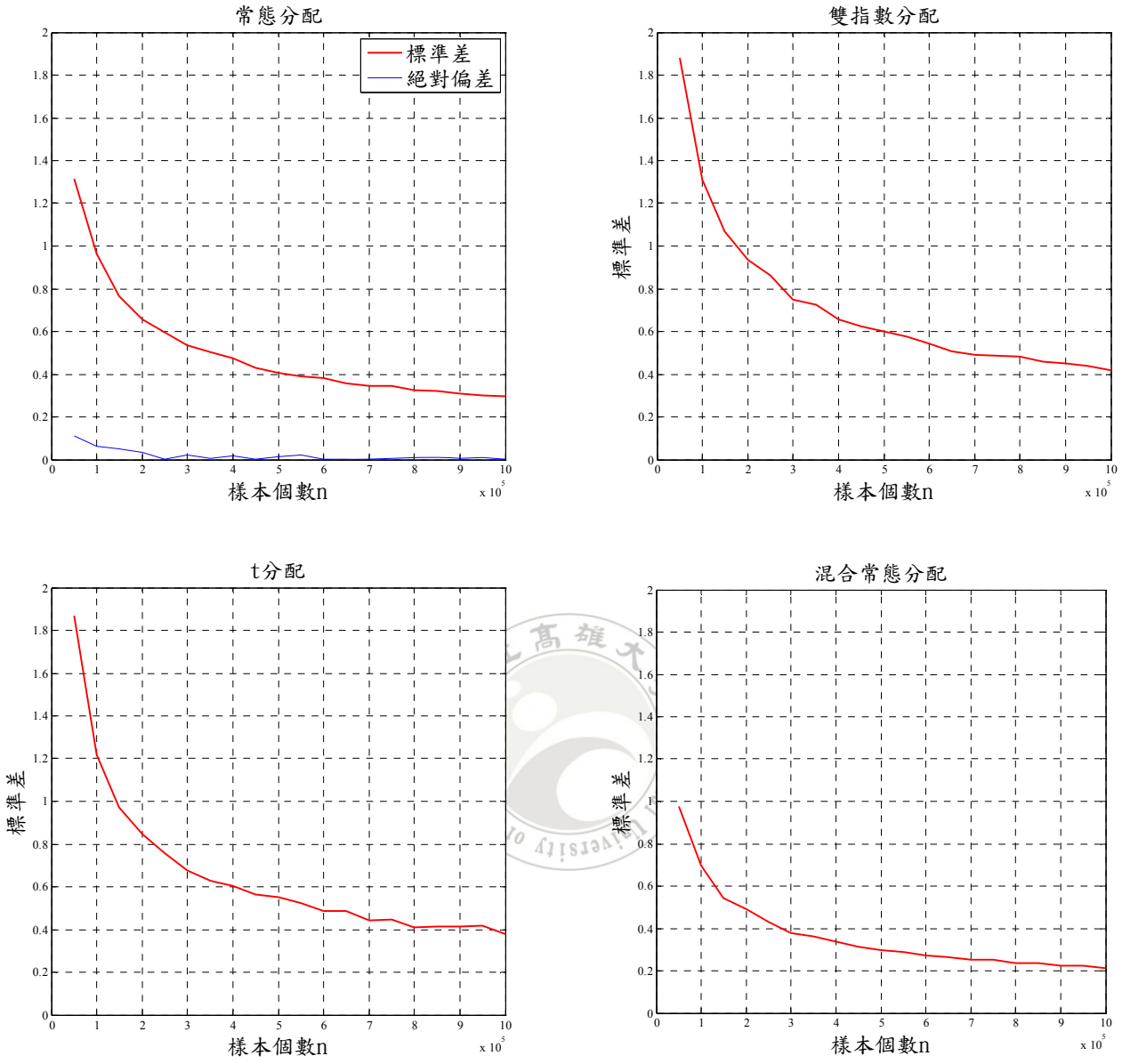
圖八：兩項投資標的之投資組合中半標準差對單一參數敏感度之點估計結果



圖九：兩項投資標的之投資組合中風險值對單一參數敏感度之點估計結果



圖十：兩項投資標的之投資組合中條件風險值對單一參數敏感度之點估計結果



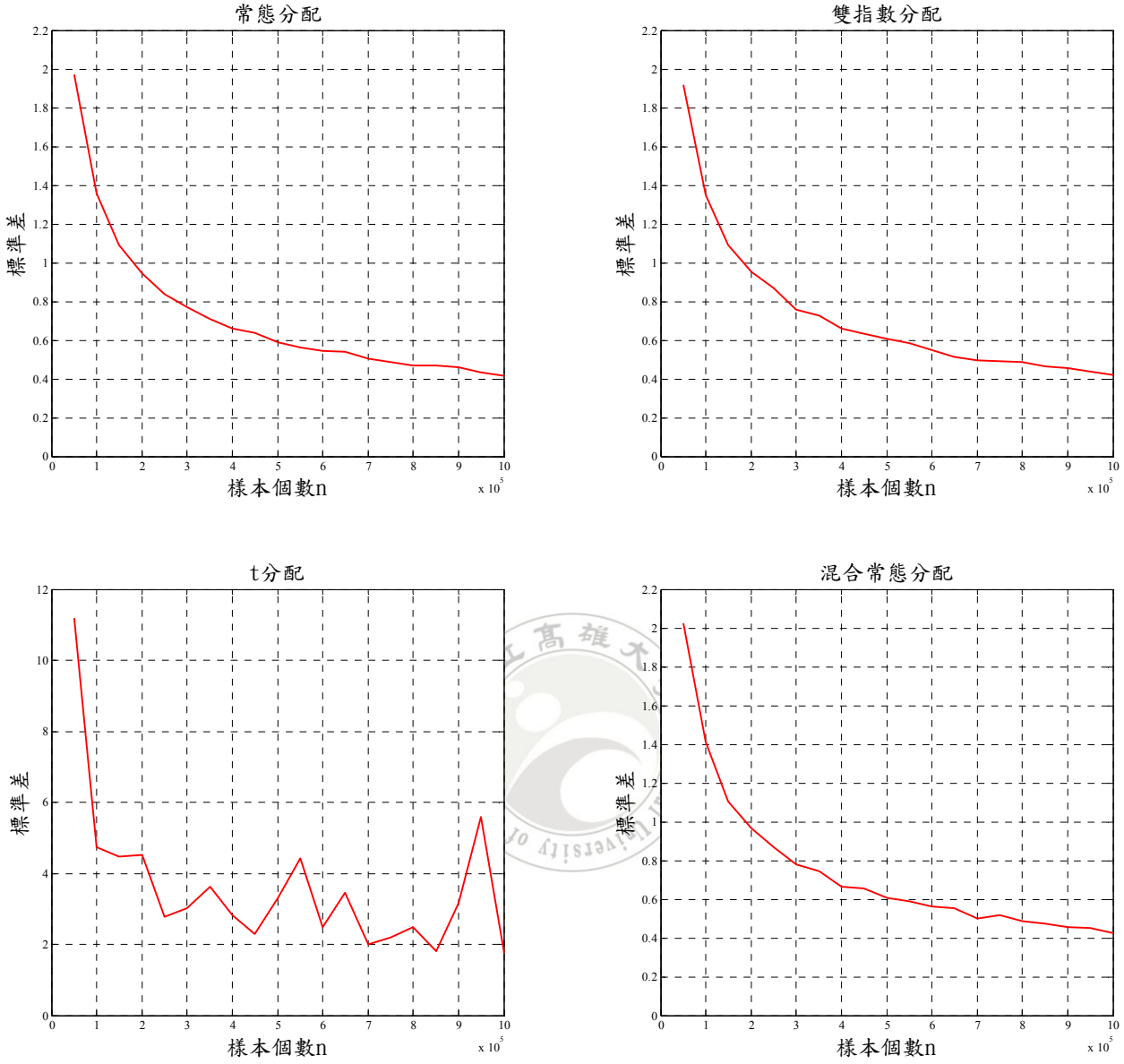
附錄八

表十八：兩項投資標的之投資組合中風險衡量指標對多重參數的敏感度

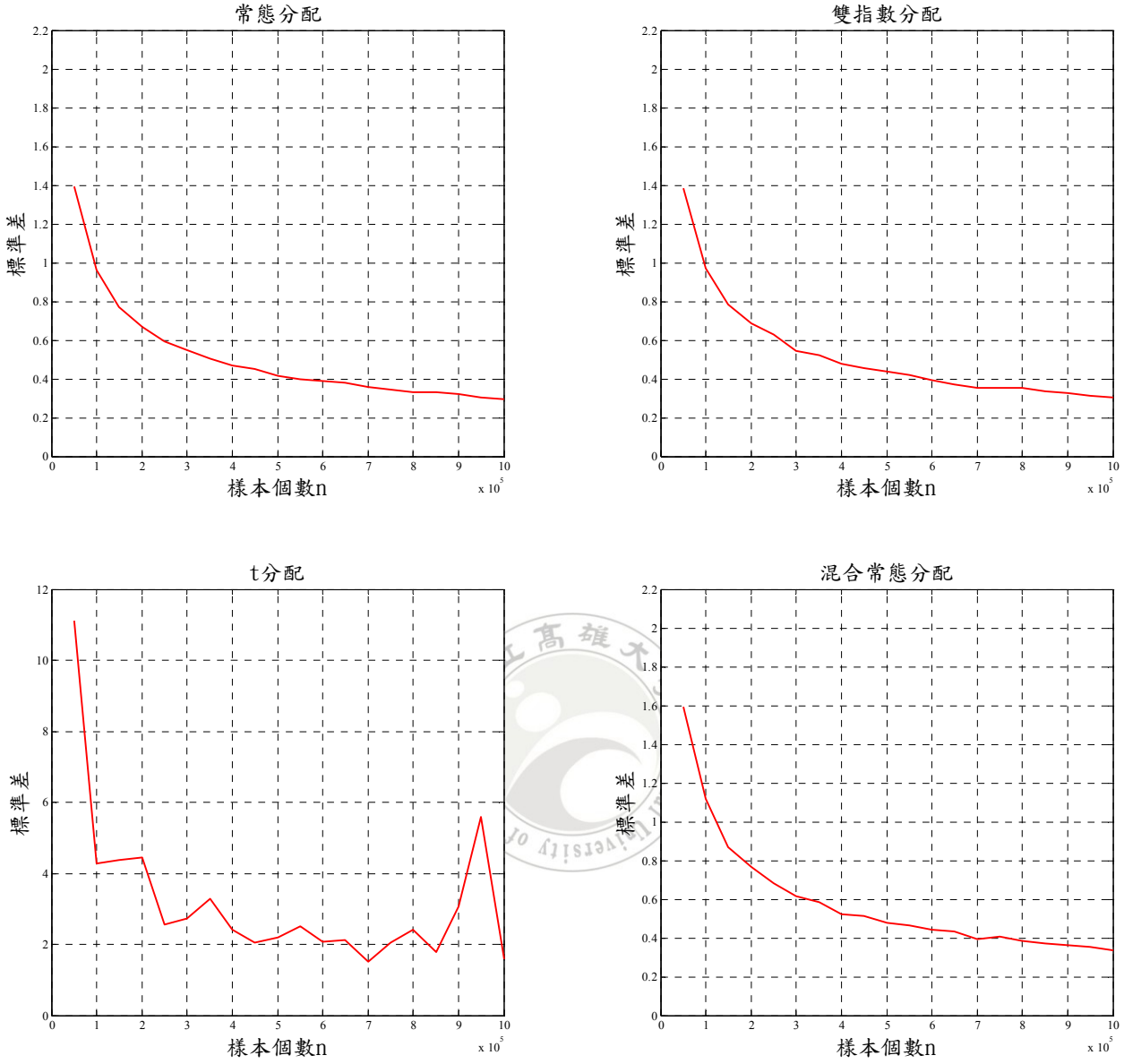
	模擬值		標準差
常態分配	$\widehat{\mathrm{sd}}^{n\prime}(\mu_{D_1},\mu_{D_2})^*$	7.7362	0.4162
	$\widehat{\mathrm{ssd}}^{n\prime}(\mu_{D_1},\mu_{D_2})^*$	5.4706	0.2949
	$\widehat{\mathrm{VaR}}^{n}_{95\%}{}'(\mu_{D_1},\mu_{D_2})^*$	9.4722	**651.4199**
	$\widehat{\mathrm{CVaR}}^{n}_{95\%}{}'(\mu_{D_1},\mu_{D_2})^*$	15.9597	0.8638
雙指數分配	$\widehat{\mathrm{sd}}^{n\prime}(\mu_{D_1},\mu_{D_2})^*$	7.7460	0.4216
	$\widehat{\mathrm{ssd}}^{n\prime}(\mu_{D_1},\mu_{D_2})^*$	5.4777	0.3031
	$\widehat{\mathrm{VaR}}^{n}_{95\%}{}'(\mu_{D_1},\mu_{D_2})^*$	4.4556	**665.2219**
	$\widehat{\mathrm{CVaR}}^{n}_{95\%}{}'(\mu_{D_1},\mu_{D_2})^*$	19.8409	1.1919
t 分配	$\widehat{\mathrm{sd}}^{n\prime}(\mu_{D_1},\mu_{D_2})^*$	7.2246	**1.7617**
	$\widehat{\mathrm{ssd}}^{n\prime}(\mu_{D_1},\mu_{D_2})^*$	5.0947	**1.5795**
	$\widehat{\mathrm{VaR}}^{n}_{95\%}{}'(\mu_{D_1},\mu_{D_2})^*$	7.3977	**614.9698**
	$\widehat{\mathrm{CVaR}}^{n}_{95\%}{}'(\mu_{D_1},\mu_{D_2})^*$	10.6752	0.9512
混合常態分配	$\widehat{\mathrm{sd}}^{n\prime}(\mu_{D_1},\mu_{D_2})^*$	7.7424	0.4267
	$\widehat{\mathrm{ssd}}^{n\prime}(\mu_{D_1},\mu_{D_2})^*$	5.4570	0.3237
	$\widehat{\mathrm{VaR}}^{n}_{95\%}{}'(\mu_{D_1},\mu_{D_2})^*$	8.8272	**139.8773**
	$\widehat{\mathrm{CVaR}}^{n}_{95\%}{}'(\mu_{D_1},\mu_{D_2})^*$	11.9553	0.5138

註：表中樣本個數$n = 1{,}000{,}000$

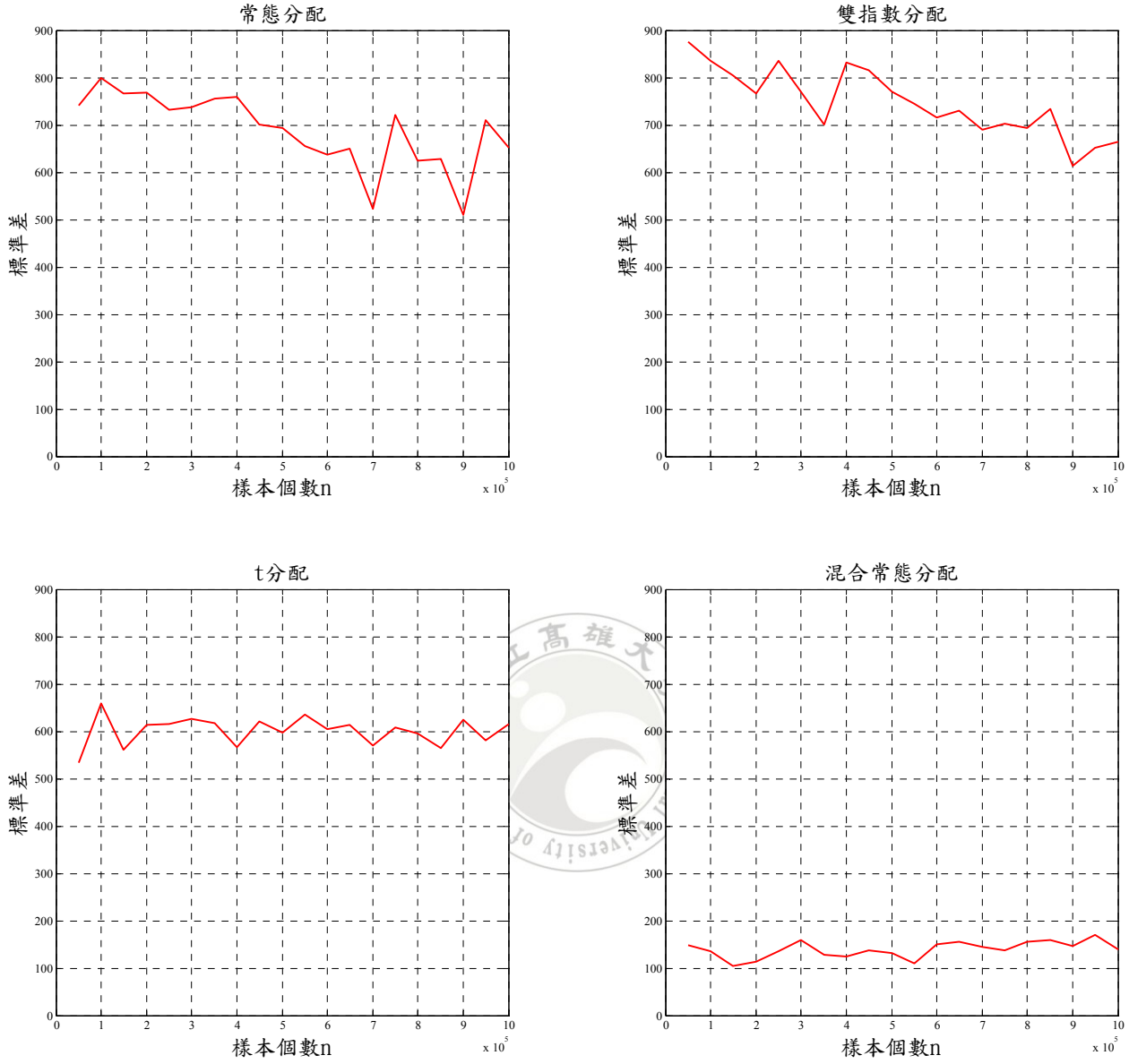
圖十一：兩項投資標的之投資組合中標準差對多重參數敏感度之點估計結果



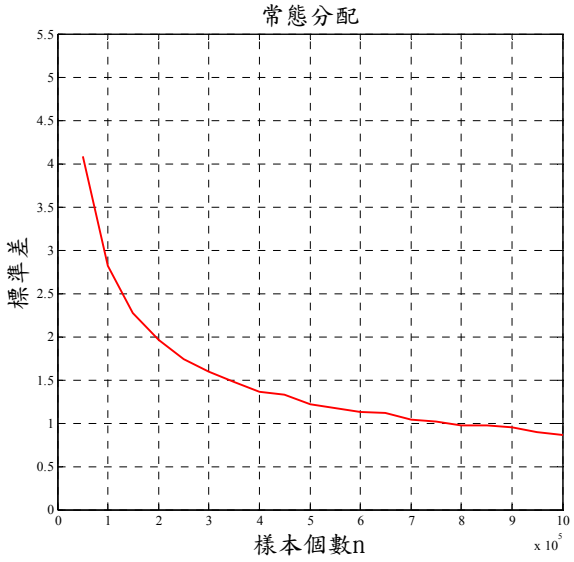
圖十二：兩項投資標的之投資組合中半標準差對多重參數敏感度之點估計結果

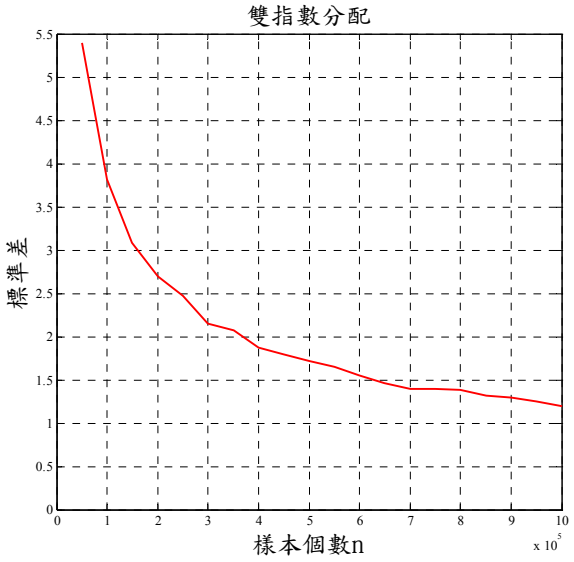


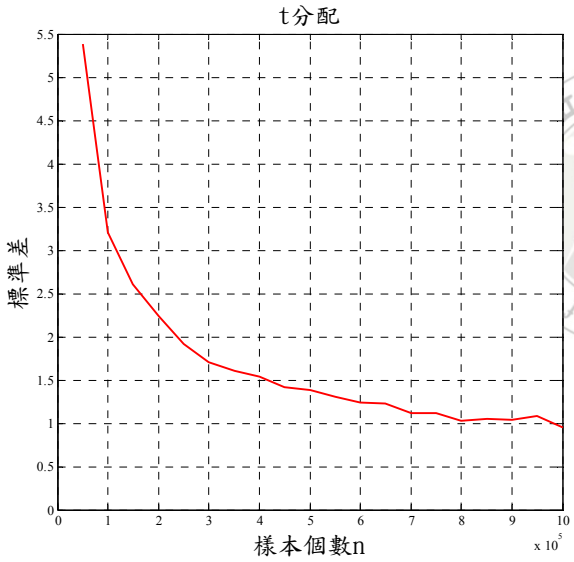
圖十三：兩項投資標的之投資組合中風險值對多重參數敏感度之點估計結果

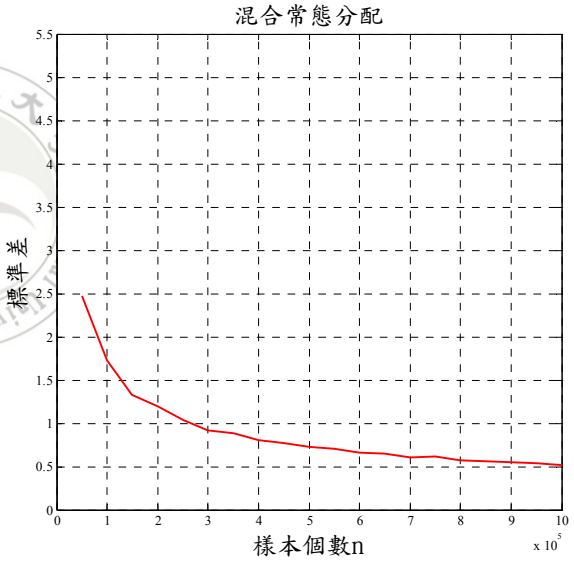


圖十四：兩項投資標的之投資組合中條件風險值對多重參數敏感度之點估計結果









附錄九

表十九：三項投資標的之投資組合中風險衡量指標對單一參數敏的感度

	模擬值		標準差
常態分配	$\widehat{\mathrm{sd}}^{n'}(\mu_{D_1})^*$	2.1225	0.1308
	$\widehat{\mathrm{ssd}}^{n'}(\mu_{D_1})^*$	1.4950	0.0926
	$\widehat{\mathrm{VaR}}_{95\%}^{n\ \prime}(\mu_{D_1})^*$	44.6996	**1718.6574**
	$\widehat{\mathrm{CVaR}}_{95\%}^{n\ \prime}(\mu_{D_1})^*$	4.3786	0.2714
雙指數分配	$\widehat{\mathrm{sd}}^{n'}(\mu_{D_1})^*$	2.1181	0.1322
	$\widehat{\mathrm{ssd}}^{n'}(\mu_{D_1})^*$	1.4963	0.0930
	$\widehat{\mathrm{VaR}}_{95\%}^{n\ \prime}(\mu_{D_1})^*$	7.3819	**1631.6064**
	$\widehat{\mathrm{CVaR}}_{95\%}^{n\ \prime}(\mu_{D_1})^*$	5.1695	0.3780
t 分配	$\widehat{\mathrm{sd}}^{n'}(\mu_{D_1})^*$	1.9679	**0.9261**
	$\widehat{\mathrm{ssd}}^{n'}(\mu_{D_1})^*$	1.3250	**0.5482**
	$\widehat{\mathrm{VaR}}_{95\%}^{n\ \prime}(\mu_{D_1})^*$	-7.0899	**1013.8725**
	$\widehat{\mathrm{CVaR}}_{95\%}^{n\ \prime}(\mu_{D_1})^*$	2.6158	0.2786
混合常態分配	$\widehat{\mathrm{sd}}^{n'}(\mu_{D_1})^*$	2.1224	0.1330
	$\widehat{\mathrm{ssd}}^{n'}(\mu_{D_1})^*$	1.4996	0.1076
	$\widehat{\mathrm{VaR}}_{95\%}^{n\ \prime}(\mu_{D_1})^*$	8.1063	**269.4950**
	$\widehat{\mathrm{CVaR}}_{95\%}^{n\ \prime}(\mu_{D_1})^*$	1.7139	0.1775

註：表中樣本個數$n = 1{,}000{,}000$

附錄十

表二十：三項投資標的之投資組合中風險衡量指標對多重參數的敏感度

	模擬值		標準差
常態分配	$\widehat{\mathrm{sd}}^{n\prime}(\mu_{D_1},\mu_{D_2},\mu_{D_3})^*$	5.0614	0.3731
	$\widehat{\mathrm{ssd}}^{n\prime}(\mu_{D_1},\mu_{D_2},\mu_{D_3})^*$	3.5778	0.2601
	$\widehat{\mathrm{VaR}}_{95\%}^{n\prime}(\mu_{D_1},\mu_{D_2},\mu_{D_3})^*$	42.2378	**1719.1145**
	$\widehat{\mathrm{CVaR}}_{95\%}^{n\prime}(\mu_{D_1},\mu_{D_2},\mu_{D_3})^*$	10.4401	0.7723
雙指數分配	$\widehat{\mathrm{sd}}^{n\prime}(\mu_{D_1},\mu_{D_2},\mu_{D_3})^*$	5.0492	0.3742
	$\widehat{\mathrm{ssd}}^{n\prime}(\mu_{D_1},\mu_{D_2},\mu_{D_3})^*$	3.5666	0.2624
	$\widehat{\mathrm{VaR}}_{95\%}^{n\prime}(\mu_{D_1},\mu_{D_2},\mu_{D_3})^*$	30.6312	**1661.9231**
	$\widehat{\mathrm{CVaR}}_{95\%}^{n\prime}(\mu_{D_1},\mu_{D_2},\mu_{D_3})^*$	12.6279	1.0629
t分配	$\widehat{\mathrm{sd}}^{n\prime}(\mu_{D_1},\mu_{D_2},\mu_{D_3})^*$	4.6971	**4.2783**
	$\widehat{\mathrm{ssd}}^{n\prime}(\mu_{D_1},\mu_{D_2},\mu_{D_3})^*$	3.2796	**4.0690**
	$\widehat{\mathrm{VaR}}_{95\%}^{n\prime}(\mu_{D_1},\mu_{D_2},\mu_{D_3})^*$	-15.7800	**1030.0061**
	$\widehat{\mathrm{CVaR}}_{95\%}^{n\prime}(\mu_{D_1},\mu_{D_2},\mu_{D_3})^*$	6.4888	0.7861
混合常態分配	$\widehat{\mathrm{sd}}^{n\prime}(\mu_{D_1},\mu_{D_2},\mu_{D_3})^*$	5.0511	0.3794
	$\widehat{\mathrm{ssd}}^{n\prime}(\mu_{D_1},\mu_{D_2},\mu_{D_3})^*$	3.5730	0.2896
	$\widehat{\mathrm{VaR}}_{95\%}^{n\prime}(\mu_{D_1},\mu_{D_2},\mu_{D_3})^*$	13.3615	**245.2187**
	$\widehat{\mathrm{CVaR}}_{95\%}^{n\prime}(\mu_{D_1},\mu_{D_2},\mu_{D_3})^*$	5.1657	0.5946

註：表中樣本個數$n = 1{,}000{,}000$