國立高雄大學統計學研究所

碩士論文

On Three Types of Estimators for Dynamic Portfolio Weights and Rebalancing Time Choice

動態投資組合之再平衡及三種權重估計法比較

研究生：林知樵 撰

指導教授：俞淑惠 博士

中華民國 101 年 7 月

On Three Types of Estimators for Dynamic Portfolio Weights and Rebalancing Time Choice

by

Chih-Chiao Lin

Advisor

Shu-Hui Yu

Institute of Statistics,

National University of Kaohsiung

Kaohsiung, Taiwan 811 R.O.C.

July 2012

目錄

中文摘要 III

英文摘要 IV

第一章 緒論 1

第二章 文獻回顧 4

第一節 投資組合理論 4

第二節 管制圖 5

第三章 研究方法 8

第一節 權重估計式..... 8

第二節 CUSUM 模型 12

第四章 模擬研究與實證分析 16

第一節 模擬研究 16

第二節 實證分析 25

第五章 結論 34

第一節 結論 34

第二節 未來研究方向 34

參考文獻 35

附錄一 單週期權重估計式推導..... 37

附錄二 模擬研究圖.....40

附錄三 實證分析表格.....41

附錄四 實證分析圖.....44

動態投資組合之再平衡及三種權重估計法比較

指導教授：俞淑惠 博士
國立高雄大學統計學研究所

學生：林知樵
國立高雄大學統計學研究所

摘要

自二十世紀末起重大金融事件發生的頻率越趨頻繁，例如 1997 年的亞洲金融風暴、2007 年末的金融海嘯、以及近年來美債評等降級、歐債危機等等。為了反映實際經濟景氣，本研究希望在投資組合上建立一個預警機制，一方面評估權重的合理性，另一方面找出動態的再平衡時間點。

投資組合中，權重估計是一個重要議題。傳統文獻上，投資組合理論大多在固定時間週期下進行權重估計，估計值不會隨著時間改變，本文中稱為靜態的投資組合，這也意味著該投資組合無法即時反應現實，為此本研究假設投資組合權重為市場狀態變數的函數，利用近似值的計算，也就是考慮投資組合報酬式一次項的部分，並透過矩陣的方法將時間項與非時間項分離，估計出線性關係中的係數；其次建立一預警機制，本研究將透過此機制，動態的選擇再平衡時間週期。

本研究亦將透過模擬與實證分析，比較文獻上三種不同的權重估計法對投資報酬的影響，並探討投資人持有短期、中長期投資組合報酬的差別。

關鍵詞：動態投資組合、再平衡、非條件投資組合、條件投資組合、時間投資組合、預警模型

On Three Types of Estimators for Dynamic Portfolio Weights and Rebalancing Time Choice

Advisor: Dr. Shu-Hui Yu
Institute of Statistics,
National University of Kaohsiung

Student: Chih-Chiao Lin
Institute of Statistics,
National University of Kaohsiung

ABSTRACT

In order to reflect the actual economic boom, this study hopes to establish a prediction model in the portfolio. Using this model, one can monitor the portfolio return and another can find the rebalancing time dynamically.

The estimators of portfolio weight are an important topic. The portfolio theorem is considering a fixed investment time interval. In this interval, the portfolio weights are a constant that we call it static portfolio. This also means that the portfolio is not readily reflecting reality. The purpose of this study considers a dynamic portfolio in literature. It assumes the portfolio weights is function of state variable. Consider an approximate calculation, the first order of portfolio return equation is considered. Separate the time term and constant term by matrix technique. Moreover, this study establish a prediction model for dynamic rebalancing time choice.

Finally, we use the simulation and empirical analysis to compare these three types estimators in literature and comment different horizon in investment.

Key words: Dynamic Portfolio, Rebalance, Unconditional Portfolio, Conditional Portfolio, Timing Portfolio, Distress Model

第一章 緒論

自二十世紀末起重大金融事件發生的頻率越趨頻繁，例如 1997 年的亞洲金融風暴、2007 年末的金融海嘯、以及近年來美債評等降級、歐債危機等等，由於經濟體的變化快速使得再平衡(rebalance)策略的加入就顯得重要。但是在過去的文獻中，再平衡時間點的選擇通常是固定的，為了反映實際經濟景氣，本研究希望在投資組合上建立一個預警機制，一方面評估權重的合理性，另一方面透過預警機制動態的找出再平衡時間點。

投資組合意指由一種以上的證券或資產所構成的集合，長久以來，最佳的資產配置一直是財務經濟研究上的一個重要議題。Swensen (2009)曾在書中提過，投資組合的報酬主要來自三個部分：資產配置、市場擇時以及選股能力，其中資產配置為建構投資組合的第一步，也是最重要的一步。Markowitz (1952)提出的投資組合理論，為首次在投資組合中加入風險概念，將投資組合的風險以標準差或變異數量化。在此之前，一般的投資組合策略在最大化報酬時，並不考慮投資風險。平均數-變異數模型(mean-variance model)是 Markowitz 將風險的概念加入投資組合中所建立的，其主要在解決單一周期投資的資產配置問題，之後開啟了一序列的投資組合研究均架構在此模型之下。Brnadt(2006)透過平均數-變異數模型提出了一動態的權重估計式，並利用近似的估計法改進傳統 Markowitz 只能解決單一周期的問題。

傳統的 Markowitz 估計式就算估計的再好，若沒有不斷地加入新資訊進行調整，總是會有偏離實際經濟狀況的一天。再平衡策略就是為了改善這種靜態的資產配置方式而出現的一種方法。Perold and Sharpe (1988)提出了四種不同的資產配置方法與調整方式，但在文獻中對於再平衡時間點的決定，Perold and Sharpe 則建議投資人自行選定一固定時間進行調整資產比例。

使用固定時間進行再平衡的方法，如果在兩個再平衡時間之間遭遇到經濟體

劇烈的變化，很有可能會為投資組合帶來龐大的損失。因此，有些投資人會增加再平衡的頻率，以減少經濟體劇烈變化發生在兩個再平衡時間點之間的可能。可是增加再平衡的頻率，同時也會增加投資時所需要的成本。因此，本研究希望可以動態的選擇再平衡時間點，在適當的時候執行再平衡，除了可以減少頻繁的再平衡所需要的成本支出外，同時能預防經濟體劇烈變動時所帶來的損失。

在統計製程品管上，管制圖是用來監控產品是否偏離目標值的一種工具。本研究想透過統計製程品管的想法，將投資組合想像為一產品，透過監控投資組合平均數的變化，動態的決定何時該進行再平衡。在眾多管制圖中，本研究選擇 CUSUM 管制圖做為監控的方法，理由是因為財務資料一般都屬於時間數列資料，而 CUSUM 管制圖除了可以用來監控時間數列資料外，模型本身的設計就是不斷的累積過去資訊於管制圖中，對於想要提前偵測出經濟體的變動的時間進行再平衡是不錯的選擇。

本研究透過實際分析投資於 2007~2011 年間，這段期間包含了金融海嘯，在金融海嘯期間由於經濟環境的不穩定，導致市場劇烈的變動，許多投資者都在這段期間遭受損失。單周期的非條件投資組合搭配每月再平衡策略，為固定時間再平衡下能獲利最高的方法，若改為使用本研究的方法動態選擇再平衡時間點，反而比原本每月再平衡策略的平均報酬率提高了 0.1796%，卻只需要再平衡四次。這樣的結果顯示，透過動態的選擇再平衡時間，不但能提高獲利，還能節省成本。另外，條件投資組合的配置方法，由結果顯示在這段期間的平均報酬率都比非條件投資組合來的高，而且每月再平衡單期非條件投資組合其實就是每個時間點都在改變權重，條件投資組合則是假設權重隨著狀態變數改變而改變，這也是每個時機點都在改變權重，但是透過非條件投資組合配置的平均報酬率卻遠低於條件投資組合的配置結果，因此若要時時刻刻都改變權重的做法，則條件投資組合是不錯的選擇。

由模擬結果顯示，非條件投資組合無論選用單期或多期甚至加上再平衡策略，

在投資期間一年、兩年、五年和十年的平均報酬，都比使用條件投資組合配置的平均報酬率低，在條件投資組合的配置中，又以單週期不考慮再平衡的投資策略的平均報酬率最高。此外，透過模擬可以發現當投資時間拉長至五年或十年時，不考慮再平衡的非條件投資組合的報酬路徑，最後會慢慢地往考慮再平衡策略的報酬路徑下方移動，這顯示出透過再平衡更新資訊於投資權重之中，可以有效地維持住一定的報酬。由模擬結果，本研究建議使用非條件投資組合配置時應當要考慮再平衡策略，而且建議以每季再平衡比較恰當。

本論文的架構敘述如下：第一章簡述本論文的研究動機、目的及流程；第二章為文獻回顧，第一節介紹投資組合理論，第二節介紹管制圖；第三章為本文所使用之方法，分別介紹了三種不同權重估計式，以及用來動態選擇再平衡時間點的 CUSUM 模型；第四章為實證與模擬分析；第五章為本研究做一個結論，並闡述未來研究的內容。

國立高雄大學 National University of Kaohsiung

第二章 文獻回顧

第一節 投資組合理論

Markowitz 在 1952 年發表了投資組合理論並提出平均數-變異數模型，其透過平均數-變異數模型的最佳化來決定投資比重。在 Markowitz 的基本假設下，透過估計 N 筆資產的期望報酬率與資產的共變異數矩陣，則平均數-變異數模型如下：

$$\max \mu_p$$

$$\text{subject to} \quad \sigma_p^2 = w_p^T \times \Sigma \times w_p \le \mathrm{L} \tag{2.1}$$

其中 $\mu_p = w_p^T \times \mu$，$\sigma_p = w_p^T \times \Sigma \times w_p$

μ_p：投資組合 p 的報酬率

σ_p^2：投資組合 p 的變異數

w_p：N 筆資產的權重向量

μ：N 筆資產預期報酬率之向量

Σ：N 筆資產的共變異數矩陣

L 為投資人所能容忍的風險上限。

投資組合理論主要在述說，在一定的風險水準之下，可以找到最大報酬的投資組合，或者在一定期望報酬之下，可以找到最低風險的投資組合。將這些投資組合繪在圖上並連成線，便是效率前緣(efficient frontier)，而落在效率前緣上的投資組合稱之為效率投資組合(efficient portfolio)。該理論建立了一套效率投資組合的選取系統，提供投資人建議以求在資產管理上達到預期目標。

然而平均數-變異數模型也存在著一些限制，Chopra and Ziemba(1993)指出，對於平均數、變異數以及共變異數估計錯誤，將對最適投資組合的資產配置帶來極大的引響。此外，由模型的假設可知以平均數-變異數模型方法做資產配置具

有兩大限制：一為此方法僅考慮單一期的投資分析，另一為此方法只處理具有對稱性風險的資產。對於進行長期投資的投資人而言，單一期間的投資分析，已經無法滿足投資人的需求。而且近年來投資工具日新月異，如期貨與選擇權這類非對稱性風險的資產，也無法直接套用此模型。

雖然如此，Markowitz 的平均數-變異數模型至今仍被廣泛的使用。這是因為此模型能同時兼顧投資目標與風險限制，還可以依照投資人本身的風險趨避程度，選擇最適投資組合比例。除此之外，投資人還可以加入對市場狀況判斷、投資資產的新資訊或應用不同操作策略，透過平均數-變異數模型求出另一個效率前緣曲線。也因此，許多研究都架構在平均數-變異數模型之下，像是知名的資本資產定價模型(Capital Asset Pricing Model, CAPM)，就是 Sharpe(1964)及 Lintner(1965)應用投資組合理論所提出的。

第二節 管制圖

管制圖為統計製程管制的其中一項工具，主要目的是用來偵測一個製程所生產出來的產品是否偏離目標值，而且在統計製程管制眾多工具中，管制圖是最具理論技術，最早是由 Shewhart 在 1920 年代於貝爾實驗室發展出來的。在製造過程中，無論設計或者儀器有多良好，總是會有一些自然的變異存在，這些自然變異或背景干擾是由許多微小的、無法避免的因素累積而成的。這種無法解釋的變異在統計上稱為誤差(error)。一個只存在自然的變異的製程稱為在統計管制下。另一方面，製程也可能因為某些特殊因素(例如：機械失當、操作失誤或不良原料等)引起較大的變異，造成品質水準降低，這些可以被解釋的因素在統計上稱之為因子(factor)。一個製程在操作中若產生非自然因素的變異則稱為失控。統計製程管制(Statistical Process Control，簡稱 SPC)的主要目的是能迅速地偵測出製程中可歸屬原因的變異發生或製程參數的改變，以便在更多不良品被製造出來之前，就能針對製程進行診斷並採取修正的措施，而管制圖就是為了這個目的所設

計。

管制圖主要可分為三大類：

第一類為 Shewhart 管制圖：這一類管制圖是依據 Shewhart 所制定的管制圖準則發展而來的，屬於這一類常見的管制圖有$\overline{X}$和 R 管制圖以及$\overline{X}$和 S 管制圖。

第二類為記憶性管制圖：當製程為一時間數列時，管制製程的資料不應該只使用目前的資料，而是應該將目前和過去的資料均一起來判讀，以便增加管制圖的偵測能力，而經常被廣泛運用的兩種記憶性管制圖則為累積和(CUSUM)管制圖以及移動平均(EWMA)管制圖。

第三類為自適性(adaptive)管制圖：傳統的管制圖都採用固定管制參數，也就是說在固定的抽樣間隔下，抽取固定的樣本數來進行檢測後，再繪在固定管制界限的管制圖上進行偵測製程。而自適性管制圖，其管制參數是由前一次製程狀態來決定，這種動態管制圖已被證實可以增加管制圖偵測的靈敏度。

由於本文使用的研究方法為 CUSUM 模型，在此特別介紹 CUSUM 管制圖。CUSUM 管制圖最早是由 Page(1954)所提出，本意在於改善 Shewhart 管制圖只考慮製程中最後繪製在圖上所提供的訊息，而忽略了全部樣本點所提供的資訊；這項缺點使得 Shewhart 管制圖對於製程上較小的偏移相當地不敏感。CUSUM 管制圖不僅觀測當期的數值，並累積前期的判別值作為當期的判別值，也就是整合了整個製程中所提供的訊息，這樣的方法形成了一個動態化的檢定模式，也符合財務資料具有時間的特性。CUSUM 值的基本計算方式為：

$$C_i = \sum_{m=1}^{i} (\bar{x}_m - \mu_0)\text{，}$$

其中$\bar{x}_m$為第 m 個樣本平均數，μ_0為製成平均的目標值。i 為樣本個數，C_i被稱為直到第 i 個樣本的累積和。由於它考慮了一系列樣本所提供的訊息，所以在偵測品質變動時相當敏感，當樣本的C_i值超出品質管制界線時，應加以注意並採取適當措施加以導正。而且因為具有累積的特性，使得 CUSUM 管制圖在偵測微小的

變異時具有相當良好的效果。要注意的是在製程上通常假設資料為獨立，若資料間具有自我相關性，使用 CUSUM 模型會有誤判的可能。

Theodossiou(1993)為首先將 CUSUM 模型應用於偵測財務危機模式，本研究所使用的模型與其相同，不同的是 Theodossiou 使用 CUSUM 模型的目的是為了公司破產的偵測，而本文的目的是為了偵測出經濟體的衰退。

國立高雄大學 National University of Kaohsiung

第三章 研究方法

本章第一節將介紹 Brandt(2006)所提出的兩種權重估計法，分別為非條件投資組合與條件投資組合，第二節則介紹 Theodossiou(1993)所提出的 CUSUM 模型，作為本研究的研究方法。

第一節 權重估計式

3.1.1 單週期權重估計式

Markowitz 提出的投資組合理為近代投資組合研究的重要結果，其中平均數-變異數模型為首次在投資組合加入風險考量，其具有一套完整財務意義與科學論證。Brandt(2006)考慮一個平均數-變異數模型

$$\max\ E_t\left[W_{t+1} - \frac{b_t}{2}W_{t+1}^2\right], \tag{3.1}$$

其中W_{t+1}為下一個時間點的財富；為了讓財富保持正數，b_t必須是一個夠小的正常數。令R_t^f為總無風險利率(gross risk-free rate)，則$r_{t+1}^p = R_{t+1}^p - R_t^f$為投資於時間 t 至 t+1 的投資組合超額報酬(excess return)。為了方便表示，定義大寫的 R 為總報酬率(gross return)，小寫的 r 為超額報酬(excess return)。由於無風險利率一般研究上視為銀行定存利率，所以在投資時就已經知道是多少，因此將無風險利率的下標標為投資當時時間。而風險性資產報酬率的定義是由資產當期的價格，與資產下一期的價格計算出來的，所以在投資時並不會知道報酬率是多少，必須到下一個時間點才會知道，所以將風險性資產的報酬率下標標為投資的下一個時間點。舉例來說，若持有一個風險性資產從時間 t 到 t+1，那麼風險性資產的總報酬記為R_{t+1}，同樣期間的無風險利率則記為R_t^f。

在定義符號之後，W_{t+1}可以表示為$W_{t+1} = W_t\left(R_t^f + r_{t+1}^p\right)$。透過一序列的代數運算(詳細過程請參考附錄一)，我們可以將上述財富的平均數-變異數模型，改寫成只包含風險性資產報酬與權重的形式

$$\max_{\mathbf{x}_t} \mathrm{E}_t\left[\mathrm{x}_t'\mathrm{r}_{t+1} - \frac{\gamma}{2}\mathrm{x}_t'\mathrm{r}_{t+1}\mathrm{r}_{t+1}'\mathrm{x}_t\right]，\tag{3.2}$$

其中x_t為風險性資產權重向量，根據 Markowitz 的假設權重和必須為 1，因此無風險資產權重為 1 減去風險性資產權重；r_{t+1}為投資風險性資產從時間 t 到 t+1 的超額報酬向量。另外，透過模型可知γ是用來調節變異數的部分，因此可將此係數視為投資人的風險厭惡程度，投資人的風險厭惡程度高，則可選擇較高的係數，反之則可選擇較低的係數，須注意的是γ必須為一正數。

假設投資組合權重為一常數($x_t = x$)，則投資組合權重估計式為

$$x = \frac{1}{\gamma}\left[\sum_{t=0}^{T-1} r_{t+1} r_{t+1}^{'}\right]^{-1}\left[\sum_{t=0}^{T-1} r_{t+1}\right]。\tag{3.3}$$

在這個情況下因為同樣考慮單一週期的靜態投資組合問題，所以(3.3)式同時也是 Markowitz 投資組合理論中的權重估計式。

假設投資組合權重為 K 維狀態變數(state variable)的線性函數，且狀態變數向量的第一個元素為 1，則權重可表示為

$$x_t = \theta z_t，$$

其中θ為一係數矩陣。透過矩陣的運算，我們可以得到係數矩陣估計式為

$$x = \frac{1}{\gamma}\left[\sum_{\mathrm{t=0}}^{\mathrm{T\text{-}1}}\left(z_t z_t^{'}\right)\otimes\left(r_{t+1} r_{t+1}^{'}\right)\right]^{-1}\left[\sum_{t=0}^{T-1} z_t \otimes r_{t+1}\right]，\tag{3.4}$$

其中$\tilde{x} = \mathrm{vec}(\theta)$，也就是將θ排成向量的形式；⊗為 Kronecker product(詳細的定義與說明請見附錄一)。透過估計式可以觀察到，估計值完全只與資料有關，因此報酬無須任何的分佈假設，參數的估計值也不會受到分佈假設錯誤影響。

由於假設投資在未來一段時間內投資組合權重為一常數，權重估計值與狀態變數無關，因此稱此一投資組合為非條件投資組合(unconditional portfolio)；而假設投資組合權重為狀態變數的線性函數，權重估計值與狀態變數有關，因此稱此投資組合為條件投資組合(conditional portfolio)。除此之外，由於條件投資組合的權重會隨著時間的推移而改變，因此將其視為動態的投資組合，也就是權重會隨

著市場狀態的改變而改變；非條件投資組合的權重，因為不會隨著時間的推移而改變，所以可視為一靜態的投資組合，也就是說權重在到期前均相同。

(單一週期權重估計式的詳細推導過程請參考附錄一)

3.1.2 多期權重估計式

如同單一週期投資組合，考慮一個平均數-變異數模型

$$\max\ \mathrm{E_t}\left[\mathrm{r}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{t}\to\mathrm{t}+2}-\frac{\gamma}{2}\left(\mathrm{r}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{t}\to\mathrm{t}+2}\right)^2\right], \tag{3.5}$$

其中$\mathrm{r}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{t}\to\mathrm{t}+2}$為兩期投資組合的超額報酬，定義如下

$$\mathrm{r}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{t}\to\mathrm{t}+2}=\left(\mathrm{R}^{\mathrm{f}}_{\mathrm{t}}+\mathrm{x}'_{\mathrm{t}}\mathrm{r}_{\mathrm{t}+1}\right)\left(\mathrm{R}^{\mathrm{f}}_{\mathrm{t}+1}+\mathrm{x}'_{\mathrm{t}+1}\mathrm{r}_{\mathrm{t}+2}\right)-\mathrm{R}^{\mathrm{f}}_{\mathrm{t}}\mathrm{R}^{\mathrm{f}}_{\mathrm{t}+1}, \tag{3.6}$$

其中$\mathrm{R}^{\mathrm{f}}_{\mathrm{t}}$表示無風險總報酬(risk-free gross return)，選擇這樣的投資策略，是因為在財務上好解釋，將上式展開之後

$$\mathrm{r}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{t}\to\mathrm{t}+2}=x'_t\left(\mathrm{R}^{\mathrm{f}}_{\mathrm{t}+1}\mathrm{r}_{\mathrm{t}+1}\right)+x'_{t+1}\left(\mathrm{R}^{\mathrm{f}}_{\mathrm{t}}\mathrm{r}_{\mathrm{t}+2}\right)-\left(x'_t\mathrm{r}_{\mathrm{t}+1}\right)\left(x'_{t+1}\mathrm{r}_{\mathrm{t}+2}\right), \tag{3.7}$$

式子的第一項可以被解釋成，第一期投資在風險性資產，且第二期投資在無風險性資產；而第二項可以被解釋成，第一期投資在無風險性資產，且第二期投資在風險性資產上；第三項可以被解釋成，兩個單一週期超額報酬乘積。由於前兩項都是總報酬乘上超額報酬，而第三項是超額報酬相乘，所以第三項的部分會越乘越小，因此當維度越大的時候，第三項就越趨近於零，在此為了計算上的方便省略第三項，至於省略交錯項對估計值的影響，Brandt(2006)有詳細的討論。

在省略交錯項之後，兩期投資組合的選擇就可以被簡化為兩個跨期投資組合的選擇。一個是只有在第一期持有風險性資產，其餘的期間持有無風險性資產；另一個是只有在第二期持有風險性資產，其餘的期間持有無風險性資產。並稱這樣的投資組合為時間投資組合(timing portfolio)。而兩期的投資組合權重估計式，則類似單週期投資組合權重估計式，估計式如下

$$x=\frac{1}{\gamma}\left[\sum_{t=0}^{T-2}\tilde{r}_{t\to t+2}\tilde{r}'_{t\to t+2}\right]^{-1}\left[\sum_{t=0}^{T-2}\tilde{r}_{t\to t+2}\right], \tag{3.8}$$

其中$\tilde{r}_{t\to t+2}=\left[R_{t+1}^{f}r_{t+1},R_{t}^{f}r_{t+2}\right]$為兩期問題下的時間投資組合。$\tilde{x}$向量的第一個元素(對應於$R_{t+1}^{f}r_{t+1}$)代表第一期投資在風險性資產的比例，第二個元素(對應於$R_{t}^{f}r_{t+2}$)代表第二期投資在風險性資產的比例。

當問題一般化到 H 期投資組合問題，我們使用相同的方法，首先建構一個 H 期的時間投資組合

$$\tilde{r}_{t\to t+H}=\left\{\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{H-1}R_{t+i}^{f}r_{t+j+1}\right\}_{j=0}^{H-1}。\tag{3.9}$$

這個時間投資組合的每一項皆表示一個投資組合在第t＋j期投資在風險性資產，其他t＋i期投資在無風險資產上，前提是當i ≠ j時。再一次的套用相同的權重估計式，H 期的最佳投資組合估計式解為

$$x=\frac{1}{\gamma}\left[\sum_{t=0}^{T-2}\tilde{r}_{t\to t+H}\tilde{r}_{t\to t+H}'\right]^{-1}\left[\sum_{t=0}^{T-2}\tilde{r}_{t\to t+H}\right],\tag{3.10}$$

由於此估計式與狀態變數無關，所以也是一個多期的非條件投資組合的解。

由於在單週期的情況中有提到條件投資組合，在多期的問題下很自然地想結合條件投資組合與時間投資組合，因為讓權重隨著市場景氣而改變，會比固定不動來的合理。我們只需將時間投資組合略為修改成

$$\tilde{r}_{t\to t+H}=\left\{\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{H-1}R_{t+i}^{f}z_{t+j}\otimes r_{t+j+1}\right\}_{j=0}^{H-1},\tag{3.11}$$

再套用(3.10)式即可解出 H 期投資組合的參數估計值，不過這尚未是權重估計值，因為條件投資組合假設權重是狀態變數的線性組合，因此還需將參數估計值乘上狀態變數後才是真正的權重估計值。

第二節 CUSUM 模型

由於在過去的文獻中，再平衡時間的選擇都是依照投資人的心理做決定，因此本研究想使用工業上在監控產品製程的想法，套用到投資組合中，透過監控投資組合報酬率平均數之變化，於適當的時間進行再平衡。

本研究假設投資組合報酬率，在市場穩定狀況下，與市場波動的情況下，具有不同的隨機行為。由於投資組合的報酬與投資的資產報酬有關，定義$X_1,\cdots,X_T$為一序列的投資組合財務變數，每個財務變數均包含了該時間點投資組合中資產報酬率，在市場穩定的情況下，投資組合的財務變數$X_1,\cdots,X_t$會服從一「好」的聯合分配，期望值$E(X_t|h)=\mu_h$(h 表示市場穩定時期，以下符號皆同)將會是穩定的；由於市場具有週期性，且投資的資產往往受到資產本身所屬公司經營情況影響，當公司經營出現問題，公司所發行的證券價格也會受到影響，隨著時間變化，投資組合的財務變數將逐漸趨向一「壞」的聯合分配，期望值朝著$E(X_t|f)=\mu_f$(f 表示市場處於不穩定狀態，以下符號皆同)靠攏。整個過程可由(3.12)式表示。

$$\mu_h \rightarrow \mu_{f,s} \rightarrow \cdots \rightarrow \mu_{f,1} \rightarrow \mu_{f,0} = \mu_f \tag{3.12}$$

其中$\mu_{f,m} \equiv E(X_t|h)$，$m=0,1,2,\cdots,s$，表示出問題前 m 期。

將投資組合視為產品，品質特徵為財務變數，然後使用 CUSUM 管制圖來監控其變化過程，透過逐次累積的資訊掌握投資組合的變化過程，判斷財務變數是否已偏離「好」的聯合分配，並即時偵測開始惡化的時間點(s)，給予資產配置適當的導正。在第二章曾提過，要使用 CUSUM 模型資料必須滿足無序列相關的假設，但財務數據卻具有自我相關性。若想要利用 CUSUM 模型監控具有自我相關性的製程，根據 Alwan and Roberts(1989)、Yourstone and Montgomery(1989) 、Montgomery and Mastrangelo(1991)等研究建議，可將資料配適一個適當的時間序列 VARMA 模式，目的是要將隱藏的序列自我相關性模式化，使得誤差項(error term)相互獨立並服從常態假設。故將財務變數配適一個 VARMA 模型如下：

$$X_t - \mu_h = \sum_{k=1}^{p} \Phi_k \left(X_{t-k} - \mu_h \right) + \varepsilon_t - \sum_{s=1}^{q} \Theta_s \varepsilon_{t-s} \tag{3.13}$$

$$X_t - \mu_{f,m} = \sum_{k=1}^{p} \Phi_k \left(X_{t-k} - \mu_{f,m+k} \right) + \varepsilon_t - \sum_{s=1}^{q} \Theta_s \varepsilon_{t-s} \tag{3.14}$$

$\mathrm{m} = 0, 1, 2, \cdots$

$\mathrm{E}(\varepsilon_t) = 0, \qquad \mathrm{E}(\varepsilon_t \varepsilon_t') = \Sigma, \qquad \mathrm{E}(\varepsilon_t \varepsilon_s') = 0$

for $\mathrm{t} \neq \mathrm{s}, \mathrm{t} = 1, \cdots, \mathrm{T}$

式子中 Φ_k 與 Θ_s 分別表示 AR 與 MA 部分的係數矩陣，$\sum$ 為共變異數矩陣 (covariance matrix)，由此可知本研究假設無論處於何種狀態下變異數均不變。若上述模型配適得宜，殘差項 ε_t 將會是一白噪音(white noise)，平均值為 0、殘差項之間無序項相關，此數列間之相關係數也會為 0，符合使用 CUSUM 模型的條件。

Theodossiou(1993)給出一個 CUSUM 模型的計算方式，模型如下：

$$C_t = \min\left(C_{t-1} + Z_t - K, 0 \right) < -L \tag{3.15}$$

其中 $\mathrm{K}, \mathrm{L} > 0$ 且 $\mathrm{t} = 1, 2, \cdots,$

在此，K 為修正模型敏感度之係數，L 為管制下限，C_t 為投資組合在第 t 期的 CUSUM 分數、C_{t-1} 為投資組合在第 t-1 期的 CUSUM 分數，此外，C_t 也代表產品的品質指標，可被視為一累積的時間序列區別分析；Z_t 為投資組合在第 t 期的 Z 值，則視為單獨之區別分析，Z_t 之計算方式如下：

$$Z_t = \beta_0 + \beta_1 \left[X_t - \sum_{k=1}^{p} \Phi_k X_{t-k} + \sum_{s=1}^{q} \Theta_s \varepsilon_{t-s} \right] \tag{3.16}$$

$$\beta_0 \equiv -\frac{1}{2\mathrm{D}} \left[\left(\mu_h - \mu_f \right) - \sum_{k=1}^{p} \Phi_k \left(\mu_h - \mu_{f,k} \right) \right]' \Sigma^{-1} \times \left[\left(\mu_h + \mu_f \right) - \sum_{k=1}^{p} \Phi_k \left(\mu_h + \mu_{f,k} \right) \right] \tag{3.17}$$

$$\beta_1 \equiv \frac{1}{\mathrm{D}} \left[\left(\mu_h - \mu_f \right) - \sum_{k=1}^{p} \Phi_k \left(\mu_h - \mu_{f,k} \right) \right]' \Sigma^{-1} \tag{3.18}$$

$$\mathrm{D}^2 = \left[\left(\mu_h - \mu_f \right) - \sum_{k=1}^{p} \Phi_k \left(\mu_h - \mu_{f,k} \right) \right]' \Sigma^{-1} \left[\left(\mu_h - \mu_f \right) - \sum_{k=1}^{p} \Phi_k \left(\mu_h - \mu_{f,k} \right) \right] \tag{3.19}$$

透過(3.13)、(3.14)式的 VARMA 過程，可計算出參數 Φ_k 與 Θ_s 以及共變異數 $\sum$ 的

估計值，再帶入(3.17)、(3.18)和(3.19)，求得 β_0 、β_1 、D^2 估計式後再帶入(3.16)，即可計算出 Z 值。經由這樣的運算，可將投資組合多個財務變數經由線性組合成為單一的分數 Z_t ，而(3.19)式為用來量測投資組合財務變數，在市場平穩與波動時期的馬式距離(Mahalanobis generalized distance)。

當 $Z_t - K$ 大於零時，表示此時投資組合處於「好」的狀況，亦即投資的資產價格平穩，此時 C 值取值為零分數將不被加到下一個時期；若 $Z_t - K$ 小於零時，表示投資組合惡化，亦即投資的資產價格具有大幅震盪可能會造成損失，此分數將被加到下一個時期中。如果不斷地繼續惡化，C 值會一直累積到下一期中，當 C 小於臨界值 $-L$，就表示投資組合陷入危機之中。換句話說，當投資組合由「好」變「壞」，C 值會漸漸遠離 0 直到低於管制下限，反之，C 值會慢慢的向 0 靠攏。

前面描述的 CUSUM 模型中，K 是模型的敏感係數，L 則為管制圖的管制下限，兩者與管制圖的型 I 錯誤與型 II 錯誤關係密切。所謂型 I 錯誤，就是當投資組合實際上已經出現損失的情形，可是模型卻判定沒有問題；型 II 錯誤就是當投資組合沒有出現損失，可是模型卻判定投資組合出現損失的危險。不論那一種情況發生，對投資人都具有影響力，因此在建立模型時，兩種錯誤都應加以考慮，並控制在合理範圍內。根據 Theodossiou(1993)的研究建議 K 值的範圍為 $K < \mathrm{E}\left(Z_t \middle| h\right) = \frac{\mathrm{D}}{2}$ ，也就是說 K 值應小於 D 值的二分之一。

對於 K 值與 L 值的決定，相關研究中大多是使用極小化期望成本函數來選擇 K 與 L，其概念如下：

$$\min_{K,L} EC = W_f P_f\left(K,L\right) + \left(1 - W_f\right) P_h\left(K,L\right) \tag{3.20}$$

$$P_f \equiv P\left(C_t > -L \middle| f, m = 0\right)$$

$$P_h \equiv P\left(C_t \le -L \middle| h\right)$$

其中 EC 為期望成本函數，P_h 與 P_f 分別代表型 I 錯誤與型 II 錯誤的機率。W_f 與

$1-W_f$ 為模型使用者給予型Ⅰ錯誤與型Ⅱ錯誤的比重，由於型Ⅰ錯誤對於投資者的負面影響較大，通常會給予型Ⅰ錯誤較高的權數，但此權數的大小需視使用者的目的來決定，所以對於每個模式的使用者而言權重很難制定。

為了簡化做法，本研究不考慮極小化期望成本函數的方法，但引此觀念，以原始樣本 CUSUM 管制圖直接判斷 K 與 L。基於 L 值會隨著 K 值變的化而改變，但 K 值卻不受到 L 值變化的影響，因此可以先固定 K 值後再訂定適當的 L 值。因為 K 值的範圍不得超過 D 值的二分之一，而且當 K 值訂太低時容易降低模型的敏感度，所以 K 值在制定較為容易。再選定 K 值以後可以計算出一序列的 CUSUM 值，接著再選擇區別差異最小的 L 值當作管制下界。採用此原則制定 K 值與 L 值，亦即先以 K 值控制型Ⅰ錯誤，再以 L 值來降低型Ⅱ錯誤。依此訂定 K 值與 L 值不但提高了模型的敏感度，同時也降低了誤判的機率，可說是較周到的考量。本研究實證分析將採此途徑制定 K 值與 L 值。

國立高雄大學 National University of Kaohsiung

第四章 模擬與實證

第一節 模擬研究

4.1.1 資料生成

本文引用了 Brandt(2006)所提出生成報酬的模型，作為本文模擬研究資料生成的來源，其模型如下：

$$\mathrm{Y}_{t+1} = \Phi_0 + \Phi_1 z_t + \varepsilon_{t+1} \qquad \text{for } \mathrm{t} = 0,1,2,\cdots,\mathrm{T} \text{ and } z_0 = 0 \tag{4.1}$$

其中 $\mathrm{Y}_{t+1} = \begin{bmatrix} \ln\left(1+r_{t+1}^{s}\right) & \ln\left(1+r_{t+1}^{b}\right) & z_{t+1} \end{bmatrix}^T$

$\Phi_0 = \begin{bmatrix} 0.0059 & 0.0097 & 0 \end{bmatrix}^T$

$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 0.0060 & 0.0035 & 0 \end{bmatrix}^T$

$\varepsilon_{t+1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1}^{s} & \varepsilon_{t+1}^{b} & \varepsilon_{t+1}^{z} \end{bmatrix}^T$

且 $\varepsilon_{t+1} \sim \mathrm{MVN}\left(0, \Sigma\right)$，$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.0018 & & \\ 0.0002 & 0.0006 & \\ -0.0005 & 0.0007 & 0.0802 \end{bmatrix}$為共變異數矩陣。

(4.1)式為一 VAR 模型，r_{t+1}^{s} 為股票的超額報酬，上標 s 表示股票(stock)，相同地，r_{t+1}^{b} 為債券的超額報酬，上標 b 表示債券(bond)，z 則為狀態變數。無風險總利率 R_t^f 則假設服從均勻分配U(1,1.0005)。以上生成的報酬率與狀態變數皆假設為月資料。

狀態變數通常會與市場景氣狀態具有相同的趨勢，而當下的市場景氣狀態在投資時就能夠了解；無風險利率一般研究指的是銀行存款，存款利率也屬於投資時就能掌握。若在時間 t 進行投資，對於這種投資當下就能知道確切數值，在定義符號上，就在下標標上與投資時點相同之 t。風險性資產的報酬屬於變數，在投資時無法確切知道報酬率是多少，只有在期末時才會知道，在定義符號上，則於風險性資產報酬率下標加上期末的時間點。下表中同一列代表同一期間內所觀

察到的資料。

表 4.1.1

期間	無風險利率	狀態變數	股票	債券
[t,t+1]	R_t^f	z_t	r_{t+1}^s	r_{t+1}^b
[t+1,t+2]	R_{t+1}^f	z_{t+1}	r_{t+2}^s	r_{t+2}^b
[t+2,t+3]	R_{t+2}^f	z_{t+2}	r_{t+3}^s	r_{t+3}^b

4.1.2 權重估計式比較

本研究假設投資組合為三個資產所組成，每個投資標的生成 24 筆月資料作為第一次估計權重的樣本，再透過模型生成未來資料，觀察不同權重估計式在投資報酬上的差異。在進行研究之前，首先本研究將透過模擬觀察參數γ在模型中代表的經濟意義。本研究中的每個資產生成 24 筆資料，在不同γ下用 Markowitz 估計式估計權重，重複 1000 次，並記錄 1000 個權重之平均數，結果為表 4.1.2。在第三章有提到直接透過數學式可以看見的經濟意義之解釋，透過表 4.1.2 可以更加清楚的了解到γ所扮演的角色。當γ取值由小漸漸變大時，可以觀察到權重的分配也漸漸的由高風險資產轉移到低風險資產與無風險資產中，呼應了第三章解釋的經濟意涵。

表 4.1.2 γ係數與資產權重

γ值	股票	債券	無風險
0.0001	5462.572	30351.58	-35813.1
1	3.653038	0.716802	-3.36984
2	1.565021	-0.49793	-0.06709
5	0.660277	-0.10466	0.444384
6	0.563452	-0.06261	0.499162
8	0.368554	0.016038	0.615408
9	0.301811	0.018213	0.679976
100	0.035013	0.038281	0.926706

了解γ的經濟意涵後，為了在同樣標準下進行比較，本研究參考 Brandt(2006)

的研究設計，假設$\gamma = 5$。確定係數後，本研究比較三種不同權重估計式，分別為傳統的 Markowitz 估計式、Brandt(2006)提出的非條件投資組合與條件投資組合估計法，並加入不同的再平衡時間重新評估權重。本研究生成 24 筆資料估計第一次的投資權重，接著生成未來的資料計算每月的投資報酬率，投資期限分別為一年、兩年、五年以及十年，每次操作都可以得到一條報酬路徑，重複操作 1000 次並，此時每月都有 1000 筆資料將其取平均後，可求到一條每月報酬的路徑，再將這路徑算出一平均數作為投資期間的平均報酬。舉例來說，若考慮一個兩年期的投資期限，則生成 24 筆資料計算第一次投資權重，接著搭配不同的在平衡時間，例如每半年平衡一次，則於再平衡時間點省去前 6 筆資料，同時加入新的六筆資料重新估計權重，每月都計算一次投資報酬率，則兩年就會有 24 筆，重複 1000 次，就會有 1000 條報酬路徑，每月每月取平均，就會剩一 24 筆每月平均報酬率，最後再將這 24 筆資料取平均，作為投資兩年的平均報酬率。

為了方便表示，定義接下來表格與圖中出現的符號：

mw：markowitz weight

ucw：unconditional portfolio weight

cw：conditional portfolio weight

(a,b)：a 表示期數, b 表示幾期 rebalancing 一次

舉例來說，ucw(2,6)表示考慮兩期的非條件投資組合配置方法且每六個月再平衡。

表 4.1.3 為不同方法投資一年期的平均報酬率。首先看到單期的非條件投資組合的部分，傳統的 Markowitz 配置法的平均報酬率為 0.5677%。加入再平衡的策略後，可以看到每期都再平衡的方法，所求出的平均報酬率最高為 0.75352%。若每季再平衡，則比每月再平衡所求出的平均報酬低來到 0.7208%。再將再平衡頻率拉長到每半年再平衡一次，很明顯的可以看到平均報酬又降低了許多來到 0.6186%。所以我們可以看到當再平衡的頻率拉長時，平均報酬是會降低的，這

是因為使用過去資料所估計出來的權重，已經與現在的經濟情況有落差，換句話說，當再平衡越頻繁越能反應出實際的經濟情況。從多期的非條件投資組合來看，兩期的非條件投資組合平均報酬為 0.4225%，比傳統的 Markowitz 來的低，這可能是因為 Brandt(2006)多期的方法是考慮一個近似值的估計，在第三章研究方法也有介紹過，當考慮期數越多時，近似的估計法會比較準確，透過模擬結果也可以看到，考慮多期的非條件投資組合且不再平衡的情況下，兩期所求得的平均報酬較三期的 0.4773%來的低，而三期的平均報酬又較六期的 0.5442%來的低。從這裡可以看出來，當考慮的期數越多近似的估計方法會越好。另外使用條件投資組合進行資產配置，可以看到在同樣的期數與再平衡頻率下，使用條件投資組合進行配置都比非條件投資組合來的好，像是傳統的 Markowitz 一年期平均報酬為 0.5766%，而單期且不考慮再平衡的條件投資組合平均報酬則為 1.0079%，在獲利上提升了近一倍。再多期的條件投資組合中，在不考慮再平衡的情況下，兩期的平均報酬為 0.7596%，而三期的平均報酬則提升到 0.7848%，近似的估計手法造成在多期的配置需要考慮較高的期數。在同樣不考慮再平衡的情況下，兩期的條件資組合所求得的平均報酬就比單期的少了 0.2483%，三期的條件資組合所求得的平均報酬也比單期的少了 0.2231%，因此使用條件投資組合配置時，選用單期的配置法會比多期來的好。

表 4.1.3 模擬投資未來一年不同方法的平均報酬(%)

方法	mw	ucw(1,1)	ucw(1,3)	ucw(1,6)	ucw(2,0)	ucw(2,2)	ucw(2,6)
平均報酬	0.5766	0.7352	0.7208	0.6196	0.4225	0.7842	0.6133
方法	ucw(3,0)	ucw(3,3)	ucw(3,6)	ucw(6,0)	cw(1,0)	cw(1,1)	cw(1,3)
平均報酬	0.4773	0.7233	0.5237	0.5442	1.0079	1.0218	0.9365
方法	cw(1,6)	cw(2,0)	cw(2,2)	cw(2,6)	cw(3,0)	cw(3,3)	cw(3,6)
平均報酬	1.1001	0.7596	0.9200	0.8437	0.7848	0.8704	0.9086

表 4.1.4 為不同方法投資兩年期的平均報酬率。首先我們看到單期的非條件投資組合，透過模擬傳統的 Markowitz 平均報酬為 0.6177%，加入再平衡策略後，每月再平衡平均報酬提升到 0.7416%，每季再平衡平均報酬率為 0.8105%，每半年再平衡平均報酬率為 0.7366%，而每年再平衡平均報酬率為 0.6504%，不同於一年期的情況，在兩年期的情況下，每季再平衡的平均報酬反而比每月再平衡多了 0.0689%。多期的非條件投資組合，由兩期與三期且都不再平衡的情況下來看，可以發現考慮的期數變多，平均報酬率三期也比兩期多了 0.0613%，這也是因為透過近似的估計權重導致的結果，而且多期的情況下當再平衡時間拉長，例如兩期每兩月再平衡、兩期每半年再平衡以及兩期每年再平衡，平均報酬率分別為 0.6676%、0.6656%、0.6122%，平均報酬有隨著再平衡時間拉長而下降的趨勢。考慮同樣的期數與再平衡時間，可以發現使用條件投資組合配置的平均報酬會比非條件投資組合配置的平均報酬來的高，這是因為條件投資組合為動態的投資組合配置，由於對權重的假設，使得權重隨著時間的推移不斷的改變。此外在單期的條件投資組合中，可以發現不考慮再平衡重新調整係數的平均報酬為 1.2832%，比有加入再平衡調整係數的情況來的高，甚至比每期都再平衡調整係數的平均報酬高出 0.1878%，這點與單期非條件投資組合的情況不同。在條件投資組合配置中，單期的投資獲利會比多期的高，像單期條件投資組合且不再平衡平均報酬為 1.2832%，而兩期或三期的條件投資組合即使加入再平衡策略，投資期間的平均報酬率還是比單期而且不再平衡來的低(所有兩期條件投資組合中最大的平均報酬率為 1.2477%，三期條件投資組合中最大平均報酬率為 1.2102%)。

表 4.1.4 模擬投資未來兩年不同方法的平均報酬(%)

方法	mw	ucw(1,1)	ucw(1,3)	ucw(1,6)	ucw(1,12)	ucw(2,0)	ucw(2,2)
平均報酬	0.6177	0.7416	0.8105	0.7366	0.6504	0.5514	0.6676
方法	ucw(2,6)	ucw(2,12)	ucw(3,0)	ucw(3,3)	ucw(3,6)	ucw(3,12)	cw(1,0)
平均報酬	0.6656	0.6122	0.6127	0.7433	0.6668	0.5823	1.2832
方法	cw(1,1)	cw(1,3)	cw(1,6)	cw(1,12)	cw(2,0)	cw(2,2)	cw(2,6)
平均報酬	1.0954	1.2204	0.9997	1.0510	1.2477	1.0333	0.7929
方法	cw(2,12)	cw(3,0)	cw(3,3)	cw(3,6)	cw(3,12)		
平均報酬	0.8983	1.2102	1.1315	0.7801	0.7639		

表 4.1.5 為不同方法投資五年期的平均報酬率。單期非條件投資組合中，再平衡頻率的長短影響了平均報酬的高低，再平衡頻率越高所獲得的平均報酬越高，再平衡頻率越低所獲得的平均報酬越低，例如每月再平衡的平均報酬為 0.7871%、每季再平衡的報酬為 0.7666%、每半年再平衡的報酬為 0.7385%以及每年再平衡的報酬為 0.7028%，其中可以發現只要有進行再平衡，所獲得的報酬就會比傳統 Markowitz(也就是不考慮再平衡)的平均報酬 0.6152%來的高。不同於投資年限一年與兩年，使用多期非條件投資組合且不考慮再平衡，投資報酬率有隨著考慮的期數變多而變少的趨勢，像兩期的平均報酬率為 0.5479%，可是三期的平均報酬率只剩下 0.4453%，六期的平均報酬率下降到 0.4227%。在條件投資組合的部分，我們可以看到考慮單期的條件投資組合且不再平衡的投資配置所獲得的平均報酬率為 1.2061%，而兩期與三期的條件投資組合且不再平衡的投資配置所獲得的平均報酬率分別為 0.9736%、1.0376%，在不考慮再平衡的情況下，單期條件投資組合的配置方式會比多期的配置方式來的好。在單期條件投資組合中，可以看到加入再平衡後並沒有提升平均報酬，像每期都再平衡的報酬率為 1.1203%、每季再平衡的報酬為 1.0671%、每半年再平衡的報酬為 1.0215%以及每年再平衡的

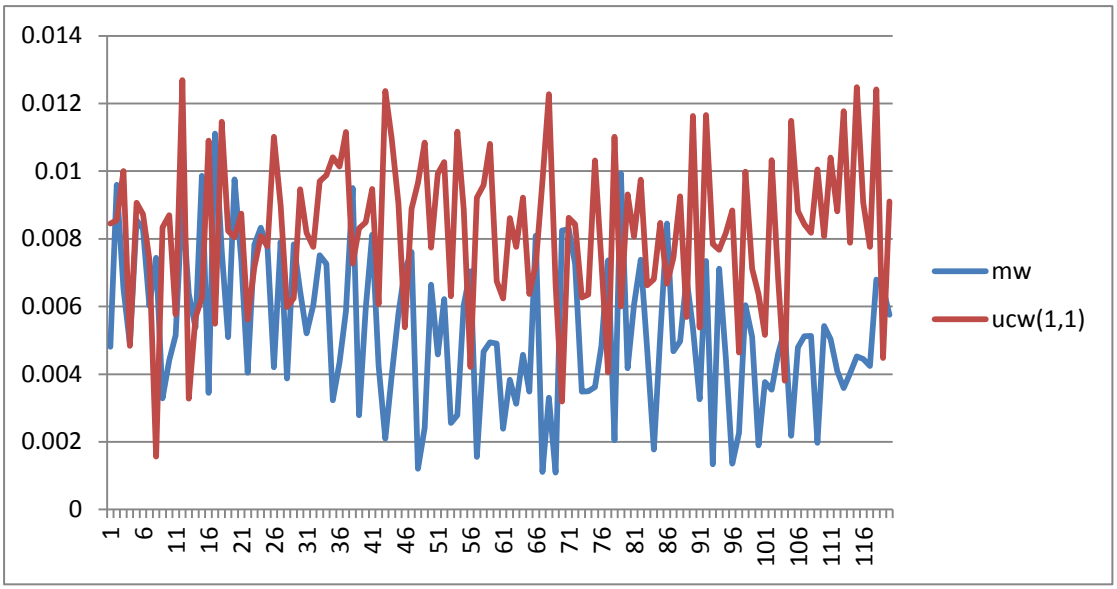
報酬為 1.0715%，考慮再平衡後反而比不考慮再平衡的報酬 1.2061%來的低。

表 4.1.5 模擬投資未來五年不同方法的平均報酬(%)

方法	mw	ucw(1,1)	ucw(1,3)	ucw(1,6)	ucw(1,12)	ucw(2,0)	ucw(2,2)
平均報酬	0.6152	0.7871	0.7666	0.7385	0.7028	0.5479	0.6920
方法	ucw(2,6)	ucw(2,12)	ucw(3,0)	ucw(3,3)	ucw(3,6)	ucw(3,12)	ucw(6,0)
平均報酬	0.6394	0.6456	0.4453	0.6321	0.6002	0.6007	0.4227
方法	cw(1,0)	cw(1,1)	cw(1,3)	cw(1,6)	cw(1,12)	cw(2,0)	cw(2,2)
平均報酬	1.2061	1.1203	1.0671	1.0215	1.0715	0.9736	0.9657
方法	cw(2,6)	cw(2,12)	cw(3,0)	cw(3,3)	cw(3,6)	cw(3,12)	
平均報酬	0.9109	0.8624	1.0376	1.0707	1.0683	0.9235	

表 4.1.6 為不同方法投資十年期的平均報酬率。首先看到單期非條件投資組合，傳統的 Markowitz 在投資期間的平均報酬為 0.5290%，與同樣考慮單期非條件投資組合且每期再平衡的平均報酬率少了 0.2958%，由圖 4.1.1 可以看到在第 39 筆開始 Markowitz 的報酬路徑開始往每期都再平衡的單期非條件投資組合下方偏移，這顯示出 Markowitz 不更新資訊的作法已經偏離現在的經濟情況，反觀每期再平衡的單期非條件投資組合，因為不斷地加入新資訊重新考慮權重，所以報酬率維持在一定水準之下，沒有明顯往上或往下偏離的情形發生。相同的解釋可以用在不考慮再平衡的多期非條件投資組合與再平衡時間跟非條件投資組合考慮的期數相同的情況下，在這些情形下由於投資時間較長的緣故，都導致不考慮再平衡的投資組合報酬率路徑漸漸地往加入再平衡策略的投資組合路徑下方移動(圖 4.1.2 與圖 4.1.3)。

圖 4.1.1 模擬投資十年 Markowitz、每期在平衡單期非條件投資組合報酬路徑



在有考慮再平衡策略的情況下，由表 4.1.6 可以看到在非條件投資組合的情況下，平均報酬率隨著再平衡的頻率變長而變小，例如兩期非條件投資組合，考慮每兩個月再平衡的平均報酬為 0.7279%，若考慮每半年再平衡的平均報酬則降為 0.7079%，在拉長到每年再平衡一次平均報酬率降為 0.6752%。接著看到條件投資組合的部分，以單期條件投資組合進行操作所求得的平均報酬會比用多期條件投資組合操作所求得的平均報酬來的高。在不考慮再平衡的情況下，單期條件投資組合的平均報酬率為 1.3409%，比兩期條件投資組合的平均報酬率多了 0.2472%，比三期條件投資組合多了 0.2670%。在條件投資組合中，不加入再平衡策略所求得的平均報酬率比考慮再平衡策略的平均報酬率來的高。例如同樣考慮單期條件投資組合下，不考慮再平衡的平均報酬率為 1.3409%，比考慮每月再平衡的平均報酬率多了 0.2792%，比考慮每季再平衡的平均報酬率多了 0.2752%，比考慮每年再平衡的平均報酬率多了 0.2141%。

表 4.1.6 模擬投資未來十年不同方法的平均報酬(%)

方法	mw	ucw(1,1)	ucw(1,3)	ucw(1,6)	ucw(1,12)	ucw(2,0)	ucw(2,2)
平均報酬	0.5290	0.8248	0.8196	0.7717	0.7413	0.4517	0.7279
方法	ucw(2,6)	ucw(2,12)	ucw(3,0)	ucw(3,3)	ucw(3,6)	ucw(3,12)	cw(1,0)
平均報酬	0.7079	0.6752	0.4542	0.6926	0.6711	0.6429	1.3409
方法	cw(1,1)	cw(1,3)	cw(1,6)	cw(1,12)	cw(2,0)	cw(2,2)	cw(2,6)
平均報酬	1.0617	1.0657	1.0743	1.1268	1.0973	1.0306	0.8951
方法	cw(2,12)	cw(3,0)	cw(3,3)	cw(3,6)	cw(3,12)		
平均報酬	0.7778	1.0739	1.0099	0.9994	0.9638		

由模擬結果，不論在一年、兩年、五年或十年，使用條件投資組合配置所獲得的平均報酬率永遠比非條件投資組合的配置來的高。在條件投資組合中，單騎且不考慮再平衡的配置方法的平均報酬，又比多期或者考慮再平衡策略的配置來的高，因此若要使用條件投資組合進行配置，建議使用單一週期且不考慮再平衡策略。

非條件投資組合中，在投資一年期時已考慮兩期而且每兩期平衡一次所得的平均報酬率最高為 0.7842%，但一次考慮兩期而且每兩期再平衡一次，就是每期都再進行調整權重，如果有成本考量的話這個方法是不太建議的，而且既然每期都再進行調整權重，選擇條件投資組合的平均報酬率反而會更好。所以在投資期限一年期中，本研究建議使用單週期非條件投資組合加上每季再平衡為不錯的配置方式，理由是因為每季再平衡雖然比每月再平衡的平均報酬率少了 0.0144%的報酬率，但在一年內只需要再平衡三次，比每月再平衡少了八次。當投資期限為兩年時，非條件投資組合中也以單週期每季再平衡的平均報酬率最高為 0.8105%。投資五年時，每季再平衡的平均報酬雖沒有每月再平衡的平均報酬高，但是差距也只有 0.0205%，卻能減少再平衡的次數。投資期限為十年時，非條件投資組合

中以單週期每季再平衡的平均報酬率最高為 0.7952%。因此本研究建議，固定時間再平衡以每季平衡一次為佳。

第二章 實證分析

4.2.1 資料來源與研究設計

本研究主要探討固定時間再平衡，與透過動態偵測模型選擇再平衡時間，對投資組合報酬的影響。所以本研究考慮股票與債券做為投資組合中風險性資產，另外考慮定期存款當作無風險性資產。周行一與劉璞(2000)在「投資學的世界」一書中提到：債券為投資組合中不可或缺的項目，理由是因為債券價格與利率之間具有一特定關係。選擇的資產分別為台股鴻海、中華民國中央政府公債十年期，以及中央銀行一年期牌告利率，估計權重所需要之狀態變數，則選取在經濟上為市場領先指標的台股指數。本研究收集 1999 年 9 月至 2001 年 11 月以及 2005 年 1 月至 2011 年 12 月的每月歷史價格，其中包含了 2007 年 12 月至 2009 年 6 月的金融海嘯期間，資料取自台灣證券交易所與中央銀行網站。

本研究估計權重的方法都是透過資產的報酬率計算而得，以下為本研究所採用的報酬率定義：$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$，其中$P_t$表示資產在時間 t 的價格。

本研究假設於 2007 年 1 月至 2011 年 12 月持有一投資組合，使用 2005 年至 2006 年的資料作為第一次估計權重的樣本，分別考慮三種不同權重估計式，分別是：Markowitz 估計式、非條件投資組合估計式(Markowitz 估計式加上再平衡策略)、以及條件投資組合估計式。為了動態的選擇再平衡時間點，本研究由行政院經濟建設委員會所發布的景氣對策信號，選擇了一段由景氣穩定(1999 年 9 月至 2001 年 2 月)轉為景氣低迷(2001 年 3 月至 2001 年 11 月)的期間，作為估計 CUSUM 模型的樣本，透過模型監控投資期間投資組合的變化，並於 CUSUM 值超出管制下限，或者 C 值低於管制下限可是與前幾期趨勢完全不同時，重新估

計資產權重。

4.2.2 實證結果

表 4.2.1 各種方法投資於 2007~2011 年的平均報酬率(%)

方法	mw	ucw(1,1)	ucw(1,3)	ucw(1,6)	ucw(1,12)	ucw(2,0)	ucw(2,2)
平均報酬	-0.4630	0.3822	0.1545	-0.3299	-1.6386	0.3196	0.1374
方法	ucw(2,6)	ucw(2,12)	ucw(3,0)	ucw(3,3)	ucw(3,6)	ucw(3,12)	ucw(6,0)
平均報酬	0.0914	-1.0878	0.0854	0.1974	-0.2019	-1.7128	-1.3484
方法	ucw(6,6)	cw(1,0)	cw(1,1)	cw(1,3)	cw(1,6)	cw(1,12)	cw(2,0)
平均報酬	-1.4932	24.4520	10.8710	11.5435	13.5811	12.0510	19.6197
方法	cw(2,2)	cw(2,6)	cw(2,12)	cw(3,0)	cw(3,3)	cw(3,6)	cw(3,12)
平均報酬	10.4983	14.1808	8.8924	20.1184	8.4728	8.1837	11.4106

本文使用三種不同估計法，加上固定的再平衡選擇，實際投資於 2007~2011 年，表 4.2.1 為不同方法於這段期間的平均報酬率。在這段跨越金融海嘯的投資期間，使用傳統的 Markowitz 方法進行投資，會導致負的報酬率為-0.4630%，也就是說若投資人於這段時間採用 Markowitz 的方法進行配置，將會導致損失的發生。加入再平衡策略後，可以看到使用單期非條件投資組合配置，搭配每月或者每季的再平衡調整，可以使得平均報酬率變為正數，每月都再平衡就比傳統 Markowitz 的方法多了 0.8452%的報酬，而每季再平衡則是比傳統 Markowitz 的方法的多了 0.6175%；但是有時候再平衡的動作反而沒有增加投資組合報酬效果，像每年調整一次反而使得平均報酬率下降了 1.1756%。多期非條件投資組合中，以兩期的投資策略為佳，這是因為考慮兩期的非條件投資組合，可以在不考慮再平衡的情況下仍有正報酬(0.3196%)，而且比三期(0.0854%)或六期(-1.3484%)來的

好。另外，於這段期間內考慮非條件投資組合配置時，不建議每半年或每年再平衡一次，對於橫跨金融海嘯時期每半年或每年重新調整權重，可能因為歷時太久所以導致採用半年或每年調整的策略產生負的平均報酬，雖然在兩期時每半年調整可以創造正的平均報酬率 0.0914%，不過其它期間的投資組合仍然是負的，因此不建議採用每半年或每年調整一次。利用條件投資組合的配置方法，投資在 2007~2011 這段期間，可以發現條件投資組合的配置結果，導致這段時間內的平均報酬均為正數，而且平均報酬都有超過 1%，相較之下，非條件投資組合的配置平均報酬均再 1%以下而且還會出現賠錢的情況。由表 4.2.1 可以看到在單期的條件投資組合中，不考慮再平衡策略的平均報酬為 24.4520%，其它有考慮再平衡的單期條件投資組合，平均報酬均比不考慮再平衡的情況小，而且當調整的頻率越頻繁，平均報酬率就越低。從表中還可以看到，在不考慮再平衡的情況下，考慮多期的條件投資組合(不論是兩期或三期)的平均報酬，都比單期的來的小，透過圖 4.2.1 可以看到，在 2008/06~2009/06 這段期間有幾個比較突出的點，這些點顯示出利用單期配置的報酬大於多期配置的報酬，所以導致了整段期間的平均報酬結果為單期配置優於多期配置。若要使用條件投資組合進行投資，單周期且不考慮再平衡為最佳選擇。

圖 4.2.1 2007~2011 三種週期條件投資組合配置的報酬路徑圖

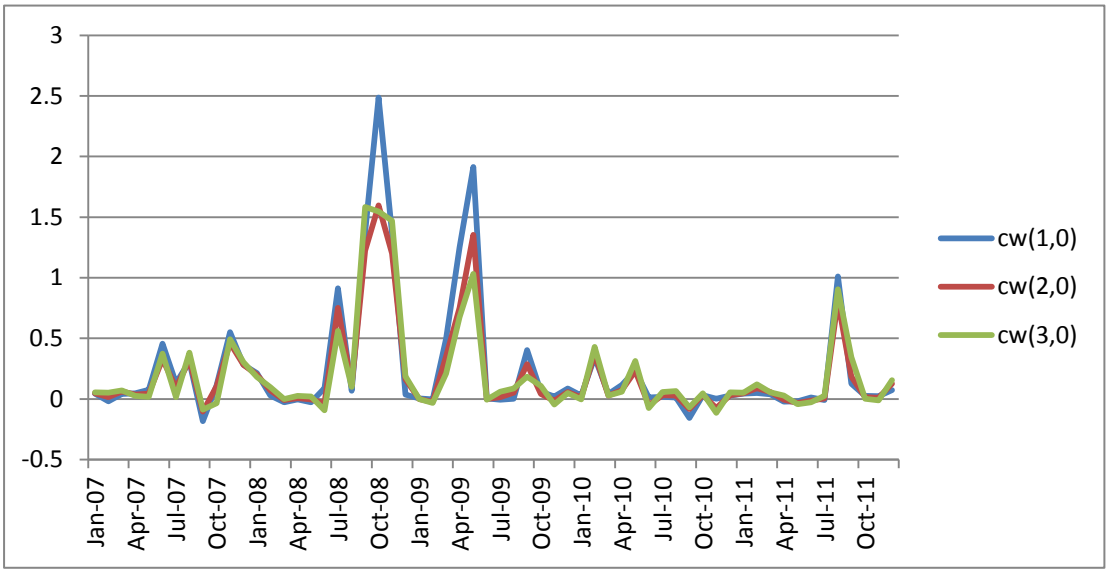
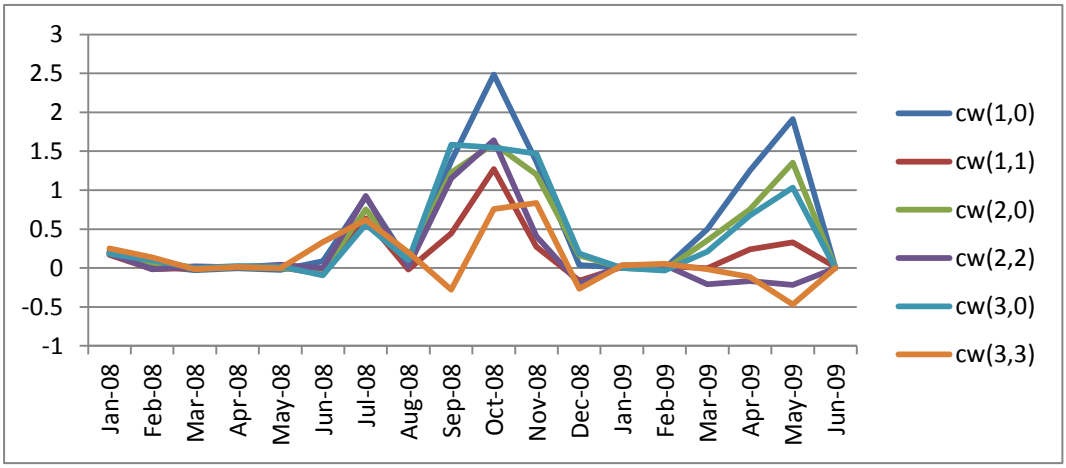


表 4.2.2 金融海嘯時期 2008~2009/06 平均報酬(%)

方法	mw	ucw(1,1)	ucw(1,3)	ucw(1,6)	ucw(1,12)	ucw(2,0)	ucw(2,2)
平均報酬	-0.4656	-0.4764	-0.3243	-2.2248	-3.6728	0.2611	-0.8478
方法	ucw(2,6)	ucw(2,12)	ucw(3,0)	ucw(3,3)	ucw(3,6)	ucw(3,12)	ucw(6,0)
平均報酬	-1.3465	-2.8852	-1.5074	-1.6858	-2.9076	-5.2800	-3.2835
方法	ucw(6,6)	cw(1,0)	cw(1,1)	cw(1,3)	cw(1,6)	cw(1,12)	cw(2,0)
平均報酬	-3.6613	56.5909	17.5367	20.2698	26.5053	26.0924	42.8335
方法	cw(2,2)	cw(2,6)	cw(2,12)	cw(3,0)	cw(3,3)	cw(3,6)	cw(3,12)
平均報酬	20.2804	32.8971	20.0724	42.0014	11.4901	10.5783	25.5870

接著我們將金融海嘯期間(2008/01~2009/06)另外抽出來看。由表 4.2.2 可知各種方法所估計出來的權重投資在金融海嘯期間的平均報酬。從表中我們可以看到非條件投資組合的配置結果，只有兩期且不考慮再平衡的情況，於金融海嘯期間報酬率為正(0.2611%)，其餘情況投資的結果均為負的平均報酬率。使用條件投資組合進行配置，可以看到在金融海嘯期間平均報酬均為正數，而且沒有執行再平衡的單期條件投資組合，投資在金融海嘯期間內所得到的報酬最多，由圖 4.2.2 也可以看到單期條件投資組合在 2008/10 與 2009/05 有突出的跳動點(相較於其他方法)，導致平均而言單期條件投資組合的報酬率最高。

圖 4.2.2 金融海嘯期間條件投資組合配置的報酬路徑圖



接著我們使用 CUSUM 模型進行動態的選擇再平衡時間點，我們透過 1999 年 9 月至 2001 年 11 月的樣本資料配適 VAR(1)模型，模型的參數估計值與殘差共變異矩陣如下：

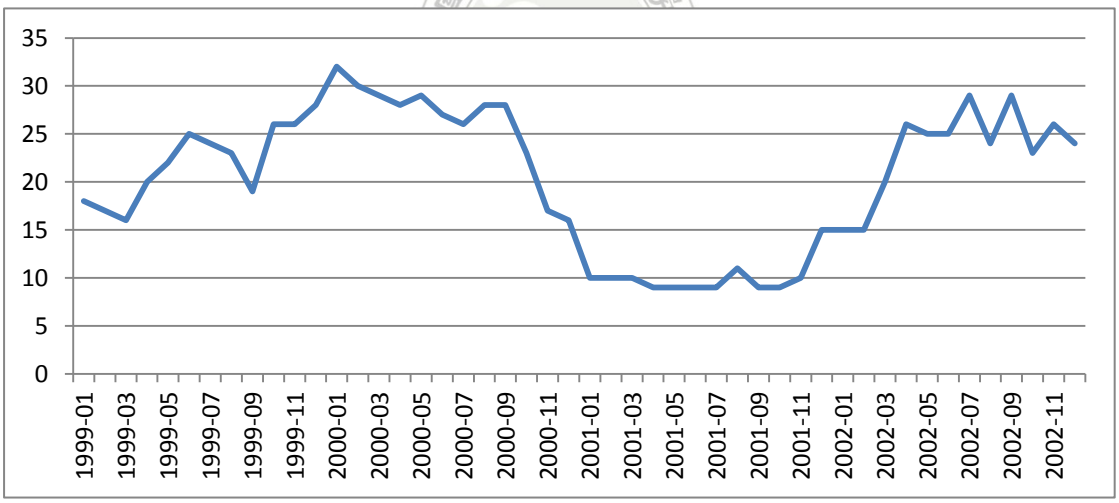
$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} -0.0769 & -0.0242 \\ 0.2203 & -0.1990 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 0.0150 & 0.0 \\ 0.0026 & 0.0 \end{bmatrix}。 \tag{4.2}$$

估計參數後將參數帶入(3.19)式求出 D 的估計值為 0.98，再帶入(3.17)、(3.18)式計算β_0、β_1分別為 0.6717 與[2.466　19.355]，Z_t可表示為

$$Z_t = 0.6717 + [2.466 \quad 19.355] \times [X_t - \Phi_1 X_{t-1}]。 \tag{4.3}$$

由於 K 值不得超過 D 值的一半(0.49)，而模型主要的功能還是為了偵測出投資組合問題的發生，所以希望模型的敏感度高，不欲低型 I 錯誤太大導致模型失效，所以本研究將 K 值定為 0.39，然後將樣本帶回模型中計算 CUSUM 值(表 4.2.3)。

圖 4.2.3 1999~2002 台灣景氣對策信號(分數)



由經建會公布的景氣指標燈號指出，台灣於 2000 年 12 月進入景氣低迷的情況，不過由景氣指標分數(圖 4.2.3)可以看出，整體景氣陷入低谷狀態其實是 2001 年 1 月開始，為了使模型可以提前於景氣低迷前發出警訊，本研究取 2000 年 10 月的 CUSUM 值 2.43 作為 L 值，因為這個月為轉換燈號的前一期，所謂的轉換燈號表示：景氣將由一個景氣狀態到另外一個景氣狀態的過渡燈號。在訂定 K

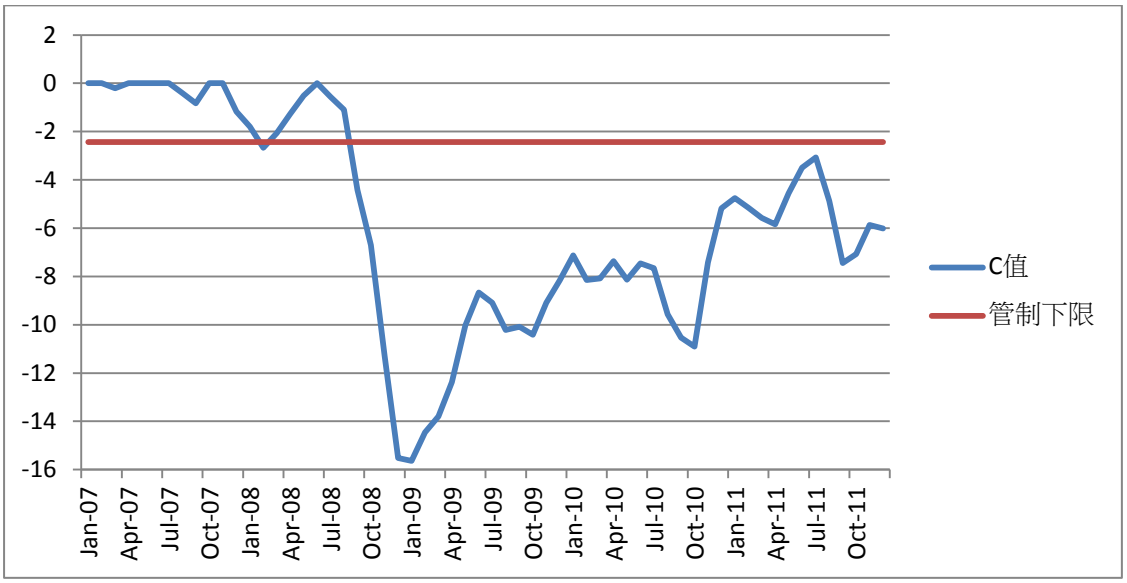
與 L 後，CUSUM 模型即為

$$C_t = \min\left(C_{t-1} + Z_t - 0.39, 0\right) < -2.43 \text{，} \tag{4.4}$$

將 2007 年至 2011 年的資料帶入模型中計算每期之 CUSUM 值(表 4.2.4)。

由 CUSUM 管制圖顯示(圖 4.2.3)，在 2008 年 2 月超出管制下限，下一期(2008 年 3 月)又回到管制下限上方，於 2008 年 9 月再一次超出管制下限，直到 2009 年 4 月 CUSUM 值不再持續下降，因此根據管制圖與 C 值的變化，選取這四個時間點作為再平衡時間點，將傳統的 Markowitz 方法與單周期的條件投資組合於這四個時間點進行再平衡。

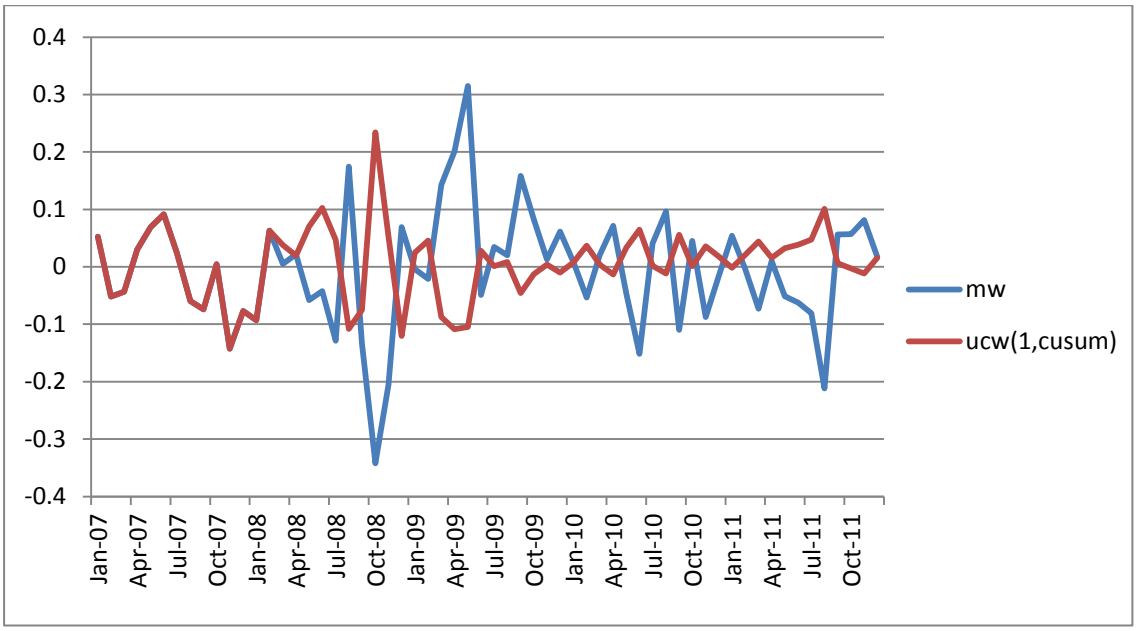
圖 4.2.3 2007/01~2011/12 管制圖



使用單期非條件投資組合估計式並透過 CUSUM 模型動態選擇再平衡時間點調整權重，投資於 2007~2011 年的平均報酬率為 0.5618%，與 Markowitz 的作法相比，透過動態選時調整權重的平均報酬率上升了 1.0248%。由圖 4.2.4 可以看到，傳統的投資組合配置方式在遭遇金融海嘯時容易造成慘賠的情況，使用本研究的方法動態的決定再平衡時間後，減少了本來在金融海嘯期間可能遭遇的損失。另外金融海嘯之後，使用傳統的方法投資報酬震盪的幅度減少了許多，但是仍處於負報酬的情況居多，這是因為 Markowitz 的估計式只包含 05 年至 06 年的

資訊，在金融海嘯之後雖然景氣有回復，但是是否真的回復到 05 年 06 年時的經濟環境，並沒有人可以確定，而且時間距離太遠所造成的資訊不足，也是原因之一。使用本研究的方法最後一次再平衡時間點為 2009 年 4 月，重新估計權重時樣本包含了金融海嘯時期的資訊，導致保守的資產配置，保守的投資使得 2009 年 5 月之後的報酬路徑只有微幅的震盪(相較 Markowitz 方法之下)。

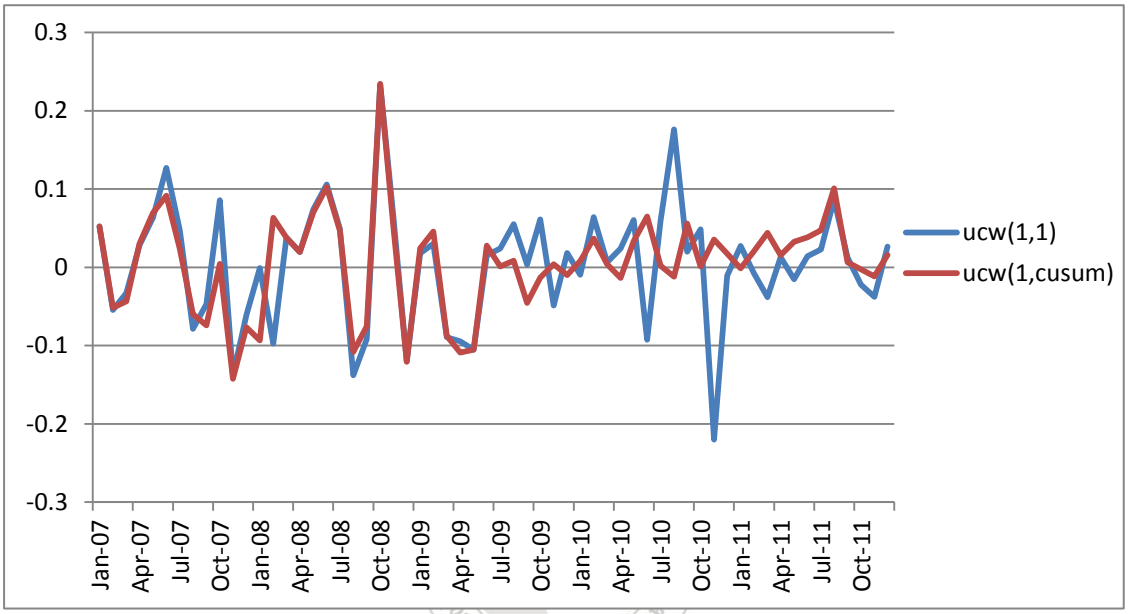
圖 4.2.4 2007~2011Markowitz 配置、動態再平衡時間非條件投資組合的報酬路徑



單期非條件投資組合且每月再平衡的平均報酬為 0.3822%，比動態選擇平衡時間點的平均報酬少了 0.1736%，由圖 4.2.5 可以看到最主要的差別在於 2009 年 7 月以後，每期調整最主要的損失時間點為 2010 年 11 月，由於每次調整都是用過去 24 筆資料重新估計，用來估計 2010 年 11 月資產權重的樣本平均數為：鴻海 0.0173、公債-0.0205，樣本變異數為：鴻海 0.0123、公債 0.0037。因此權重偏重於投資鴻海，可是投資當期的鴻海報酬率卻是-0.0175、公債為 0.1681，所以才會導致投資失利造成損失。反觀動態再平衡的方法，最後一次再平衡的時間點為 2009 年 4 月，當時用來估計權重的樣本平均數為：鴻海-0.0300、公債-0.0080，樣本變異數為：鴻海 0.0163、公債 0.0059。造成保守的權重估計，所以

才沒有在之後造成巨大的損失。每季再平衡的單周期非條件投資組合配置平均報酬為 0.1545%，比動態選擇平衡時間點的平均報酬少了 0.4073%，造成的原因主要也是在於 2009 年 7 月以後，每季再平衡的操作方式產生了較大震幅的報酬路徑(圖 4.2.6)，而最主要造成損失的原因則與每月再平衡的理由是一樣的。

圖 4.2.5 2007~2011 每月再平衡、動態再平衡單期非條件投資組合的報酬路徑



使用單期條件投資組合估計式，並透過 CUSUM 模型動態選擇再平衡時間點重新估計係數，投資於 2007~2011 年的平均報酬率為 12.6110%，本研究發現透過動態選擇再平衡並沒有原本都不進行再平衡的平均報酬來的好，平均報酬反而較都不進行再平衡的單期條件投資組合少了 11.8410%。因此在條件投資組合的情況下，不加入再平衡策略似乎比較能獲取較多的報酬率。

透過實證分析發現，CUSUM 模型確實能偵測出經濟體發生劇烈變動。當投資期間有重大的金融事件發生時，採取固定時間再平衡，可能會使得重大金融事件剛好出現在上一個至下一個再平衡時間點之間，如此一來可能會造成投資組合的損失。透過模型偵測出的時間點，動態選擇再平衡的時間，來調整非條件投資組合中的權重，可以防止金融事件恰巧發生在兩再平衡時間點之間，降低投資組合可能發生的損失。條件投資組合，原本就是一動態的投資組合，執行再平衡是

為了修正權重與狀態變數之間的係數。透過實證我們發現，執行再平衡越頻繁，使用條件投資組合操作所獲得的報酬就會降低，反而是都不執行再平衡可以獲得最大報酬。因此本研究使用的動態選擇再平衡的方法，使用在改進傳統固定時間再平衡上有不錯的結果，而且當考慮傳統 Markowitz 權重估計式時，透過動態調整權重的投資報酬率會比固定時間調整來的多，但用在條件投資組合中則會減少投資報酬率。

國立高雄大學 National University of Kaohsiung

第五章 結論

第一節 結論

由模擬與實證分析，可以整理出以下結果：

(1) 實證分析結果：

透過單周期非條件投資組合搭配每月再平衡策略，為固定時間再平衡下能獲利最高的方法，若改為使用本研究的方法動態選擇再平衡時間點，反而比原本每月再平衡策略的平均報酬率提高了 0.1796%，卻只需要再平衡四次。這樣的結果顯示，透過動態的選擇再平衡時間，不但能提高獲利，還能只在必要時進行調整。

(2) 模擬研究結果：

由模擬結果，不論在一年、兩年、五年或十年，使用條件投資組合配置所獲得的平均報酬率永遠比非條件投資組合的配置來的高。在條件投資組合中，單騎且不考慮再平衡的配置方法的平均報酬，又比多期或者考慮再平衡策略的配置來的高，因此若要使用條件投資組合進行配置，建議使用單一週期且不考慮再平衡策略。

若非條件投資組合進行資產配置，建議要加入再平衡策略，而固定時間再平衡的時間選取以每季平衡一次為佳。

第二節 未來研究方向

本研究方法是假設投資組合的報酬是平穩的(stationary)，本研究所使用的 CUSUM 模型只考慮平均數的變動，並未考量變異數的變動，然而在實際情況中，當有政策的發布或者發生金融危機時，資產的變異數應該是會增加的，礙於時間考量，在此提供以上不足之處給後續研究者繼續探討。

參考文獻

[1] Alwan, L. C. and Roberts, H. V. (1989). Time Series Modeling for Statistical Process Control. *Journal of Business and Economic Statistics*, 6, pp. 87-95.

[2] Brandt, M. W. (2006). Dynamic Portfolio Selection by Augmenting the Asset Space. *The Journal of Finance*, 61, 5, pp. 2187-2217.

[3] Chopra, V. K. and Ziemba, W. T. (1993). *Journal of Portfolio Management*, 19, 2, pp. 6-11.

[4] Francis, J. C. and Ibbotson, R. (2002). *Investments: A Global Perspective.* Prentice Hall, New Jersey.

[5] Healy, D. J. (1987). Multivariate CUSUM Procedure. *Technometrics*, 29, pp. 409-412.

[6] Ingersoll J. E. (1987). *Theory of Financial Decision Making.* Rowman & Littlefield, New Jersey.

[7] Johnson, R. A. and Wichern, D. W. (2007). *Applied Multivariate Statistical Analysis*, 6th Edition. Pearson.

[8] Linter, J. (1965). The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments of Stock Portfolios and Capital Budgets. *The Review of Economics and Statistics*, 47, 1, pp. 13-37.

[9] Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7, 1, pp. 77-91.

[10] Markowitz, H. (1959). *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment.* Wiley, New York.

[11] Montgomery, D. C. (2009). *Statistical Quality Control: A Modern Introduction*, 6th Edition. Wiley, New York.

[12] Montgomery, D. C. and Mastrangelo, C. M. (1991). Some Statistical Process

Control Methods for Autocorrelated Data. *Journal of Quality Technology*, 23, pp. 179-193.

[13] Page, E. S. (1954). Continuous Inspection Schemes. *Biometrika*, 41, pp. 100-115.

[14] Perold, A. F. and Sharpe, W. F. (1988). Dynamic Strategies for Asset Allocation. *Financial Analysts Journal*, 44, 1, pp. 16-27.

[15] Sharpe, W. F. (1964). Capital Asset Prices: A Theorem of Market Equilibrium under Conditions of Risk. *Journal of Finance*, 19, 3, pp. 425-442.

[16] Swensen, D. F. (2009). *Pioneering Portfolio Management: an Unconventional Approach to Institutional Investment*. Free Press, New York.

[17] Theodossiou, P. T. (1993). Predicting Shifts in the Mean of a Multivariate Time Series Process: An Application in Predicting Business Failures. *Journal of the American Statistical Association*, 88, 422, pp. 441-449.

[18] Tsay, R. S. (2005). *Analysis of Financial Time Series*, 2nd Edition. Wiley, New York.

[19] Yourstone, S. A. and Montgomery, D. C. (1989). A Time Series Approach to Discrete Real-Time Process Quality Control. *Quality and Reliability Engineering International*, 5, pp. 309-317.

[20] 周行一，劉璞 (2000)。*投資學的世界*，天下遠見。

附錄一　單週期權重估計式推導

Brandt(2006)的單週期投資組合平均數-變異數模型如下：

$$\max E_t\left[W_{t+1}-\frac{b_t}{2}W_{t+1}^2\right]，\tag{a.1}$$

而期末財富W_{t+1}可以表達成以下的數學式

$$W_{t+1}=W_t\left(R_t^f+r_{t+1}^p\right)，\tag{a.2}$$

其中W_t為時間 t 的財富，也就是投資者所起始所擁有的財富；R_t^f 為總無風險利率(gross risk-free rate)，定義為$R_t^f=1+r_t^f$；r_{t+1}^p為投資組合的超額報酬。將(a.2)帶入(a.1)，

$$\max E_t\left[W_t\left(R_t^f+r_{t+1}^p\right)-\frac{b_t}{2}\left(W_t\left(R_t^f+r_{t+1}^p\right)\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \max E_t\left[W_tR_t^f+W_tr_{t+1}^p-\frac{b_t}{2}\left(W_tR_t^f\right)^2-\frac{b_t}{2}\left(W_tr_{t+1}^p\right)^2-b_tW_t^2R_t^fr_{t+1}^p\right]$$

$$\Rightarrow \max E_t\left[W_tR_t^f-\frac{b_t}{2}\left(W_tR_t^f\right)^2+\left(W_t-b_tW_t^2R_t^f\right)r_{t+1}^p-\frac{b_t}{2}\left(W_tr_{t+1}^p\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \max\ E_t\left[c_1+\left(W_t-b_tW_t^2R_t^f\right)r_{t+1}^p-\frac{b_t}{2}\left(W_tr_{t+1}^p\right)^2\right]\tag{a.3}$$

其中$c_1=W_tR_t^f-\frac{b_t}{2}\left(W_tR_t^f\right)^2$

$$\Rightarrow \max\ E_t\left[c_2+r_{t+1}^p-\frac{b_tW_t}{2\left(1-b_tW_t^2R_t^f\right)}\left(r_{t+1}^p\right)^2\right]\tag{a.4}$$

$$c_2=\frac{c_1}{W_t-b_tW_t^2R_t^f}$$

在(a.4)中因為c_2只包含了時間 t 的資訊，在給定 t 的情況下可視為常數，省去c_2後，(a.4)式可改寫為

$$\max E_t\left[r_{t+1}^p-\frac{\gamma}{2}\left(r_{t+1}^p\right)^2\right]，\tag{a.5}$$

其中$\gamma=\dfrac{b_tW_t}{\left(1-b_tW_t^2R_t^f\right)}$為正常數。投資組合的超額報酬$r_{t+1}^p$，定義為每一個資產的超額報酬乘上分配到的比例，$r_{t+1}^p=x_t'r_{t+1}$，因此(a.5)就可以改寫成(3.2)式

$$\max_{\mathbf{x}_t} \mathrm{E}_t\left[\mathrm{x}_t'\mathrm{r}_{t+1} - \frac{\gamma}{2}\mathrm{x}_t'\mathrm{r}_{t+1}\mathrm{r}_{t+1}'\mathrm{x}_t\right]。$$

假設權重為常數時($\mathrm{x_t} = \mathrm{x}$)，最大化平均數變異數模型可以改寫為

$$\max_{x} E_t\left[x'r_{t+1} - \frac{\gamma}{2}x'r_{t+1}r_{t+1}'x\right]， \tag{a.6}$$

透過一次微分條件(first order condition, F.O.C.)即可導出權重估計式

$$x = \frac{1}{\gamma}\mathrm{E}\left[r_{t+1}r_{t+1}'\right]^{-1}\mathrm{E}\left[r_{t+1}\right]， \tag{a.7}$$

再將母體一次動差用樣本平均數取代可得(3.3)式。

若投資組合權重為狀態變數的線性組合，也就是

$$\mathrm{x_t} = \theta \mathrm{z_t}， \tag{a.8}$$

將(a.8)帶入(3.2)式可得到

$$\max_{x_t} \mathrm{E}_t\left[(\theta z_t)' r_{t+1} - \frac{\gamma}{2}(\theta z_t)' r_{t+1}r_{t+1}'(\theta z_t)\right]。 \tag{a.9}$$

由於(a.9)式無法直接透過一次微分條件解出參數的估計值，所以需要利用線性代數的方法將時間項與非時間項分離

$$(\theta \mathrm{z_t})' r_{t+1} = \mathrm{z_t}'\theta' r_{t+1} = \mathrm{vec}(\theta)'(z_t \otimes r_{t+1})， \tag{a.10}$$

其中$\mathrm{vec}(\theta)$是將θ矩陣排成一行向量，例如：

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \theta_{13} & \theta_{14} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \theta_{23} & \theta_{24} \end{bmatrix} \text{ 則 } \mathrm{vec}(\theta) = \begin{bmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{21} \\ \theta_{12} \\ \theta_{22} \\ \theta_{13} \\ \theta_{23} \\ \theta_{14} \\ \theta_{24} \end{bmatrix}。$$

$\otimes$為 Kronecker product，定義如下：

若 A 為$\mathrm{m} \times \mathrm{n}$的矩陣 $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$、B 為$\mathrm{p} \times \mathrm{q}$的矩陣 $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pq} \end{bmatrix}$，

則 $A \otimes B$ 為 $mp \times nq$ 的方塊矩陣(block matrix)

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}。$$

為了簡化式子，令

$$\tilde{x} = \mathrm{vec}(\theta)$$

$$\tilde{r}_{t+1} = z_t \otimes r_{t+1}$$

則(a.9)可改寫為

$$\max_x E_t\left[x'\tilde{r}_{t+1} - \frac{\gamma}{2}x'\tilde{r}_{t+1}\tilde{r}'_{t+1}x\right], \tag{a.11}$$

此時利用一次微分條件，即可解出參數$\tilde{x}$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\gamma}E\left[\tilde{r}_{t+1}\tilde{r}'_{t+1}\right]^{-1}E\left[\tilde{r}_{t+1}\right] \\ &= \frac{1}{\gamma}E\left[\left(z_t z_t'\right)\otimes\left(r_{t+1}r'_{t+1}\right)\right]^{-1}E\left[z_t \otimes r_{t+1}\right], \end{aligned} \tag{a.12}$$

再一次將(a.12)中母體一次動差用樣本平均數取代可得(3.4)式。

附錄二 模擬研究圖

圖 4.1.2 模擬投資十年不再平衡、每兩期再平衡的兩期非條件投資組合報酬路徑

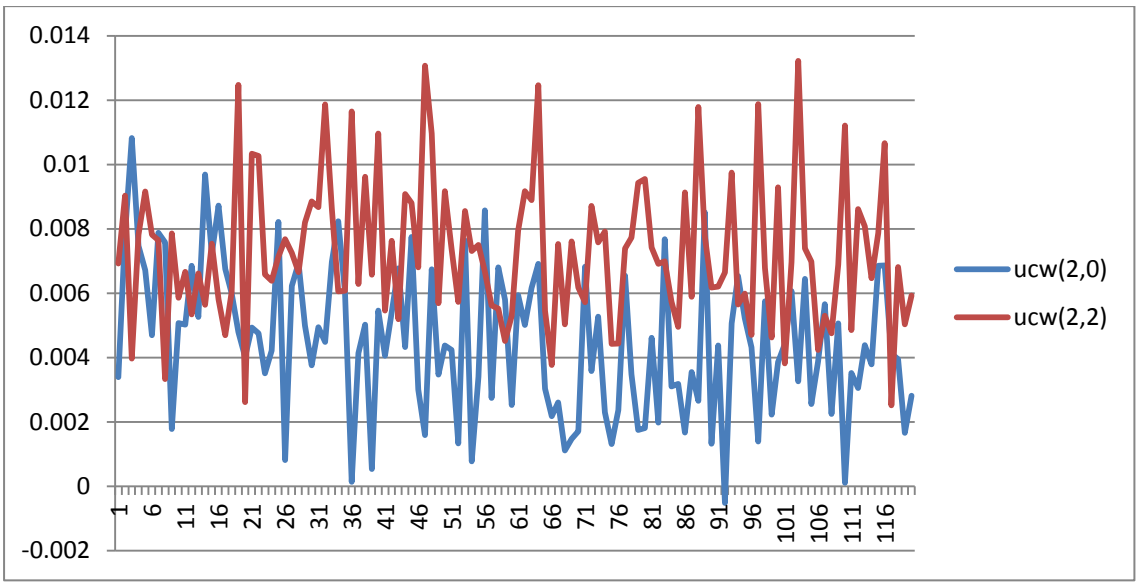
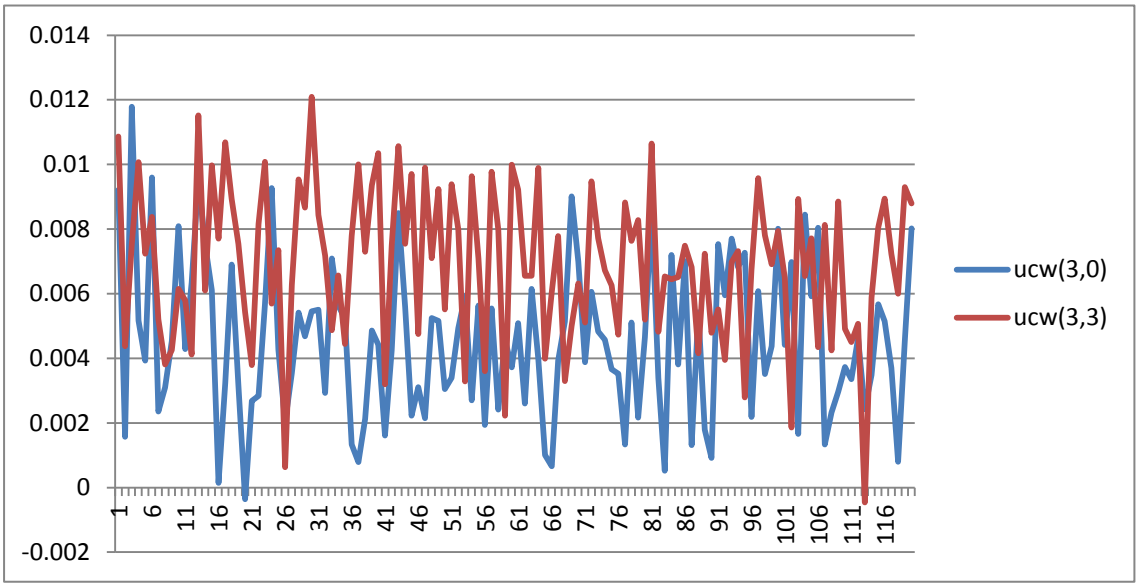


圖 4.1.3 模擬投資十年不再平衡、每兩期再平衡的兩期非條件投資組合報酬路徑



附錄三　實證分析表格

表 4.2.3 樣本資料 CUSUM 值與 Z 值(1999/09~2001/11)

date	Sep-99	Oct-99	Nov-99	Dec-99	Jan-00	Feb-00	Mar-00	Apr-00	May-00
Z 值	0.4869	1.1195	0.5785	0.8290	0.9716	0.8734	1.2804	0.6164	0.245406
C 值	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.14459
date	Jun-00	Jul-00	Aug-00	Sep-00	Oct-00	Nov-00	Dec-00	Jan-01	Feb-01
Z 值	0.3430	-0.188	-0.7083	0.3963	-0.1791	-0.241	0.2969	0.6107	-0.0389
C 值	-0.1916	-0.7696	-1.8678	-1.8616	-2.4307	-3.0616	-3.1547	-2.9340	-3.3629
date	Mar-01	Apr-01	May-01	Jun-01	Jul-01	Aug-01	Sep-01	Oct-01	Nov-01
Z 值	-0.525	0.3416	0.0898	-2.4311	-2.3245	1.8556	-1.1782	-3.2382	2.008
C 值	-4.2779	-4.3263	-4.6265	-7.4476	-10.1621	-8.6966	-10.2648	-13.893	-12.275

表 4.2.4 投資期間 CUSUM 值與 Z 值(2007~2011)

date	2007/01	2007/02	2007/03	2007/04	2007/05	2007/06	2007/07	2007/08	2007/09	2007/10	2007/11	2007/12
Z 值	0.7730	0.5360	0.1835	1.1663	1.95834	4.36083	3.08904	-0.0127	-0.0426	2.4393	0.4696	-0.7797
C 值	0	0	-0.2066	0	0	0	0	-0.40272	-0.83535	0	0	-1.1697
date	2008/01	2008/02	2008/03	2008/04	2008/05	2008/06	2008/07	2008/08	2008/09	2008/10	2008/11	2008/12
Z 值	-0.23315	-0.48786	1.002462	1.180042	1.140419	1.911853	-0.17134	-0.14425	-2.93552	-1.89733	-4.20377	-3.83168
C 值	-1.79289	-2.67076	-2.0583	-1.26825	-0.51784	0	-0.56134	-1.09559	-4.42111	-6.70844	-11.3022	-15.5239
date	2009/01	2009/02	2009/03	2009/04	2009/05	2009/06	2009/07	2009/08	2009/09	2009/10	2009/11	2009/12
Z 值	0.281044	1.560574	1.056538	1.803606	2.743843	1.759077	-0.04455	-0.73793	0.533727	0.051869	1.715397	1.325154
C 值	-15.6328	-14.4623	-13.7957	-12.3821	-10.0283	-8.6592	-9.09375	-10.2217	-10.078	-10.4161	-9.09069	-8.15553
date	2010/01	2010/02	2010/03	2010/04	2010/05	2010/06	2010/07	2010/08	2010/09	2010/10	2010/11	2010/12
Z 值	1.411985	-0.62426	0.462231	1.097672	-0.37197	1.057132	0.199923	-1.52805	-0.57298	0.021681	3.874184	2.627812
C 值	-7.13355	-8.14781	-8.07558	-7.3679	-8.12988	-7.46275	-7.65282	-9.57087	-10.5339	-10.9022	-7.41799	-5.18018
date	2011/01	2011/02	2011/03	2011/04	2011/05	2011/06	2011/07	2011/08	2011/09	2011/10	2011/11	2011/12
Z 值	0.819644	-0.01656	-0.02434	0.126158	1.664377	1.461536	0.811704	-1.41482	-2.18918	0.77361	1.585226	0.249791
C 值	-4.75053	-5.1571	-5.57144	-5.83528	-4.5609	-3.48937	-3.06766	-4.87248	-7.45166	-7.06805	-5.87283	-6.01304

表 4.2.5 2007~2011 單期非條件投資組合動態再平衡每月投資報酬

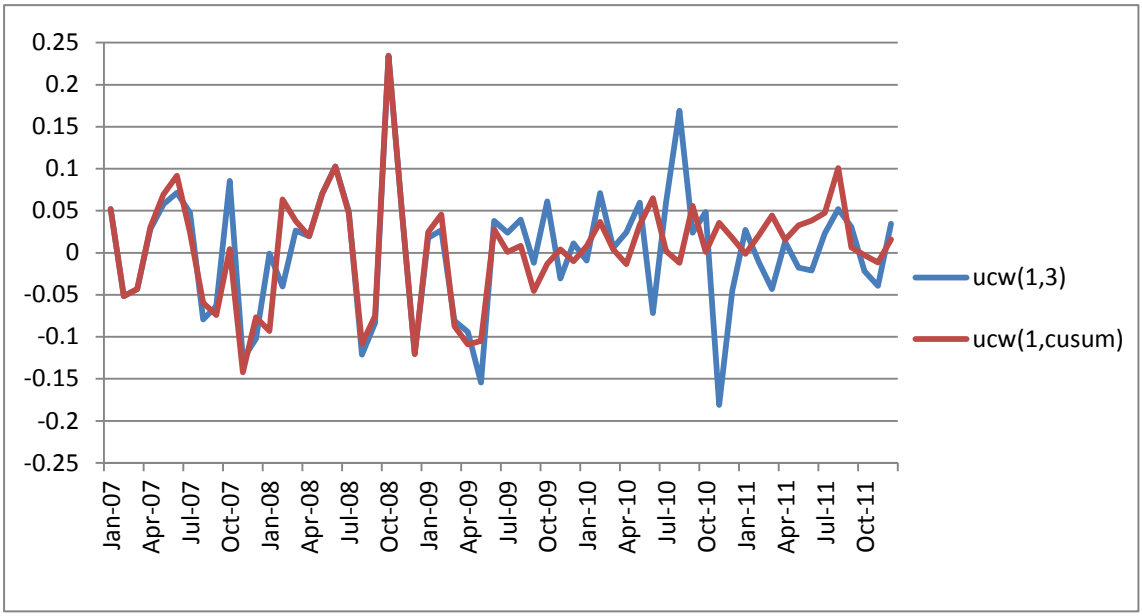
Jan-07	0.052219	Sep-08	-0.07525	May-10	0.033458
Feb-07	-0.05164	Oct-08	0.234476	Jun-10	0.065001
Mar-07	-0.0433	Nov-08	0.052689	Jul-10	0.002002
Apr-07	0.030284	Dec-08	-0.12051	Aug-10	-0.01192
May-07	0.069396	Jan-09	0.024527	Sep-10	0.055836
Jun-07	0.091735	Feb-09	0.045694	Oct-10	0.00098
Jul-07	0.023792	Mar-09	-0.08743	Nov-10	0.035597
Aug-07	-0.05956	Apr-09	-0.1089	Dec-10	0.017739
Sep-07	-0.074	May-09	-0.10498	Jan-11	-0.00145
Oct-07	0.004463	Jun-09	0.027754	Feb-11	0.020703
Nov-07	-0.14237	Jul-09	0.001082	Mar-11	0.044242
Dec-07	-0.0766	Aug-09	0.008373	Apr-11	0.015658
Jan-08	-0.09323	Sep-09	-0.04547	May-11	0.032608
Feb-08	0.063288	Oct-09	-0.013	Jun-11	0.038308
Mar-08	0.037994	Nov-09	0.003943	Jul-11	0.047576
Apr-08	0.019556	Dec-09	-0.00991	Aug-11	0.10081
May-08	0.070144	Jan-10	0.007951	Sep-11	0.006362
Jun-08	0.102549	Feb-10	0.036663	Oct-11	-0.00262
Jul-08	0.046823	Mar-10	0.004204	Nov-11	-0.01149
Aug-08	-0.10817	Apr-10	-0.01342	Dec-11	0.015849

表 4.2.6 單期非條件投資組合動態再平衡投資平均報酬率

計算期間	平均報酬%
2007~2011	0.5618
2008~2009/06	0.1501

附錄四 實證分析圖

圖 4.2.6 每季再平衡、動態再平衡非條件投資組合的報酬路徑



國立高雄大學 National University of Kaohsiung

圖 4.2.7 樣本資料管制圖(1999/09~2001/11)

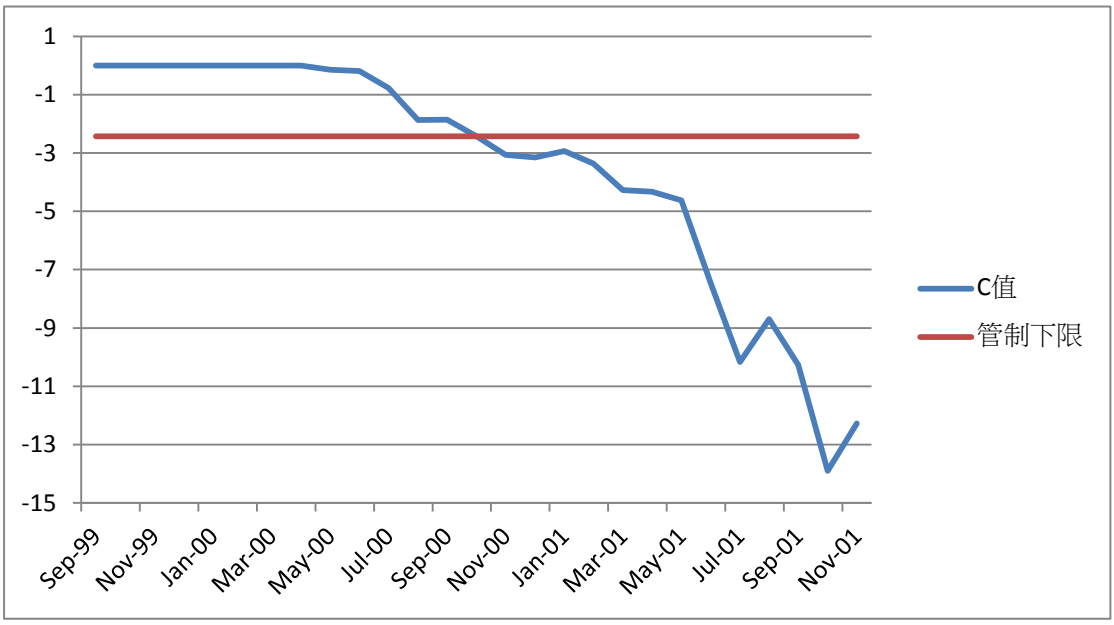
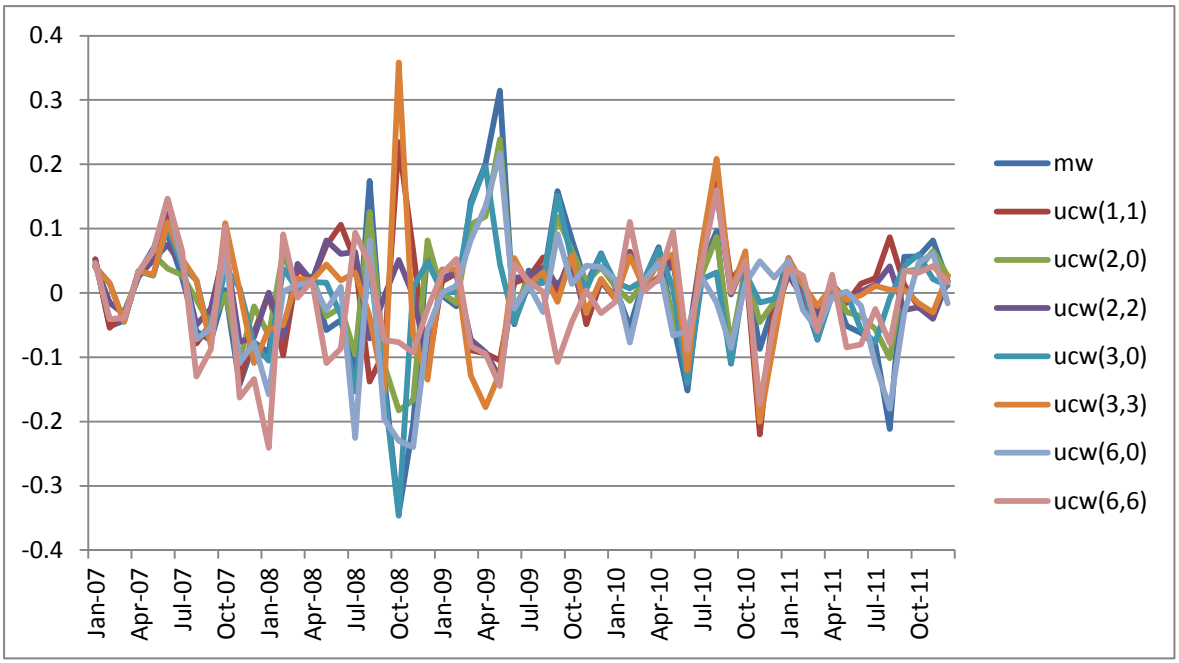


圖 4.2.8 2007~2011 非條件投資組合投資報酬路徑



國立高雄大學 National University of Kaohsiung

圖 4.2.9 2007~2011 條條件投資組合投資報酬路徑

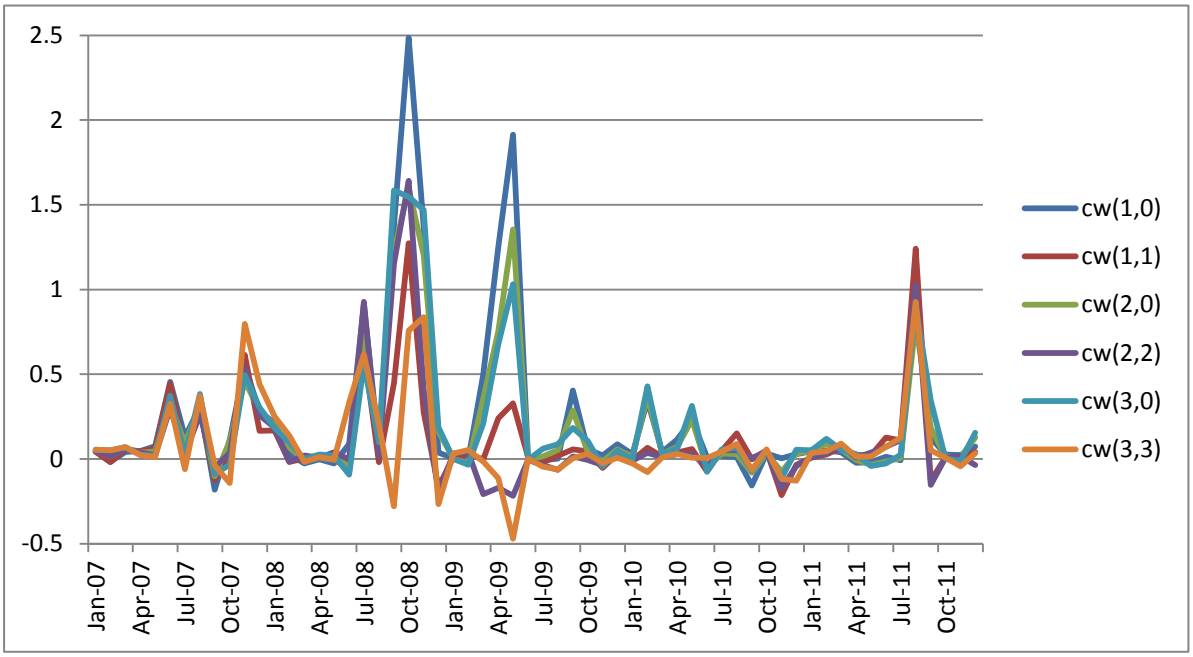
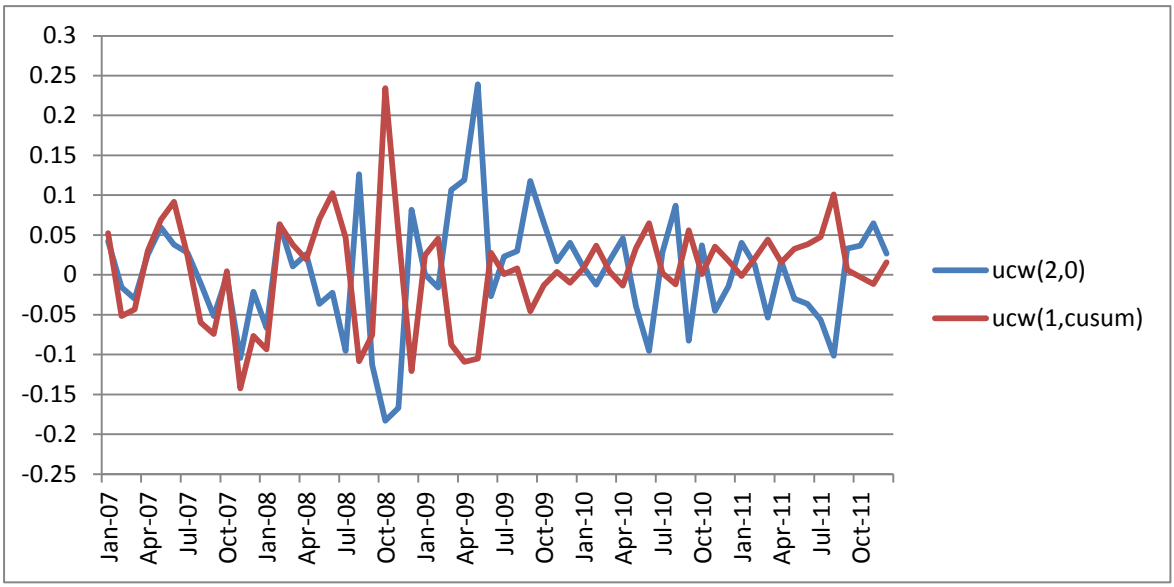


圖 4.2.10 2007~2011 單期動態調整與兩期不調整投資報酬路徑



國立高雄大學 National University of Kaohsiung

圖 4.2.11 2007~2011 單期動態調整、兩期非條件投資組合兩期調整投資報酬路徑

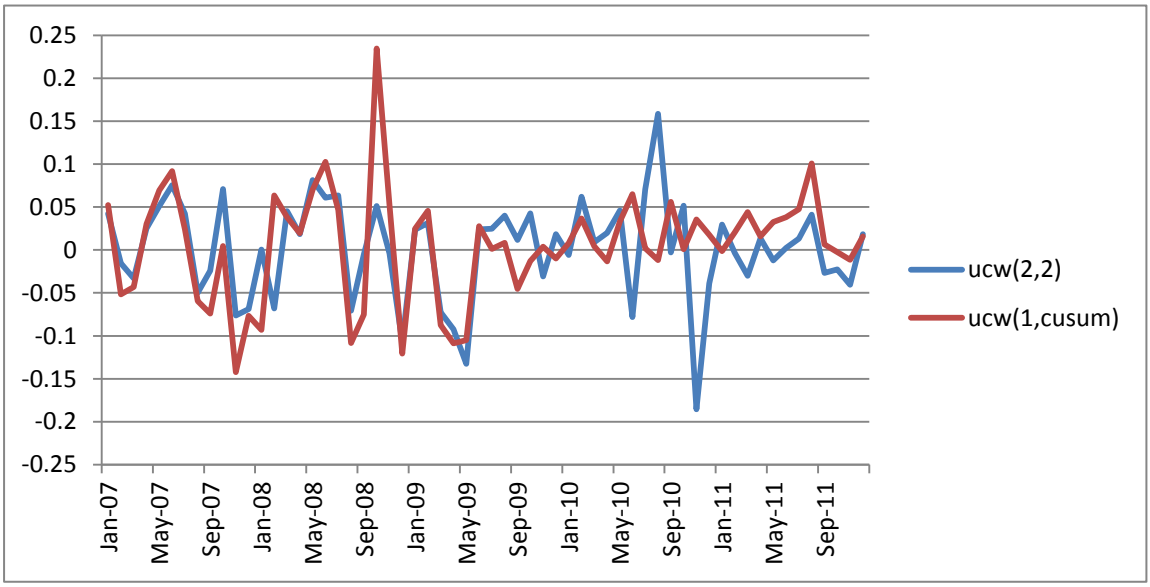
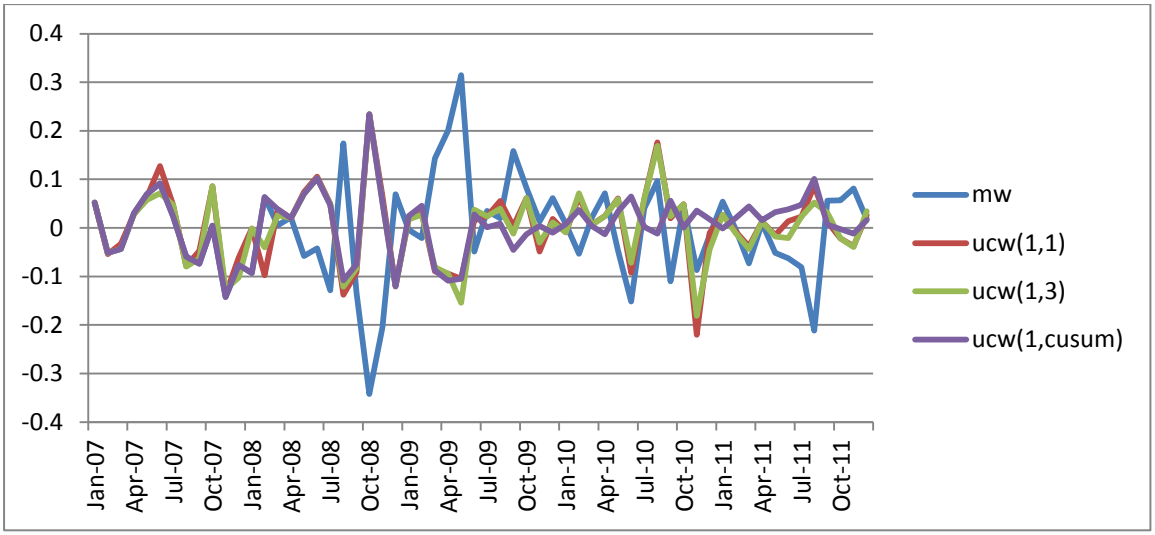


圖 4.2.12 2007~2011 單期非條件投資組合報酬路徑



國立高雄大學 National University of Kaohsiung

圖 4.2.13 2007~2011 兩期非條件投資組合、單期動態非條件投資組合報酬路徑

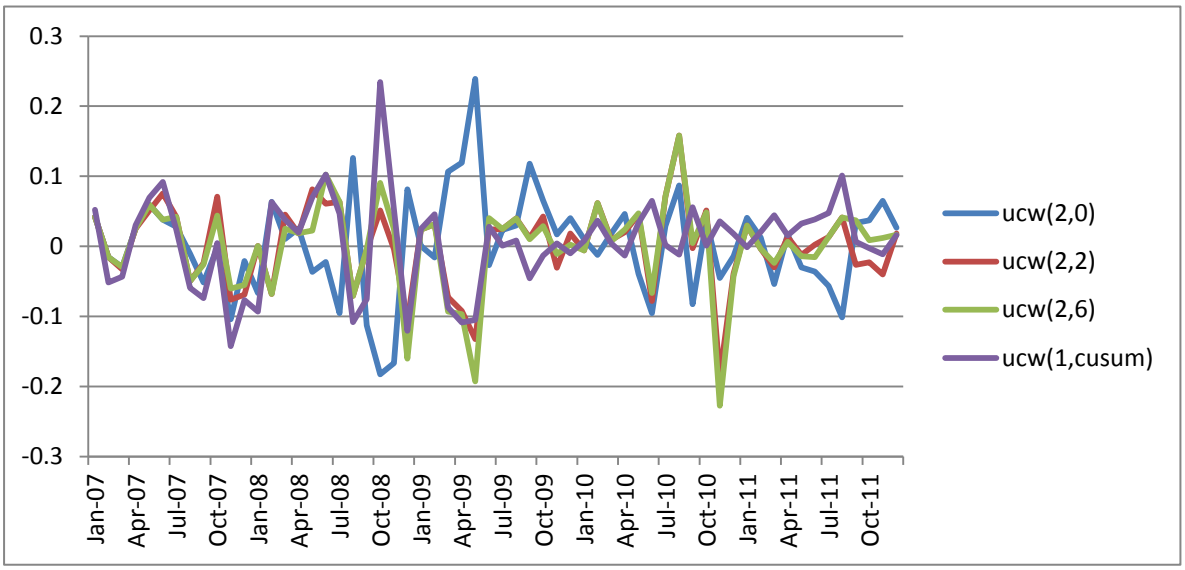
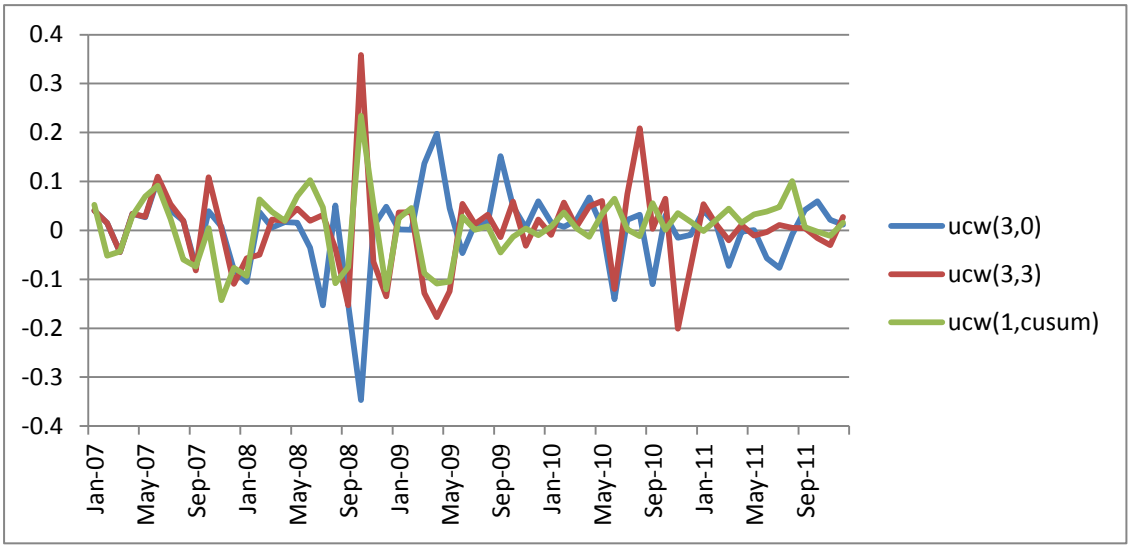


圖 4.2.14 2007~2011 兩期非條件投資組合、單期動態非條件投資組合報酬路徑



國立高雄大學 National University of Kaohsiung

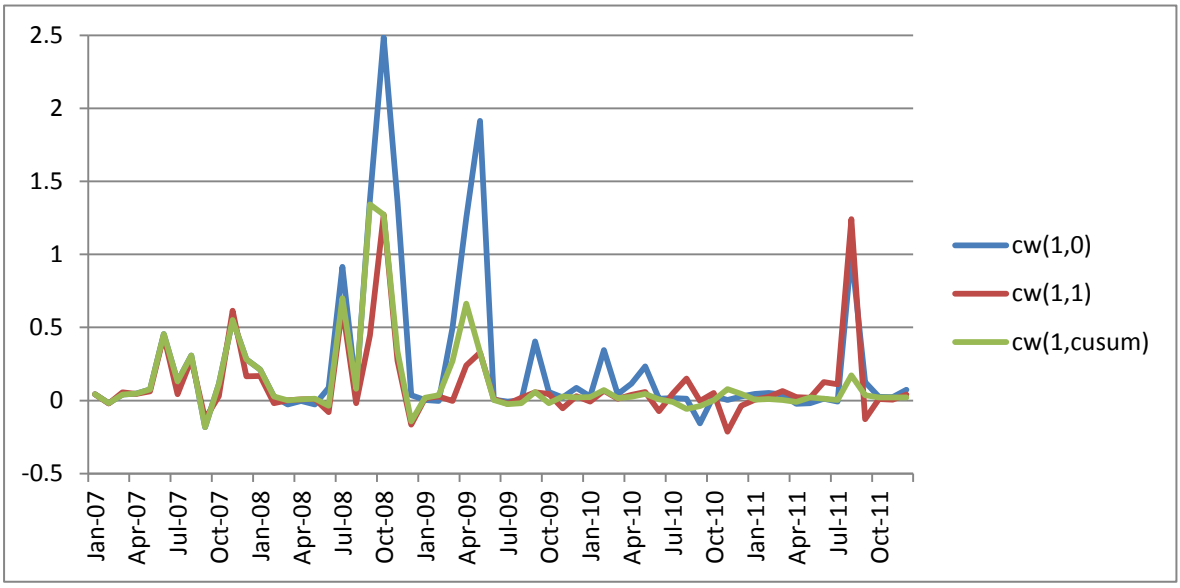



圖 4.2.15 2007~2011 單期條件投資組合報酬路徑